Комбинаторная формула числа пороговых функций

М. В. Носов

Пусть F пороговая функция от n переменных. Известно, что её можно задать функцией $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_0, \\
a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}, \\
|a_i| \leqslant P, i = 1, \ldots, n, \\
P \geqslant (n+1)^{\frac{n+1}{2}}, P \in \mathbf{N}.
\end{gathered}
$$

Очевидно, тогда F можно задать функцией

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 2a_1 x_1 + \ldots + 2a_n x_n + 2a_0 + 1,$$

при этом разделяющая гиперплоскость не проходит через вершины куба. Аналогично, функция G пороговая и

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 2b_1 x_1 + \ldots + 2b_n x_n + 2b_0 + 1$$

с теми же условиями на коэффициенты. Если $\alpha \in E_2^n$, то

$$
\begin{gathered}
F(\alpha) = G(\alpha) \Longleftrightarrow f(\alpha) g(\alpha) \geqslant 1, \\
F(\alpha) \neq G(\alpha) \Longleftrightarrow f(\alpha) g(\alpha) \leqslant -1.
\end{gathered}
$$

Значит

$$F(\alpha) = G(\alpha) \Longleftrightarrow \prod_{j=0}^{2K} \left(f(\alpha)g(\alpha) - j\right) = 0,$$

$$F(\alpha) \neq G(\alpha) \Longleftrightarrow \prod_{j=0}^{2K} \left(f(\alpha)g(\alpha) - j\right) \leqslant -1,$$

$$K \geqslant \frac{1}{2}(2(n+1)P+1)^2, K \in \mathbf{N}.$$

Пусть

$$\varepsilon = \sum_{\alpha \in E_2^n} \prod_{j=0}^{2K} \left(f(\alpha)g(\alpha) - j\right),$$

если F и G равны, то $\varepsilon = 0$, если F и G разные, то $\varepsilon \leqslant -1$. Пусть

$$\delta = \frac{1}{M!} \prod_{m=1}^{M} \left(\left(\sum_{\alpha \in E_2^n} \prod_{j=0}^{2K} \left(f(\alpha)g(\alpha) - j\right) \right) + m \right),$$

$$M \geqslant 2^n (4K)^{2K+1}, M \in \mathbf{N},$$

если F и G равны, то $\delta = 1$, если F и G разные, то $\delta = 0$. Получаем результат.

Теорема 1. *Число пороговых функций от n переменных задается формулой*

$$N_n = \sum_{\substack{a_0,\ldots,a_n,\\ a_i \in Z, |a_i| \leqslant P}} \left(\sum_{\substack{b_0,\ldots,b_n,\\ b_i \in Z, |b_i| \leqslant P}} \frac{1}{M!} \prod_{m=1}^{M} \left(\left(\sum_{\alpha \in E_2^n} \prod_{j=0}^{2K} (f(\alpha)g(\alpha) - j) \right) + m \right) \right)^{-1},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$f(\alpha) = 2a_1\alpha_1 + \ldots + 2a_n\alpha_n + 2a_0 + 1,$$

$$g(\alpha) = 2b_1\alpha_1 + \ldots + 2b_n\alpha_n + 2b_0 + 1,$$

где P, K, M — натуральные числа, удовлетворяющие условиям

$$P \geqslant (n+1)^{\frac{n+1}{2}}, K \geqslant \frac{1}{2}(2(n+1)P+1)^2, M \geqslant 2^n(4K)^{2K+1}.$$