Об одном семействе нейронов с ограниченной сложностью взаимной перестройки

А. П. Соколов

Введение

Пороговые функции алгебры логики являются математической моделью нейронов. Они представляют интерес благодаря своим универсальным вычислительным возможностям, а также благодаря возможности их обучения. Последнее свойство с успехом применяется на практике при решении плохоформализуемых задач.

В качестве средства задания пороговых функций в работе рассматриваются линейные формы вида $x_1w_1 + \ldots + x_nw_n - \sigma$ с целочисленными коэффициентами и свободным членом.

Исследуется сложность преобразования одной пороговой функции, заданной линейной формой, к другой, путем пошагового изменения коэффициентов линейной формы. В качестве меры сложности данного процесса принимается изменение коэффициента или свободного члена линейной формы на единицу. Данный процесс может интерпретироваться как процесс обучения нейрона с пороговой функцией активации.

Ранее, в работе [2], для характеризации сложности обучения в худшем случае исследовалась шенноновская функция $\rho(n)$. Она говорит о том, сколько минимально достаточно выполнить единичных модификаций исходной линейной формы от n переменных для задания желаемой пороговой функции. Было показано, что при стремлении n к бесконечности величина $\log_2 \rho(n)$ растет по порядку как $n \log_2 n$.

Естественным образом возникает вопрос о том, как ведет себя расстояние между пороговыми функциями в большинстве случаев.

В работе [3] был построен пример такого класса пороговых фукнций, что для почти всех функций из данного класса расстояние между ними «велико» (зависит экспоненциально от числа переменных). При этом, мощность данного класса в некотором смысле сопоставима с мощностью класса всех пороговых функций.

В настоящей работе приводится конструктивное построение такого класса пороговых фукнций, что расстояние между функциями из данного класса ограничено заранее заданной величиной, лежащей в диапазоне от $3 \cdot n$ до $3 \cdot 2^n$, где n — число переменных. При этом, мощность данного класса экспоненциально зависит от n.

1. Основные понятия, постановки и результаты

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ — счетный алфавит переменных. Каждое из переменных u_i может принимать значения из множества $E_2 = \{0, 1\}$. В дальнейшем во избежание употребления сложных индексов мы будем использовать для обозначения букв алфавита U метасимволы x_i с индексами или без них.

Введем определения линейной формы и пороговой функции.

Линейной формой назовем функцию вида

$$l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i - \sigma,$$

где w_i и σ суть целые числа при $i = 1, \ldots, n$.

Вектор $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ называют вектором весовых коэффициентов, а σ — порогом.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) : E_2^n \to E_2$, называется *пороговой*, если существует линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n - \sigma$ такая, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i w_i - \sigma \geqslant 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этом случае говорим, что *линейная форма* $l_{\vec{w},\sigma}$ *задает пороговую функцию* $f(x_1, \ldots, x_n)$, и записывается это так:

$$l_{\vec{w},\sigma} \to f(x_1, \ldots, x_n),$$

или просто $f_{\vec{w},\sigma}$.

Множество всех пороговых функций от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ обозначим T^n.

В связи с тем, что линейные формы с целочисленными коэффициентами и порогом позволяют задать любую пороговую функцию, далее в работе рассматриваются только такие линейные формы.

Введем понятие расстояния между линейными формами и пороговыми функциями.

Пусть $l_{\vec{w}',\sigma'}$ и $l_{\vec{w}'',\sigma''}$ — линейные формы от n переменных. Расстоянием между линейными формами $l_{\vec{w}',\sigma'}$ и $l_{\vec{w}'',\sigma''}$ назовем следующую величину

$$\rho\left(l_{\vec{w}',\sigma'}; l_{\vec{w}'',\sigma''}\right) = \left|\sigma' - \sigma''\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|w_i' - w_i''\right|.$$

Эту величину интерпретируем как необходимость сделать ρ последовательных единичных изменений компонент одной линейной формы, чтобы получить другую.

Расстоянием между пороговыми функциями $f'(x_1, \ldots, x_n)$ и $f''(x_1, \ldots, x_n)$ назовем величину

$$\rho\left(f'; f''\right) = \min_{\substack{l_{\vec{w}',\sigma'} \to f' \\ l_{\vec{w}'',\sigma''} \to f''}} \rho\left(l'; l''\right).$$

Здесь минимум берется по всем линейным формам $l_{\vec{w}',\sigma'}$ и $l_{\vec{w}'',\sigma''}$, задающим функции f' и f'', соответственно.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Если* $n+1 \leqslant c \leqslant 2^{\frac{n}{2}}$*, то существует класс* M *пороговых функций от* n *переменных, содержащий* $(c - n - 1) \cdot 2^{n-2}$ *элементов, такой что для всех* f', f'' *из* M *выполнено*

$$\rho\left(f', f''\right) \leqslant 3 \cdot c.$$

2. Доказательство теоремы 1

Введенные ранее пороговые функции будем также называть $(0,1)$-пороговыми функциями.

Введем понятие $(-1,1)$-пороговой функции.

Пусть $V = \{v_1, v_2 \ldots\}$ — счетный алфавит переменных, каждое из которых может принимать значения из множества $\bar{E}_2 = \{-1, 1\}$. Для обозначения букв алфавита V будем использовать метасимволы y_i с индексами или без них.

Функция $g\,(y_1, \ldots, y_n) \,:\, \bar{E}_2^n \to \bar{E}_2$ называется $(-1,1)$-*пороговой*, если существует линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}\,(y_1, \ldots, y_n) = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n - \sigma$ такая, что

$$g(y_1,\, \ldots, y_n) = \begin{cases} -1, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{n} y_i w_i - \sigma \geqslant 0; \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Множество $(-1,1)$-пороговых функций обозначим $\bar{T}^n$.

Для того, чтобы отличать $(0,1)$-пороговые и $(-1,1)$-пороговые функции, введем следующие обозначения: $f^{0,1}$ и $g^{-1,1}$. Иногда для $(0,1)$-пороговых функций верхний индекс будем опускать.

Сопоставим переменным алфавита U переменные алфавита V по следующему правилу: $\varphi\,(u_i) = v_i$, для всех i. Положим также

$$\varphi\,(0) = -1;$$
$$\varphi\,(1) = 1.$$

Определим изоморфизм множеств T^n и $\bar{T}^n$ следующим образом: каждой $(0,1)$-пороговой функции $f^{0,1}\,(x_1, \ldots, x_n)$ поставим в соответствие $(-1,1)$-пороговую функцию $g^{-1,1}\,(y_1, \ldots, y_n)$ следующим образом

$$\varphi\,(f\,(x_1, \ldots, x_n)) = g\,(\varphi\,(x_1)\,, \ldots, \varphi\,(x_n))\,.$$

Очевидно, что определенное соответствие является взаимно-однозначным. Далее, для краткости, соответствующие друг другу в терминах описанного изоморфизма функции f и g будем называть *изоморфными* и обозначать их $f^{0,1}$ и $f^{-1,1}$.

Следующее утверждение позволяет строить линейные формы, задающие изоморфные пороговые функции.

Теорема 2. *Имеют место следующие утверждения:*

1) если $l_{\vec{w},\sigma} \to f^{0,1}$ *и* $l_{\vec{w},2\sigma-\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} \to g^{-1,1}$, *то* $f^{0,1} \sim g^{-1,1}$;

2) если $l_{\vec{w},\sigma} \to g^{-1,1}$ *и* $l_{\vec{w},\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i+\sigma\right)} \to f^{0,1}$, *то* $g^{-1,1} \sim f^{0,1}$.

Доказательство. а) Рассмотрим набор $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$. Значение функции $f^{0,1}$ на этом наборе определяется знаком суммы

$$\varphi\left(a_1, \ldots, a_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i - \sigma.$$

При этом, значение функции $g^{-1,1}$ на наборе $(2a_1 - 1, \ldots, 2a_n - 1)$ определяется знаком суммы

$$\psi\left(a_1, \ldots, a_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(2a_i - 1\right) w_i - 2\sigma + \sum_{i=1}^{n} w_i = 2\sum_{i=1}^{n} a_i w_i - 2\sigma.$$

Очевидно, что знаки сумм $\varphi\left(a_1, \ldots, a_n\right)$ и $\psi\left(a_1, \ldots, a_n\right)$ совпадают, а, следовательно, функции $f^{0,1}$ и $g^{-1,1}$ изоморфны.

б) Рассмотрим набор $(b_1, \ldots, b_n) \in \{-1,1\}^n$. Значение функции $g^{-1,1}$ на наборе $(b_1, \ldots, b_n)$ определяется знаком следующей суммы

$$\varphi\left(b_1, \ldots, b_n\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i - \sigma.$$

Значение функции $f^{0,1}$ на наборе $\left(\frac{1}{2}\left(b_1 + 1\right), \ldots, \frac{1}{2}\left(b_n + 1\right)\right)$ определяется знаком суммы

$$\psi\left(b_1, \ldots, b_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(b_i + 1\right) w_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i + \sigma\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i w_i + \sum_{i=1}^{n} w_i - \sum_{i=1}^{n} w_i - \sigma\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i w_i - \sigma\right).$$

Очевидно, что знаки сумм $\varphi\left(b_1, \ldots, b_n\right)$ и $\psi\left(b_1, \ldots, b_n\right)$ совпадают, а, следовательно, функции $g^{-1,1}$ и $f^{0,1}$ изоморфны. Теорема доказана.

Назовем $(-1,1)$-пороговую функцию $f^{-1,1}(y_1,\ldots,y_n)$ *центральной*, если существует линейная форма

$$l_{\vec{w}}(y_1,\ldots,y_n) = y_1w_1 + \ldots + y_nw_n$$

такая, что

$$f^{-1,1}(y_1,\ldots,y_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{n} y_iw_i \geqslant 0; \\ -1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Иными словами, центральная $(-1,1)$-пороговая функция может быть задана линейной формой с нулевым порогом. В связи с этим будем говорить, что вектор $\vec{w}$ задает $f^{-1,1}$ и обозначать это так $\vec{w} \to f^{-1,1}$.

Набор $\vec{\alpha} = (a_1,\ldots,a_n) \in \{-1,1\}^n$ будем называть *узлом* центральной пороговой функции $f^{-1,1}$, если $f^{-1,1}(\vec{\alpha}) = f^{-1,1}(-\vec{\alpha})$.

Так как значение центральной пороговой функции определяется знаком скалярного произведения, то в узле $\vec{\alpha}$ выполнено равенство

$$\vec{w} \cdot \vec{\alpha} = 0.$$

Иными словами, всякий узел ортогонален вектору $\vec{w}$.

Лемма 1. *Если вектор $\vec{w}$ задает функцию $f^{-1,1}$, $\vec{\alpha}$ — узел $f^{-1,1}$, $\vec{h} = (h_1,\ldots,h_n) \in \{-1,0,1\}^n$ и*

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{h} = 0, \\ h_i = 0 \textit{ или } h_i = a_i, \end{cases}$$

тогда $\left(\vec{\alpha} - 2\vec{h}\right)$ — узел $f^{-1,1}$.

Доказательство. Так как $h_i = 0$ или $h_i = a_i$ и $a_i \in \{-1,1\}$ при $i = 1,\ldots,n$, то компоненты вектора $\left(\vec{\alpha} - 2\vec{h}\right)$ принимают значения из множества $\{-1,1\}$. Осталось заметить, что

$$\left(\vec{\alpha} - 2\vec{h}\right) \cdot \vec{w} = \vec{\alpha} \cdot \vec{w} - 2\vec{h} \cdot \vec{w} = 0.$$

Лемма доказана.

Оказывется, вектор $\vec{h}$ ортогонален любому вектору $\vec{w}'$, задающему $f^{-1,1}$.

Лемма 2. *Если векторы $\vec{w}'$ и $\vec{w}''$ задают функцию $f^{-1,1}$ и $\vec{\alpha}$ — узел $f^{-1,1}$, соответственно, $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$ и*

$$\begin{cases} \vec{w}' \cdot \vec{h} = 0, \\ h_i = 0 \text{ или } h_i = a_i, \end{cases}$$

тогда $\vec{w}'' \cdot \vec{h} = 0$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что $\left(\vec{\alpha} - 2\vec{h}\right)$ — узел $f^{-1,1}$. Следовательно,

$$f^{-1,1}\left(\vec{\alpha} - 2\vec{h}\right) = f^{-1,1}\left(-\vec{\alpha} + 2\vec{h}\right) = 1.$$

В таком случае $\left(\vec{\alpha} - 2\vec{h}\right) \cdot \vec{w}'' = 0$.

Так как $\vec{\alpha}$ — узел, то $\vec{\alpha} \cdot \vec{w}''$. В итоге получаем

$$2\vec{h} \cdot \vec{w}'' = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть вектор $\vec{w}$ задает функцию $f^{-1,1}$ и $\vec{\alpha}$ — узел $f^{-1,1}$. Рассмотрим множество

$$H\left(f^{-1,1}, \vec{\alpha}\right) = \left\{\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_m\right\},$$

где вектора $\vec{h}_i$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{h}_i = 0, \\ w_{ij} = 0 \text{ или } w_{ij} = a_i, \end{cases}$$

при всех $i = 1 \ldots m$ и $j = 1 \ldots n$.

Обозначим $U\left(f^{-1,1}\right)$ множество всех векторов $\vec{w}$, задающих $f^{-1,1}$.

Отметим следующее свойство множества $H\left(f^{-1,1}, \vec{\alpha}\right)$.

Лемма 3. *Если $\vec{h} \in H\left(f^{-1,1}, \vec{\alpha}\right)$ и $\vec{w} \in U\left(f^{-1,1}\right)$, то $\vec{h} \cdot \vec{w} = 0$.*

Доказательство. Утверждение очевидным образом следует из леммы 2.

Таким образом, множества $H\left(f^{-1,1}, \vec{\alpha}\right)$ и $U(f^{-1,1})$ ортогональны.

Введем следующую меру сложности линейной формы

$$\mu\left(l_{\vec{w},\sigma}\right)=\sum_{i=1}^{n}|w_i|+|\sigma|\,.$$

Будем называть данную характеристику *весом линейной формы* $l_{\vec{w},\sigma}$.

Назовем $l_{\vec{w},\sigma}$ минимальной линейной формой, задающей $f^{0,1}$, если ее вес минимален среди всех линейных форм, задающих $f^{0,1}$. Аналогичным образом вводится понятие минимальной линейной формы, задающей $f^{-1,1}$.

Весом пороговой функции $f^{0,1}$ назовем вес минимальной линейной формы, задающей данную функцию. Вес пороговой функции обозначим $\mu\left(f^{0,1}\right)$. Аналогичным образом вводим понятие веса $(-1,1)$-пороговой функции $f^{-1,1}$ и обозначаем его $\mu\left(f^{-1,1}\right)$.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. *Если $f^{-1,1}(x_1,\ldots,x_n)$ центральная $(-1,1)$-пороговая функция, и при натуральном k выполнено $\mu\left(f^{-1,1}\right)=2k$, тогда*

$$\mu\left(f^{0,1}\right)\leqslant\frac{3}{2}\mu\left(f^{-1,1}\right).$$

Следующее утверждение позволяет строить центральные пороговые функции заданного веса.

Лемма 5. *Если вектор $\vec{w}$ задает функцию $f^{-1,1}$, $\vec{\alpha}$ — узел $f^{-1,1}$, $H\left(f^{-1,1},\vec{\alpha}\right)$ содержит $n-1$ линейно независимых векторов и для некоторого $i\in\{1,\ldots,n\}$ выполнено $w_i=1$, то $\vec{w}$ обладает минимальным весом.*

Доказательство. Так как $H\left(f^{-1,1},\vec{\alpha}\right)$ содержит $n-1$ линейно независимых векторов, то размерность линейной оболочки множества $H\left(f^{-1,1},\vec{\alpha}\right)$ равна $n-1$. При этом, по лемме 3 множества $H\left(f^{-1,1},\vec{\alpha}\right)$ и $U(f^{-1,1})$ ортогональны. Следовательно, размерность множества $U(f^{-1,1})$ равна 1. Фактически, множество $U(f^{-1,1})$ представляет собой луч. Так как $w_i=1$ для некоторого i, то множество $U(f^{-1,1})$ состоит из всевозможных векторов вида $c\cdot\vec{w}$, где c — натуральное. В таком случае, очевидно, что $\vec{w}$ обладает минимальным весом. Лемма доказана.

Булеву функцию называют *существенной*, если она существенно зависит от всех своих переменных. Множество всех существенных пороговых функций от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ обозначим $\widetilde{T}^n$.

Следующее утверждение позволяет строить существенные центральные пороговые функции с заранее заданным весом.

Лемма 6. *Если n и c четные, $n \leqslant c \leqslant 2^{\frac{n}{2}}$, тогда найдется существенная центральная $(-1,1)$-пороговая функция $f^{-1,1}$ такая, что $\mu\left(f^{-1,1}\right) = c$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения построим вектор $\vec{w}$, удовлетворяющий условиям леммы 2, такой что $\mu(\vec{w}) = c$.

Пусть вектор $\vec{w}$ имеет вид

$$\vec{w} = \left(w_1, \ldots, w_{\frac{n}{2}}, w_1, \ldots, w_{\frac{n}{2}}\right)$$

и задает центральную пороговую функцию $f^{-1,1}$.

Рассмотрим набор

$$\vec{\alpha} = \left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n/2}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n/2}\right).$$

Очевидно, что $\vec{\alpha}$ — узел функции $f^{-1,1}$.

Определим значения компонент $w_1, \ldots, w_{\frac{n}{2}}$ вектора $\vec{w}$ как результат выполнения описанной ниже процедуры.

1. Сначала положим $w_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$.

2. Если $\mu(\vec{w}) < c$, то увеличим на 1 компоненту w_i с как можно меньшим номером i так, чтобы выполнялось требование

$$\begin{cases} w_1 = 1, \\ w_i \leqslant 2^{i-2}, \ i = 2, \ldots, \frac{n}{2}. \end{cases}$$

3. Повторяем 2-й шаг до тех пор, пока не будет выполнено равенство $\mu(\vec{w}) = c$.

Так как c четное и $n \leqslant c \leqslant 2^{\frac{n}{2}}$, то описанная процедура завершится за конечное число шагов.

Теперь построим множество $H\left(f^{-1,1},\vec{\alpha}\right)$ мощности $n-1$ так, чтобы все составляющие его вектора были линейно независимы. Представим множество $H\left(f^{-1,1},\vec{\alpha}\right)$ в виде матрицы H, где строки матрицы соответствуют векторам h_i, составляющим $H\left(f^{-1,1},\vec{\alpha}\right)$. Определим матрицу H следующим образом

$$H=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
\multicolumn{5}{c|}{\overbrace{\hphantom{q_{n/2-1,1}\quad q_{n/2-1,2}\quad \dots \quad q_{n/2-1,n/2-1}\quad 0}}^{n/2}} & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{-1\quad 0\quad 0\quad \dots\quad 0}}^{n/2}}\\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1\\
\hline
q_{1,1} & 0 & & & & 0 & -1 & & & \\
q_{2,1} & q_{2,2} & 0 & & & & 0 & -1 & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & & & \dots & \dots & \\
q_{n/2-1,1} & q_{n/2-1,2} & \dots & q_{n/2-1,n/2-1} & 0 & & & & 0 & -1
\end{array}\right)$$

Коэффициенты $q_{i,1},\dots,q_{i,i}$ для всех $i=1,\dots,\frac{n}{2}-1$ принимают значения 0 или 1 и определяются из следующего уравнения

$$\sum_{j=1}^{i} q_{i,j}\cdot w_j = w_{i+\frac{n}{2}+1} = w_i.$$

Обоснуем почему данное уравнение всегда имеет решение.

Возможны два случая: либо $w_{i+\frac{n}{2}+1}=2^{i-2}$, либо $w_{i+\frac{n}{2}+1}<2^{i-2}$.

В первом случае решением уравнения будут коэффициенты $q_{i,j}=1$, $j=1\dots i$.

Во втором случае положим коэффициенты $q_{i,j}$ равными двоичным разрядами числа w_i.

Линейная независимость первых $\frac{n}{2}$ строк и последних $\frac{n}{2}-1$ строк очевидна.

Покажем, что никакая строка из второй группы не может быть выражена в виде линейной комбинации строк из первой группы. Предположим противное, пусть строка $h_{\frac{n}{2}+i}$ линейно выражается через первые $\frac{n}{2}$ строк. В таком случае

$$h_{\frac{n}{2}+i}=h_{i+1}$$

благодаря единичным компонентам в правой части матрицы H. Пришли к противоречию.

Таким образом, функция $f^{-1,1}$, узел $\vec{\alpha}$, вектор $\vec{w}$ и множество $H\left(f^{-1,1}, \vec{\alpha}\right)$ удовлетворяют требованиям леммы 2, а, следовательно,

$$\mu\left(f^{-1,1}\right) = \mu\left(\vec{w}\right) = c.$$

Осталось показать, что $f^{-1,1}$ существенно зависит от всех своих переменных.

Пусть $\vec{w}$ задает $f^{-1,1}$. Так как вектор

$$\vec{\alpha} = \left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n/2}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n/2}\right)$$

является узлом функции $f^{-1,1}$, то $\vec{w} \cdot \vec{\alpha} = 0$ и $f^{-1,1}\left(\vec{\alpha}\right) = 1$.

Рассмотрим вектор

$$\vec{\alpha}' = \left(\underbrace{-1, 1, \ldots, 1}_{n/2}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n/2}\right)$$

соседний с $\vec{\alpha}$ по первой компоненте. При этом, очевидно, $\vec{w} \cdot \vec{\alpha}' < 0$, а, следовательно, $f\left(\vec{\alpha}'\right) = -1$. Это доказывает существенность первой переменной. В силу симметрии остальные переменные также являются существенными. Лемма доказана.

Пусть $\delta = (d_1, \ldots, d_n)$, где $d_i \in \{0, 1\}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Назовем δ-преобразованием оператор, определенный на множестве T^n и принимающий значения на нем же. Этот оператор записывается так

$$\delta\left[f_{\vec{w},\sigma}\right](x_1, \ldots, x_n) = f_{\vec{w}',\sigma'}(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$\begin{array}{l} w_i' = w_i, \text{ если } d_i = 1, \\ w_i' = -w_i, \text{ иначе}, \\ \sigma' = \sigma + \sum\limits_{i=1}^{n} (d_i - 1)\, w_i, \end{array}$$

при $i = 1 \ldots n$.

Полученную таким образом пороговую функцию $\delta\left[f_{\vec{w},\sigma}\right]$ будем называть δ-симметричной к f. Понятие δ-симметричности естественным образом обобщается на множества функций: два множества пороговых функций A и B назовем δ-симметричными, если для каждой функции из A найдется δ-симметричная ей функция из B и, наоборот, для каждой функции из B найдется δ-симметричная ей функция из A. Обозначается это так: $B = \delta\left[A\right]$.

Сигнатурой линейной формы $l_{\vec{w},\sigma} = x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n - \sigma$ называем вектор $s\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = (s_1, \ldots, s_n)$, такой что:

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } w_i > 0; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

для $i = 1, \ldots, n$.

Имеет место следующая теорема, доказанная в работе [2].

Теорема 3. *Если $l_{\vec{w},\sigma}$ и $l_{\vec{w}',\sigma'}$ задают существенную пороговую функцию f, то $s\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = s\left(l_{\vec{w}',\sigma'}\right)$.*

Из теоремы 3 следует, что сигнатура линейной формы существенной пороговой функции f однозначно определяется этой функцией, что обозначаем $s\left(f\right)$.

Напомним следующий результат работы [2].

Теорема 4 (о сигнатурах). *Отношение равенства сигнатур разбивает множество $\widetilde{T}^n$ на 2^n взаимно симметричных равномощных множества, одним из которых является множество монотонных существенных пороговых функций от n переменных.*

Таким образом, применяя все возможные δ-преобразования к существенной пороговой функции, мы получим 2^n взаимно симметричные пороговые функции.

Следующая лемма доказывает существование экспоненциального класса пороговых функций, удаленных друг от друга не более, чем на заданное расстояние.

Лемма 7. *Если n и c четные и $n \leqslant c \leqslant 2^{\frac{n}{2}}$, тогда существует класс M пороговых функций от n переменных, содержащий $(c-n)\cdot 2^{n-1}$ элементов, такой что для всех $f_i^{0,1}, f_j^{0,1}$ из M выполнено*

$$\rho\left(f_i^{0,1}, f_j^{0,1}\right) \leqslant 3c.$$

Доказательство. Если n и d удовлетворяют условиям леммы 6, тогда в таком случае в нашем распоряжении есть монотонная функция $f^{-1,1}$ такая, что

$$\mu\left(f^{-1,1}\right) = d,$$

и, при этом, $\mu\left(f^{-1,1}\right)$ — четное.

По лемме 6 функция $f^{-1,1}$ является существенной. Тогда по лемме 4

$$\mu\left(f^{0,1}\right) \leqslant \frac{3}{2}d,$$

и $f^{0,1}$ также является монотонной и существенной.

Пусть M_d — множество функций, получающихся из $f^{0,1}$ применением всех возможных δ-преобразований. Так как $f^{0,1}$ существенная, то по теореме 3 все полученные таким образом функции различны. Поэтому мощность M_d равна 2^n.

Заметим также, что вес всякой δ-симметричной к $f^{0,1}$ пороговой функции не может превышать $\frac{3}{2}d$. А стало быть расстояние между произвольными δ-симметричными к $f^{0,1}$ пороговыми функциями не превосходит $3d$.

Зададим класс M как объединение классов M_d при всех возможных четных d в диапазоне от n до c. В таком случае мощность M равна $(c-n) \cdot 2^{n-1}$. Лемма доказана.

Обобщая лемму 7 на случай n и c произвольной четности, получаем теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы достаточно при построении класса M из леммы 7 заменить c на $c-1$ и добавить в функцию f одну несущественную переменную. Теорема доказана.

Благодарности

Я благодарю своего научного руководителя Валерия Борисовича Кудрявцева, а также Анатолия Александовича Часовских за ценные советы и обсуждения, возникавшие в процессе работы.

Список литературы

[1] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2000.

[2] Соколов А. П. О конструктивной характеризации пороговых функций // Интеллектуальные системы. Т. 12, вып. 1–4. 2008. С. 363-388.

[3] Соколов А. П. О сложности обучения в одном классе нейронов. М.: МГУ, 2009.