Предикатная эквивалентность формул алгебры логики

Э. Э. Гасанов, А. В. Колесниченко

В работе исследуется предикатная эквивалентность формул, вводимая с помощью множества предикатов $\mathcal{P}$ и множества перестановок M. Множества $\mathcal{P}$ и M согласованы, если соответствующая им предикатная эквивалентность совпадает с обычной эквивалентностью формул. Доказывается критерий согласованности множеств. Предложен алгоритм построения согласованных множеств предикатов. Приводятся серии примеров взаимно согласованных множеств $\mathcal{P}$ и M с разными соотношениями сложностных характеристик.

Ключевые слова: алгебра логики, логика предикатов, аналитическое описание геометрических фигур.

1. Введение

В компьютерной математике важную роль играют формальные языки, с помощью которых можно описывать объекты, подлежащие изучению. Такие языки могут использоваться, например, для описания геометрических фигур.

В частности, необходимость аналитического описания геометрических объектов возникает при решении краевых задач математической физики. Так практически во всех приближенных методах решения краевой задачи для некоторой области G приближенное решение ищется в виде

$$u_n = w(x)\sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x) + \varphi_0(x),$$

где $\varphi_k(x)(k = 0, 1, \ldots, n)$ — заранее выбранные известные функции, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — неизвестные постоянные коэффициенты. А функция

$w(x)$ — непрерывная функция, имеющая внутри области G ограниченные и непрерывные производные и удовлетворяющая условиям $w(x) > 0$ внутри G, $w(x) = 0$ на границе G.

Встает задача построения для заданной области G описанной выше функции $w(x)$. Чтобы более формально ввести постановку этой задачи делаются следующие предположения.

Предполагается, что исследуемая область (фигура) G есть подмножество m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что имеется некоторое множество D «хороших» функций, действующих из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$. Вводится обычным образом понятие формулы над D, и каждая формула над D реализует некоторую функцию, действующую из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$. Считается, что некоторая формула A над D является аналитическим описанием фигуры G, если функция, реализуемая формулой A, положительна внутри фигуры G и равна 0 на границе фигуры G.

Построение аналитического описания для некоторых областей (круг, эллипс, выпуклый многоугольник) не составляет труда. Но если область представляет собой сложную фигуру, например, пятиконечную звезду или невыпуклую сложную фигуру и т. д., то построение аналитического описания не так-то просто.

Метод решения этой задачи, получивший название метода R-функций, предложил В. Л. Рвачев [1, 2]. Суть этого подхода состоит в следующем.

Предполагается, что имеется некоторое множество базисных фигур $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_n\}$, причем для каждой фигуры G_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, имеется ее аналитическое описание $r_i(x_1, \ldots, x_m)$. Предполагается, что фигура G, для которой надо найти ее аналитическое описание, представима в виде формулы $\mathcal{A}(G_1, \ldots, G_n)$ над $\mathcal{G}$ с сигнатурой $\bigcap, \bigcup, \overline{}, (,)$, которая описывает представление фигуры G через базисные фигуры $G_1, \ldots, G_n$ с помощью операций $\bigcap$ (пересечение), $\bigcup$ (объединение), $\overline{}$ (дополнение). Каждой фигуре G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сопоставляется предикат p_i, определенный на $\mathbb{R}^m$, область истинности которого равна G_i. Производя в формуле $\mathcal{A}(G_1, \ldots, G_n)$ формальную замену G_i на p_i и операций $\bigcap, \bigcup, \overline{}$ на $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\neg$ (отрицание) соответственно, мы получаем формулу

$\mathcal{A}(p_1,\dots,p_n)$ логики предикатов, и эту формулу называем логическим описанием фигуры G.

Метод R-функций В. Л. Рвачева предлагает некий способ перехода от логического описания фигуры G к ее аналитическому описанию.

Далее эта тематика была развита в работах А. А. Шакирова [3, 4, 5, 6].

Данная работа является развитием работы [3], в которой исследовалась следующая задача.

Рассматриваются формулы алгебры логики над множеством связок $\{\wedge,\vee,\neg\}$. Вводится обычное понятие равенства формул, а именно *формулы равны*, если они реализуют равные с точностью до существенных переменных функции. Далее рассматриваются только формулы, зависящие от переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$, и множество этих формул обозначается $\Phi(n)$. Вводится в рассмотрение множество предикатов $\mathcal{P}=\{p_1(x,y),p_2(x,y),\dots,p_n(x,y)\}$, область истинности которых есть односвязные фигуры на плоскости. Это множество называется *множеством базисных фигур*, ассоциируя с каждым предикатом фигуру, соответствующую ее области истинности. Также вводится в рассмотрение множество n-перестановок M. Для произвольной формулы алгебры логики $\mathcal{A}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ из $\Phi(n)$ каждая перестановка $\pi=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\ i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}\in M$ определяет формальную подстановку предикатов из $\mathcal{P}$ в формулу $\mathcal{A}$ и тем самым определяет формулу $\mathcal{A}(p_{i_1},p_{i_2},\dots,p_{i_n})$ логики предикатов, которая своей областью истинности задает некоторую фигуру на плоскости. Говорят, что формулы $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\Phi(n)$ $(M,\mathcal{P})$-*равны*, если для любой перестановки $\pi=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\ i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}\in M$ формулы $\mathcal{A}(p_{i_1},p_{i_2},\dots,p_{i_n})$ и $\mathcal{B}(p_{i_1},p_{i_2},\dots,p_{i_n})$ задают одну и ту же фигуру. Говорят, что множества M и $\mathcal{P}$ *согласованы*, если формулы $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\Phi(n)$ равны тогда и только тогда, когда они $(M,\mathcal{P})$-равны.

Каждому булевому вектору $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ сопоставляется подмножество $O(\mathcal{P},a)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : p_i(x,y)=a_i,\ i=1,2,\dots,n\}$. Если подмножество $O(\mathcal{P},a)$ не пусто, то оно называется *областью разбиения с характеристическим вектором a*. Понятно, что n базисных фигур не могут разбить плоскость более чем на 2^n областей.

В работе [3] показано, что если множество базисных фигур разбивает плоскость на 2^n областей, то с этим множеством согласовано любое множество n-перестановок, в частности, любое одноэлементное множество. С другой стороны в [3] показано, что если M есть множество всех n-перестановок, то согласованное с ним множество базисных фигур должно разбивать плоскость по крайней мере на $n+1$ область, причем характеристические вектора областей должны содержаться на каждом из $n+1$ слое булевого куба.

В данной работе дается полный ответ на вопрос каким должно быть множество базисных фигур, согласованное с множеством перестановок, если известна мощность множества перестановок. А именно, для каждого натурального $t \in \{1, 2, \dots, n!\}$ и любого множества n-перестановок M мощности t дается точная формула, которая для каждого слоя куба говорит сколько характеристических векторов областей по крайней мере должен содержать слой, чтобы базовое множество фигур было согласовано с M.

Далее в работе [3] приводится алгоритм построения множества базисных фигур, которое разбивает плоскость на 2^n областей. В данной работе приводится алгоритм построения множеств базисных фигур с любым наперед заданным множеством характеристических векторов областей.

И наконец, в данной работе приводятся примеры согласованных множеств базисных фигур и перестановок с разными соотношениями мощностей множества характеристических векторов областей и множества перестановок.

Авторы выражают благодарность академику В. Б. Кудрявцеву и к.ф.-м.н. А. А. Шакирову за внимание к работе и ценные замечания.

2. Основные понятия и результаты

Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ — множества действительных и натуральных чисел, соответственно; $E = \{0, 1\}$; $\mathbb{R}^2$ — двумерное евклидово пространство; E^n — *единичный n-мерный* (или *булев*) куб, то есть E^n состоит из всех векторов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где при $i = 1, 2, \dots, n$ имеет место $a_i \in E$. Вектора $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из E^n называем *булевыми*. Для булевого вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ число $||a||$, равное числу единиц в векторе a, называем его *весом.* Множество $E_i^n = \{a \in E^n : ||a|| = i\}$, где $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, называем *i-м слоем булевого куба E^n.*

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $\{x, y\}$ — переменные принимающие значения из E и $\mathbb{R}$, соответственно.

Пусть $x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2, \neg x_1$ суть булевы функции, называемые, соответственно, *конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием* и B — множество этих функций.

Обычным образом введем понятие формулы над B, как, например, в [7, 8].

Для $\sigma \in E$ обозначим через x_1^σ булевую функцию, равную $\neg x_1$, если $\sigma = 0$, и — x_1, если $\sigma = 1$.

Для упрощения записи в некоторых формулах будут опускаться скобки, как это принято в алгебре логики.

Переменная x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ называется *существенной*, если можно указать такие наборы $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n)$ и $b = (a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$, что $f(a) \neq f(b)$. В противном случае переменная x_i называется *фиктивной.*

Две булевы функции называются *равными*, если множества их существенных переменных совпадают и на любых двух наборах, различающихся, может быть, только значениями несущественных переменных, значения этих функций совпадают.

Пусть Φ_B — множество всех формул над B и $\Phi_B(x_1, \dots, x_n)$ (или просто $\Phi_B(n)$) — множество всех формул над B, реализующих функции, существенно зависящие от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из Φ_B называются *равными*, если они реализуют равные функции. Это отношение равенства разбивает Φ_B на классы эквивалентности $\mathcal{D}$, которые содержат точно все формулы, которые реализуют равные функции.

Фигурой или *областью* будем называть открытое или замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим множество базисных фигур в $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$. Каждой фигуре G_i сопоставим предикат $p_i(x_1, x_2)$, областью истинности которого является G_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ — n-перестановка, $\mathcal{P} = \{p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2), \dots, p_n(x_1, x_2)\}$ и $\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Phi_B(n)$. Подставим в $\mathcal{A}$ вместо каждой переменной x_j предикат p_{i_j} из $\mathcal{P}$. Данную операцию назовем π-*подстановкой*, а полученное выражение $\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})$ — $\mathcal{P}$-*формулой.*

Поскольку описания фигуры G как в виде открытого подмножества плоскости, так и в виде предиката p, область истинности которого есть это подмножество G, являются тавтологическими, то мы далее будем использовать предикат p для обозначения фигуры G и будем говорить «фигура p» несмотря на то, что p — предикат, описывающий фигуру G.

Каждая $\mathcal{P}$-формула $\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})$ является формулой логики предикатов и реализует некоторый предикат. Свяжем с этой формулой фигуру $\mathcal{F}_{\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})} \subseteq \mathbb{R}^2$, являющуюся областью истинности данного предиката, и будем говорить, что $\mathcal{P}$-формула $\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})$ задает (или описывает) фигуру $\mathcal{F}_{\mathcal{A}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})}$.

Фигуры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ называются *равными* (пишем $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$), если они совпадают в $\mathbb{R}^2$ как множества.

$\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ назовем $\mathcal{P}$-*равными* (пишем $\mathcal{A} \overset{\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$), если они задают равные фигуры.

Пусть M — некоторое подмножество множества всех n-перестановок Π^n.

Формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются $(M, \mathcal{P})$-*равными* (пишем $\mathcal{A} \overset{M,\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$), если при любой соответственно одинаковой подстановке $\pi \in M$ в них предикатов из $\mathcal{P}$ вместо переменных получаемые $\mathcal{P}$-формулы являются $\mathcal{P}$-равными.

Отношение $(M, \mathcal{P})$-равенства на множестве $\Phi_B(n)$ разбивает это множество на классы эквивалентности $\mathcal{D}_{M,\mathcal{P}}$, которые содержат точно все такие формулы, которые являются $(M, \mathcal{P})$-равными.

Будем говорить, что множество базисных фигур $\mathcal{P}$ и множество n-перестановок M *согласованы*, если отношения равенства булевских формул и $(M, \mathcal{P})$-равенства эквивалентны, то есть разбиения $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_{M,\mathcal{P}}$ совпадают, или, что то же самое, для любых двух формул $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Phi_B(n)$ верно $\mathcal{A} \overset{M,\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Пусть p — некоторая фигура. Через p^1 обозначим фигуру p, а через p^0 — дополнение к фигуре p, то есть фигуру $\overline{p}$. Обозначим

$$h(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \not\equiv 0, \\ 0, & \text{если } p \equiv 0. \end{cases}$$

Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ — n-перестановка из Π^n и $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ — множество базисных фигур, $M = \{\pi_1, \dots, \pi_k\} \subseteq \Pi^n$. Обозначим

$$\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(a_1, \dots, a_n) = h(p_{i_1}^{a_1} \cap p_{i_2}^{a_2} \cap \dots \cap p_{i_n}^{a_n}),$$
$$\chi_M^{\mathcal{P}} = \Omega_{\pi_1}^{\mathcal{P}} \vee \Omega_{\pi_2}^{\mathcal{P}} \vee \dots \vee \Omega_{\pi_k}^{\mathcal{P}}.$$

Обозначим через ε тождественную перестановку

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Функцию $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}$ будем называть *функцией распределения* множества базисных фигур $\mathcal{P}$.

Множество всех граничных точек фигуры p назовем *границей* ∂p фигуры p.

Отрезком назовем часть прямой, заключенной между двумя различными точками этой прямой, при этом эти точки называются концами отрезка. Если x_1, x_2 концы отрезка, то отрезок обозначим через $[x_1, x_2]$.

Последовательность отрезков в $\mathbb{R}^2$

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \dots [x_{i-1}, x_i]$$

назовем *ломаной,* и *замкнутой ломаной,* если $x_1 = x_i$.

Не имеющую самопересечений замкнутую ломаную, состоящую из n отрезков, назовем *n-угольником,* а отрезки этой ломаной — сторонами n-угольника.

Область в $\mathbb{R}^2$, граница которой является n-угольником, называется *n-угольной областью.* Заметим, что для любого невырожденного n-угольника существует две n-угольные области, границей которых он является (внешняя и внутренняя).

Фигуру назовем *псевдовыпуклой*, если для любого горизонтального или вертикального отрезка из того, что концы отрезка принадлежат фигуре, следует, что весь отрезок принадлежит фигуре.

Введем *функцию качества* множества базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$

$$R(\mathcal{P}) = |\{(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n : h(p_1^{a_1} \cap \cdots \cap p_n^{a_n}) = 1\}|.$$

Будем считать лучшим то множество базисных фигур, для которого $R(\mathcal{P})$ меньше.

Пусть нам дано множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, где все фигуры являются односвязными многоугольниками. *Сложностью фигуры* p_i назовем количество углов этой фигуры, и обозначим ее $C(p_i)$. *Сложностью множества базисных фигур* $\mathcal{P}$ назовем количество углов фигуры данного множества, имеющей максимальную сложность, то есть величину $C(\mathcal{P}) = \max_{p_i \in \mathcal{P}} C(p_i)$.

Введем в рассмотрение следующие функции

$$q_i(t) = \left]\frac{n! - t + 1}{i! \cdot (n-i)!}\right[, \tag{2}$$

где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $]a[$ — наименьшее целое не меньшее чем a.

Естественным образом возникают следующие вопросы.

1. Дано натуральное число t. Необходимо найти лучшее по качеству множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, которое согласовано с любым множеством n-перестановок M мощности t.

2. Дано множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Необходимо найти минимальное число t, такое что множество $\mathcal{P}$ согласовано с любым множеством n-перестановок M мощности t, или доказать что такого t не существует.

3. Дано множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ и множество n-перестановок M. Необходимо проверить согласованы ли множества $\mathcal{P}$ и M.

Ответы на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $t \in \{1, 2, \ldots, n!\}$ множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ согласовано с любым множеством $M \subseteq \Pi^n$, таким, что $|M| \geqslant t$, тогда и только тогда, когда для* *каждого* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *на слое* E_i^n *существует хотя бы* $q_i(t)$ *наборов* a *таких, что* $\Omega_\varepsilon^P(a) = 1$, *где* $q_i(t)$ *задается формулой (2),* ε *— тождественная перестановка, определяемая соотношением (1).*

В работе [3] была доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Множество базисных фигур* $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *и множество* $M \subseteq \Pi^n$ *согласованы тогда и только тогда, когда* $X_M^{\mathcal{P}} \equiv 1$.

Поскольку при фиксации $M \subseteq \Pi^n$ функция X_M^P однозначно определяется функцией распределения $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}$, то из утверждения 1 следует, что для любого $M \subseteq \Pi^n$ два множества базисных фигур $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, таких что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv \Omega_\varepsilon^{\mathcal{Q}}$, согласованы или не согласованы с M одновременно.

Поскольку любая перестановка оставляет наборы $(0, \ldots, 0)$ и $(1, \ldots, 1)$ на месте, то другим следствием утверждения 1 является тот факт, что для любого множества базисных фигур $\mathcal{P}$, согласованного с каким-либо множеством перестановок M, выполнено $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(0, \ldots, 0) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(1, \ldots, 1) = 1$.

Поэтому при исследовании $\mathcal{P}$ на согласованность с M, можно работать не с конкретным базисным множеством фигур, а с классом множеств базисных фигур, задаваемых одной и той же функцией распределения. Следующая теорема показывает, что для любой такой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, что $f(0, \ldots, 0) = f(1, \ldots, 1) = 1$, существует множество базисных фигур $\mathcal{P}$, для которого $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv f$, причем доказывается этот факт конструктивно, то есть предоставлением алгоритма, строящего по функции f соответствующее множество базисных фигур.

Теорема 2. *Для любого натурального* n *и любой булевой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *такой что* $f(0, \ldots, 0) = f(1, \ldots, 1) = 1$ *существует такое множество базисных фигур* $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, *что* $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv f$ *и для каждого* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *фигура* p_i *является псевдовыпуклой многоугольной областью с количеством углов не более чем* $6 \cdot 2^{n-3} + 2$.

Следующие две теоремы предоставляют примеры согласованных множеств базисных фигур и перестановок с разными соотношениями качества множества базисных фигур и мощности множества перестановок.

Теорема 3. *Для любых натуральных k и n, $k < n$, существуют согласованные множество $M \subseteq \Pi^n$ и множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, для которых верно*

$$|M| = (n-k+1)^k + \Sigma_{r=1}^{k-1}((n-r+1)^r - (n-r)^r),$$

$R(\mathcal{P}) = 2^{n-k} + k$ *и* $C(\mathcal{P}) = \max(2^{n-2} + 3, 5 \cdot 2^{n-4})$.

Теорема 4. *Для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_r$ и n таких, что $\sum_{i=1}^{r} k_i \leqslant n$, существуют согласованные множество $M \subseteq \Pi^n$ и множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, для которых верно $|M| = k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!$ и $R(\mathcal{P}) = (k_1+1) \cdot \ldots \cdot (k_r+1) \cdot 2^{n-\sum_{i=1}^{r} k_i}$.*

3. Доказательство теоремы 1

Согласно (2) для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ имеем

$$q_i(t) \geqslant (n! - t + 1)/(i! \cdot (n-i)!).$$

Откуда сразу получаем, что

$$t \geqslant n! - q_i \cdot (i! \cdot (n-i)!) + 1. \tag{3}$$

С другой стороны $q_i(t) < (n! - t + 1)/(i! \cdot (n-i)!) + 1$. Следовательно, $t < n! - (q_i - 1) \cdot (i! \cdot (n-i)!) + 1$ и

$$t \leqslant n! - (q_i - 1) \cdot (i! \cdot (n-i)!). \tag{4}$$

Пусть $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ — номер слоя булевого куба. Обозначим $A_i = \{a \in E_i^n : \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(a) = 1\}$, то есть это множество наборов i-го слоя, где функция распределения принимает значение 1. Возьмем произвольный набор b принадлежащий i-ому слою куба. Через B_i^b обозначим множество всех n-перестановок переводящих набор b в b. Понятно, что $|B_i^b| = (i! \cdot (n-i)!)$. Пусть $a \in E_i^n$ и σ — некоторая перестановка переводящая b в a. Легко видеть, что множество $C_i^{ba} = \{\sigma\pi : \pi \in B_i^b\}$ есть множество всех перестановок, переводящих b в a. Множество $C_i^b = \bigcup_{a \in A_i} C_i^{ba}$ есть множество всех перестановок, переводящих b в наборы из A_i. Обозначим $D_i^b = \{\pi : \pi^{-1} \in C_i^b\}$. Очевидно

$$|D_i^b| = |A_i| \cdot (i! \cdot (n-i)!). \tag{5}$$

Достаточность. Возьмем произвольный слой E_i^n булевого куба и произвольный набор $b \in E_i^n$. Согласно условию $|A_i| = s \geqslant q_i(t)$. Возьмем произвольное множество перестановок M такое, что $|M| \geqslant t$. Согласно (3) имеем $|M| \geqslant t \geqslant n! - q_i(t) \cdot (i! \cdot (n-i)!) + 1$. Следовательно, согласно (5) хотя бы один элемент из множества D_i^b должен принадлежать и M. Пусть это будет перестановка π. Для нее верно

$$\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(b) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(b)) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(a) = 1,$$

где $a \in A_i$. Следовательно, $X_M^{\mathcal{P}}(b) = 1$. Отсюда в силу произвольности выбора набора b и слоя E_i^n с учетом утверждения 1 получаем справедливость достаточного условия.

Необходимость. Предположим, что для некоторого номера $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ выполнено $|A_i| = s < q_i$. Возьмем произвольный набор $b \in E_i^n$. Рассмотрим множество $\Pi^n \setminus D_i^b$. Согласно (4)

$$|\Pi^n \setminus D_i^b| = n! - s \cdot (i! \cdot (n-i)!) \geqslant n! - (q_i - 1) \cdot (i! \cdot (n-i)!) \geqslant t. \quad (6)$$

Возьмем произвольное $M \subset \Pi^n \setminus D_i^b$ такое, что $|M| = t$. Согласно (6) это можно сделать. Поскольку для любой перестановки $\pi \in M$ имеем, что $\pi \notin D_i^b$, то $\pi^{-1}(b) \notin A_i$, и, значит, $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(b)) = \Omega_\pi^{\mathcal{P}}(b) = 0$. Откуда в силу произвольности π из M получаем $X_M^{\mathcal{P}}(b) = 0$. Следовательно, согласно утверждения 1 имеем, что $\mathcal{P}$ и M не согласованы.

Тем самым теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Сначала приведем алгоритм разбиения плоскости на 2^n частей n фигурами.

Разбить плоскость на 4 части двумя фигурами легко, взяв любые две пересекающиеся не вложенные фигуры. Разбить плоскость на 8 частей тремя фигурами тоже не сложно. Но мы приведем одно специальное разбиение, которое будет базисом и основным вспомогательным элементом в построении нашего алгоритма.

Рассмотрим 3 фигуры приведенные на рисунке 1. Они разбивают плоскость на 2^3 частей. Если наложить эти фигуры друг на друга, то мы получим области разбиения, изображенные на рисунке 2. На

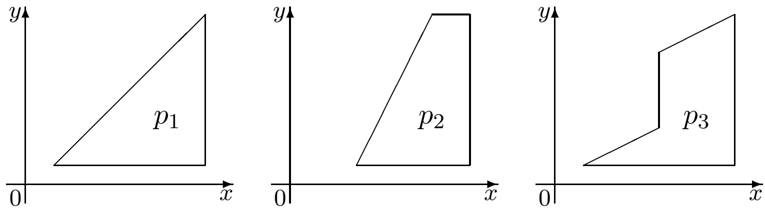

Рис. 1. Фигуры p_1, p_2, p_3, разбивающие плоскость на 2^3 частей.

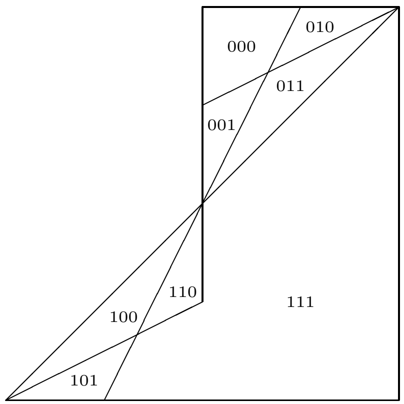

Рис. 2. Ступенька.

этом рисунке внутри областей изображены их характеристические вектора. Здесь и далее при изображении булевых векторов мы будем опускать окружающие круглые скобки и запятые, например, вместо (0,0,1) будем писать 001. Отметим только, что в верхнем левом углу рисунка 2 добавлена подобласть с характеристическим вектором 000. Полученную конфигурацию с добавленной подобластью будем называть *ступенькой*.

Возьмем произвольное натуральное число $n > 3$. Построим фигуры $p_1, \ldots, p_n$, делящие плоскость на 2^n частей следующим образом. Возьмем 2^{n-3} ступеньки и расположим их на диагонали друг за другом. Пример расположения ступенек при $n = 5$ приведен на рисунке 3. Каждой ступеньке сопоставим булев вектор длины $n-3$, называемый кодом ступеньки, причем самой верхней ступеньке сопоставим код $0\ldots00$, следующей сверху — $0\ldots01$, и т. д., и самой последней,

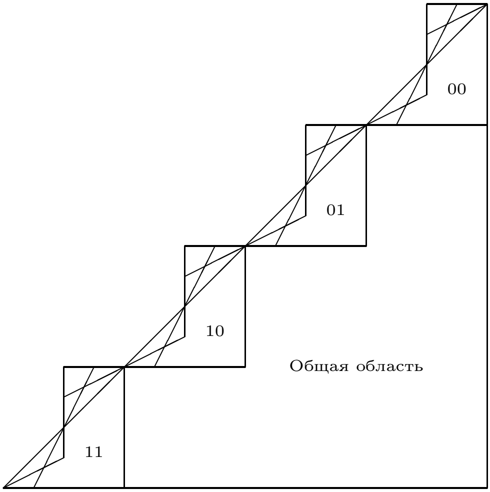

Рис. 3. Разбиение плоскости на 2^5 частей.

нижней, — $1\ldots 11$. Так на рисунке 3 внутри ступенек приведены коды ступенек. Далее продлим горизонтальную нижнюю линию нижней ступеньки вправо, а вертикальную правую линию верхней ступеньки вниз до пресечения с продленной горизонтальной линией. Полученную область под ступеньками назовем *общей областью.* Теперь определим характеристические вектора областей разбиения полученной конфигурации. Характеристическим вектором общей области будет вектор $1\ldots 1$, характеристическим вектором внешней области будет вектор $0\ldots 0$, характеристические вектора областей ступеньки получаются добавлением к коду ступеньки справа характеристического вектора соответствующей области ступеньки.

Так для ступеньки с кодом 01 характеристические вектора областей изображены на рисунке 4.

Характеристические вектора областей разбиения однозначно определяют каждую из базисных фируг, а именно фигура p_i есть объединение областей разбиения, у которых в характеристическом векторе на i месте стоит 1.

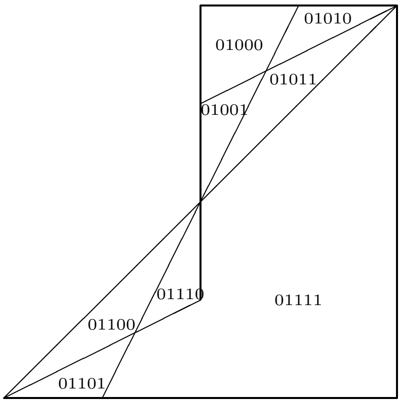

Рис. 4. Характеристические вектора ступеньки с кодом 01.

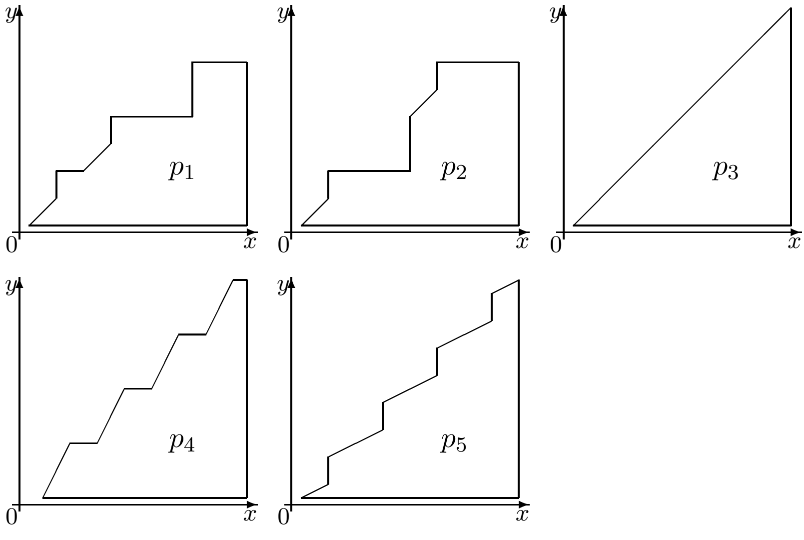

Рис. 5. Фигуры, разбивающие плоскость на 2^5 частей.

Так на рисунке 5 приведены базисные фигуры, определяемые введенными ранее характеристическими векторами областей разбиения, приведенных на рисунке 3.

Легко видеть, что каждая из первых $n-3$ базисных фигур есть объединение общей области и 2^{n-4} ступенек, и тем самым представляет собой псевдовыпуклый многоугольник с не более чем $3 \cdot 2^{n-4} + 2 \cdot (2^{n-4} - 1) + 2 = 5 \cdot 2^{n-4}$ углами. Причем $5 \cdot 2^{n-4}$ углов имеет только первая фигура.

Фигура p_{n-2} есть объединение общей области и 2^{n-3} треугольников вида треугольника p_1, изображенного на рисунке 1, и тем самым — это треугольник.

Фигура p_{n-1} есть объединение общей области и 2^{n-3} трапеций вида трапеции p_2, изображенной на рисунке 1, и тем самым — это псевдовыпуклый многоугольник с $2 \cdot 2^{n-3} + 2 = 2^{n-2} + 2$ углами.

Фигура p_n есть объединение общей области и 2^{n-3} пятиугольников вида пятиугольника p_3, изображенного на рисунке 1, и тем самым — это псевдовыпуклый многоугольник с $2 \cdot 2^{n-3} + 3 = 2^{n-2} + 3$ углами.

Тем самым, каждая из базисных фигур представляет собой псевдовыпуклый многоугольник с не более чем $2^{n-2} + 3$ углами при $n = 4, 5$ и с не более чем $5 \cdot 2^{n-4}$ углами при $n > 5$.

Отметим, что в работе [3] также предлагается алгоритм построения фигур, разбивающих плоскость на 2^n областей, но построенные там фигуры не являются псевдовыпуклыми и имеют большее число углов при $n > 4$.

Пусть теперь у нас имеется произвольная булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $f(0, \ldots, 0) = f(1, \ldots, 1) = 1$. Построим такое множество базисных фигур $\mathcal{P}_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv f$. Отметим сразу, что случай функции $f \equiv 1$ соответствует разбиению на 2^n областей и мы его уже рассмотрели, поэтому имеет смысл рассматривать только случай $f \not\equiv 1$.

Сначала рассмотрим случай, когда $n = 2$. Если вектор значений функции f имеет вид 1001, то базисные фигуры — это любые две совпадающие фигуры. Во всех остальных случаях — это две разные фигуры, вложенные одна в другую.

Теперь рассмотрим случай $n > 2$. Посмотрим на ступеньку, изображенную на рисунке 2. В ней 8 областей, помеченных булевыми векторами длины 3, которые будем интерпретировать как номер области.

Пусть нам дано разбиение плоскости на области, какое мы описывали выше и которое приведено на рисунке 3, с характеристическими векторами, описанными ранее. Возьмем произвольную ступеньку с кодом $i_1 \dots i_{n-3}$. Для случая $n = 3$ мы берем нашу единственную ступеньку и можем считать, что у нее код длины 0. Будем менять характеристические вектора областей выбранной ступеньки в зависимости от значений функции f следующим образом.

Если $f(i_1, \dots, i_{n-3}, i_{n-2}, i_{n-1}, i_n) = 1$, то характеристический вектор области $i_{n-2}i_{n-1}i_n$ рассматриваемой ступеньки не меняется, то есть остается равным $i_1 \dots i_{n-3}i_{n-2}i_{n-1}i_n$.

Если $f(i_1, \dots, i_{n-3}, 1, 1, 1) = 0$, то характеристический вектор области 111 рассматриваемой ступеньки меняем на $11 \dots 1$.

Далее, если $i_{n-2}i_{n-1}i_n \in \{000, 100\}$ и $f(i_1, ..., i_{n-3}, i_{n-2}, i_{n-1}, i_n) = 0$, то характеристический вектор области $i_{n-2}i_{n-1}i_n$ рассматриваемой ступеньки меняем на $00 \dots 0$.

Далее, если $i_{n-2}i_{n-1}i_n \in \{001, 010\}$ и $f(i_1, ..., i_{n-3}, i_{n-2}, i_{n-1}, i_n) = 0$, то характеристический вектор области $i_{n-2}i_{n-1}i_n$ рассматриваемой ступеньки меняем на характеристический вектор области 000 рассматриваемой ступеньки.

Наконец, если $i_{n-2}i_{n-1}i_n \in \{011, 101, 110\}$ и $f(i_1, ..., i_{n-2}, i_{n-1}, i_n) = 0$, то характеристический вектор области $i_{n-2}i_{n-1}i_n$ рассматриваемой ступеньки меняем на характеристический вектор области 111 рассматриваемой ступеньки.

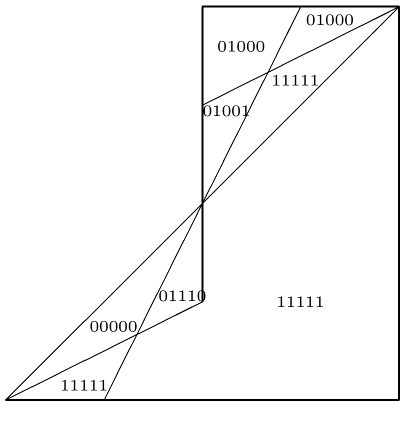

Рис. 6. Новые характеристические вектора ступеньки с кодом 01 для функции 11000010.

В качестве примера на рисунке 6 изображены новые характеристические вектора ступеньки с кодом 01 в случае, когда вектор значений функции $f(0,1,x_3,x_4,x_5)$ имеет вид 11000010.

Проделав эту операцию для каждой ступеньки, мы определим характеристические вектора всех областей разбиения. Как и ранее, характеристические вектора областей разбиения однозначно определяют каждую из базисных фируг, а именно фигура p_i есть объединение областей разбиения, у которых в характеристическом векторе на i месте стоит 1.

Легко видеть, что каждая из базисных фигур останется псевдовыпуклым многоугольником. Посмотрим насколько может увеличиться количество углов фигуры.

Как и ранее, каждая из первых $n-3$ базисных фигур есть объединение общей области и 2^{n-4} ступенек, но если ранее каждая присутствующая ступенька давала 3 угла, а отсутствующая — 2, то теперь каждая присутствующая ступенька может давать до 6 углов, а отсутствующая ступенька за счет увеличения общей области может также давать до 6 углов. Здесь и далее самый нижний угол ступеньки будем относить к текущей ступеньке, а самый верхний — к следующей ступеньке. 6 углов у присутствующей ступеньки мы получаем, например, если функция f принимает значение 0 на областях 000 и 100 данной ступеньки, а 6 углов, добавленных к общей области, мы получаем, если функция f принимает значение 0 на областях 011 и 111 данной ступеньки. Легко проверяется, что никакая ступенька не может давать более 6 углов. Учитывая 2 угла на правой границе фигуры, получаем, что число углов может достигнуть $6 \cdot 2^{n-3} + 2$.

Фигура p_{n-2} может превратиться в $(4 \cdot 2^{n-3} + 2)$-угольник, если функция f будет принимать значение 0 на областях 100 и 011 каждой ступеньки.

Фигура p_{n-1} может превратиться в $(3 \cdot 2^{n-3} + 2)$-угольник, если функция f будет принимать значение 0 на области 101 каждой ступеньки.

Фигура p_n может превратиться в $(3{\cdot}2^{n-3}{+}3)$-угольник, если функция f будет принимать значение 0 на области 110 или на области 001 каждой ступеньки.

Тем самым, каждая из базисных фигур представляет собой псевдовыпуклый многоугольник с не более чем $6 \cdot 2^{n-3} + 2$ углами.

Теорема 2 доказана.

5. Примеры согласованных множеств

Доказательство теоремы 3.

Пусть k, n — произвольные натуральные числа, такие, что $k < n$.

Рассмотрим множество $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, где p_i, $i = k+1, \ldots, n$, разбивают плоскость на 2^{n-k} частей и строятся по алгоритму, который был приведен ранее в доказательстве теоремы 2; p_i, $i = 1, \ldots, k$, — треугольники, для которых верно $p_1 \subset p_2 \subset \cdots \subset p_k \subset \bigcap_{j=k+1}^{n} p_j$.

Легко видеть, что $R(\mathcal{P}) = 2^{n-k} + k$ и, как было показано в доказательстве теоремы 2, каждая фигура $p_i \in \mathcal{P}$ имеет не более чем $\max(2^{n-2} + 3, 5 \cdot 2^{n-4})$ углов.

Отметим, что предикат $\overline{p}_1 \& \overline{p}_2 \& \cdots \& \overline{p}_k$ определяет дополнение к фигуре p_k и эта область делится фигурами $p_{k+1}, \ldots, p_n$ на 2^{n-k} частей. Отсюда сразу следует, что для любого булевого вектора вида $a = (0, \ldots, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ верно $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(a) = 1$. Предикат $\overline{p}_1 \& \cdots \& \overline{p}_s \& p_{s+1} \& \cdots \& p_n$, где $s < k$, определяет фигуру $p_{s+1} \setminus p_s$ и эта фигура не пуста. Следовательно, для любого булевого вектора a, у которого на первых s $(s < k)$ местах стоят 0, а на остальных стоят 1, выполнено $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(a) = 1$.

Обозначим через δ_j^i транспозицию, которая переставляет j-ый элемент с i-ым, здесь $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть $T_r^i = \{\delta_j^i : r \leqslant j \leqslant n\} \cup \{\delta_i^i\}$.

$Q_r = \{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_r : \sigma_i \in T_{r+1}^i, i = 1, 2, \ldots, r\}$ — множество перестановок, полученных произведением транспозиций. Это множество перестановок позволяет переставить первые r элементов с любыми из оставшихся, любо оставить любой из первых r элементов на месте. Понятно, что $|Q_r| = (n - r + 1)^r$. Заметим также, что множество Q_{r-1} содержит $(n - r + 1)^{r-1}$ элементов из множества Q_r. Поэтому $|Q_{r-1} \setminus Q_r| = (n - r + 2)^{r-1} - (n - r + 1)^{r-1}$. Обозначим $Q'_r = \{\pi^{-1} : \pi \in Q_r\}$.

Рассмотрим множество перестановок $M = \bigcup_{r=1}^{k} Q'_r$.

Поскольку $M = Q'_k \sqcup \bigsqcup_{r=1}^{k-1}(Q'_r \setminus Q'_{r+1})$, то

$$|M| = (n-k+1)^k + \Sigma_{r=1}^{k-1}((n-r+1)^r - (n-r)^r).$$

Осталось показать, что множество M согласовано с $\mathcal{P}$.

Возьмем произвольный вектор $a \in E^n$. Для того, чтобы множество перестановок M было согласовано с $\mathcal{P}$, должна существовать перестановка $\pi \in M$, для которой $\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(a) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(a)) = 1$.

Пусть количество нулей в a равно $s \geqslant k$. Необходимо найти перестановку π^{-1}, которая переводит a в набор, где первые k элементов являются нулями. Но по определению в Q_k такая перестановка есть, и, значит, $\pi \in M$.

Пусть количество нулей в a равно $s < k$. По определению в Q_s есть такая перестановка π^{-1}, которая переводит нули вектора a на первые s мест. Следовательно, $\pi \in M$ и $\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(a) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(a)) = 1$.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4.

Пусть $k_1, \ldots, k_r, n$ — произвольные натуральные числа, такие, что $\sum_{i=1}^{r} k_i \leqslant n$.

Если $A \subseteq E^k$, $B \subseteq E^m$, то обозначим

$$A \times B = \{(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m) \in E^{k+m} : \\ (a_1, \ldots, a_k) \in A, (b_1, \ldots, b_m) \in B\}.$$

Пусть $z_i^k = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in E_i^k$ и $Z_k = \{z_i^k : i \in \{0, 1, \ldots, k\}\} \subset E^k$, то есть $|Z_k| = k+1$ и для любого $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ верно $|Z_k \cap E_i^k| = 1$.

Пусть $F = Z_{k_1} \times Z_{k_2} \times \cdots \times Z_{k_r} \times E^{n - \Sigma_{i=1}^r k_i} \subset E^n$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, принимающая значение 1 в точности на наборах из множества F. Заметим, что $f(0, \ldots, 0) = f(1, \ldots, 1) = 1$.

С помощью алгоритма, приведенного в доказательстве теоремы 2, построим такое множество базисных фигур $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, что $\Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}} \equiv f$. Заметим, что $R(\mathcal{P}) = |F| = (k_1+1) \cdot \ldots \cdot (k_r+1) \cdot 2^{n - \sum_{i=1}^r k_i}$.

Пусть M множество всевозможных перестановок, которые меняют между собой отдельно первые k_1 элементов, отдельно следующие k_2 элементов и т. д., а последние $n - \Sigma_{i=1}^r k_i$ элементов оставляют на месте. Понятно, что $|M| = k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!$.

Покажем, что множества $\mathcal{P}$ и M согласованы.

Возьмем произвольный вектор $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E^n$. Пусть в векторе a на первых k_1 позициях стоят l_1 единиц, на позициях от k_1+1 до k_2 стоят l_2 единиц, и т. д., и наконец на позициях от $k_{r-1}+1$ до k_r стоят l_r единиц. Пусть $b = (a_{k_r+1}, \ldots, a_n)$. Рассмотрим вектор $z = z_{l_1}^{k_1} \ldots z_{l_r}^{k_r} b \in F$. Понятно, что в множестве M есть такая перестановка π, что перестановка π^{-1} переводит вектор a в вектор z. Поскольку $z \in F$, то $\Omega_\pi^{\mathcal{P}}(a) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\pi^{-1}(a)) = \Omega_\varepsilon^{\mathcal{P}}(z) = 1$. Следовательно, согласно утверждению 1 множества $\mathcal{P}$ и M согласованы.

Теорема 4 доказана.

Список литературы

[1] Рвачев В. Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов // ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 4. С. 765–767.

[2] Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. Киев: Наукова думка, 1974.

[3] Гасанов Э. Э., Шакиров А .А. О предикатной эквивалентности формул алгебры логики // Интеллектуальные системы. 1997. Т. 2, вып. 1-4. С. 231–248.

[4] Шакиров А. А. Логико-алгебраические способы описания геометрических фигур. / Канд. дисс. М., 1997.

[5] Шакиров А. А. О методах перехода от логического описания геометрических фигур к аналитическому // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3, вып. 1–2. С. 327–337.

[6] Шакиров А. А. К логическому описанию геометрических фигур // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, вып. 4. С. 1191–1197.

[7] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[8] Кудрявцев В. Б., Блохина Г. Н., Кнап Ж., Кудрявцев В. В. Алгебра логики. М.: Изд-во мех-мат МГУ, 2006.