О переводимости состояний автоматной модели легких в чистой среде

Ю. Г. Гераськина

Введение

В предлагаемой работе продолжается изучение механизма транспортировки вещества по легким, начатое в работах [2]–[5]. В процессе транспортировки вещества вниз последнее распределяется по легким, начиная с верхних его слоев, послойно по бронхам пропорционально их емкости. В процессе транспортировки вещества вверх легкие самоочищаются как от внутреннего секрета, так и от поступающего извне вещества. В работе [3] предложена автоматная модель для описания функционирования механизма транспортировки вещества по легким (автоматная модель транспортировки — АМТ).

В работах [2]–[5] рассмотрен случай функционирования АМТ в чистой среде. Для соответствующего автономного автомата оценены число состояний в нем и диаметр его диаграммы Мура. Описаны стартовые состояния и найдено их число. Найдено время полного самоочищения.

В этой работе продолжается рассмотрение случая функционирования АМТ в чистой среде и решаются задачи нахождения средней глубины диаграммы, нахождения критерия перехода одного состояния в другое и оценки времени такого перехода.

Основные определения, постановки задач и результаты

Легкие представляются полным дихотомическим ориентированным к корню деревом, которое называется *I-деревом* и обозначается D^{-1}, со следующими параметрами.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ и l, $l \in \mathbb{N}$, считается глубиной этого I-дерева. Считается, что ребро I-дерева D^{-1}, инцидентное корню, имеет глубину 1.

Каждое ребро из D^{-1} разделено на n, $n \in \mathbb{N}$, равных частей, называемых *ресничками*, и занумерованных числами i, $i \in \mathbb{N}_n$, возрастающими в направлении, обратном ориентации ребра.

Каждому ребру глубины j, $j \in \mathbb{N}_l$, приписывается два числа $2^{l-j}b$ и $2^{l-j}r$, где $b, r \in \mathbb{N}$ и $r \leqslant b$, называемых *емкостью* и *мерой переброса* ресничек ребер глубины j, соответственно.

Такое I-дерево D^{-1} с описанными выше параметрами b, r, n и l обозначается $D^{-1}(b, r, n, l)$.

С этим I-деревом связывается некоторый процесс, который называется *процессом транспортировки* вещества по I-дереву $D^{-1}(b, r, n, l)$. Он обусловлен рядом допущений.

Считается, что в $D^{-1}(b, r, n, l)$ заданы распределения нагрузок по всем ресничкам, учитывая, что нагрузка может быть нулевой. Пусть V' — суммарная нагрузка по всем ресничкам, а V — максимально возможная суммарная нагрузка по всем ресничкам. V назовем *объемом I-дерева (легких)*, а V' — *исходным объемом загруженности I-дерева.*

I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l)$ с исходным объемом загруженности V' обозначается $D^{-1}(b, r, n, l; V')$.

Каждая ресничка осуществляет прием вещества извне и переброс своей нагрузки на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра.

Прием ресничкой вещества, имеющего массу d, $d \in \mathbb{N}_0$ и $d \leqslant V - V'$, из внешней среды внутри ребра уровня j, $j \in \mathbb{N}_l$, осуществляется по следующему правилу (для этого правила ориентация считается обратной к заданной).

А$_1$) Если нагрузка реснички равна ее емкости, то прием вещества не осуществляется.

Б$_1$) При нагрузке d_1, меньшей емкости первой с такой назрузкой реснички, она осуществляет прием вещества максимально возможной массы d_2, такой что $d_2 \leqslant \min(2^{l-j}b - d_1, d)$, где $2^{l-j}b$ — емкость этой реснички.

В$_1$) Следующая за ресничкой из Б$_1$) принимает массу d_3, как и в Б$_1$), с заменой там d на $d - d_2$.

Г$_1$) Оставшаяся масса вещества опускается до следующей реснички с большим номером в ребре, для которой не выполняется условие А$_1$). Она осуществляет прием вещества по правилу В$_1$) или Б$_1$).

Д$_1$) Если ресничка в рассматриваемом ребре является последней, не удовлетворяющей условию А$_1$), то оставшаяся масса вещества делится пополам (если число нечетное, то та из частей, которая на единицу больше другой, опускается на левое ребро, при условии, что реснички поддерева, инцидентного этому ребру, могут принять это вещество, в противном случае оставшееся вещество передается правому ребру); и каждая из частей вещества воспринимается соответствующими ребрами, как описано выше.

Е$_1$) Процесс, описываемый позициями А$_1$)–Д$_1$), начинается с ребра, которое инцидентно корню.

Переброс ресничкой вещества осуществляется на соседнюю ресничку с меньшим номером внутри ребра уровня j, $j \in \mathbb{N}_l$, по такому правилу.

А$_2$) Если следующая ресничка имеет не нулевую нагрузку, то переброс с реснички не осуществляется.

Б$_2$) Если нагрузка реснички не превосходит ее меры переброса $2^{l-j}r$ и не выполнено условие А$_2$), то перебрасывается на следующую вся нагрузка реснички и считается, что ее нагрузка становится равной нулю.

В$_2$) Если на ресничке нагрузка m и $m > 2^{l-j}r$, то она перебрасывает на следующую ресничку нагрузку $2^{l-j}r$ и оставляет у себя нагрузку $m - 2^{l-j}r$.

Если ресничка в ребре последняя, то переброс нагрузки осуществляется по правилам А$_2$), Б$_2$), В$_2$).

Γ_2) Если ребро инцидентно корню, то переброс с наименьшей по номеру реснички осуществляется в среду по правилам Б$_2$) и В$_2$) в предположении, что среда играет роль реснички с нулевой нагрузкой.

Д$_2$) Если ребро не инцидентно корню, то есть его вершина инцидентна следующему ребру, то нагрузка с наименьшей по номеру реснички этого ребра передается наибольшей по номеру ресничке другого ребра по правилам А$_2$), Б$_2$), В$_2$).

Считается, что процесс транспортировки вещества по I-дереву $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ осуществляется в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$

В первый момент I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ имеет заданное распределение нагрузок по его ресничкам.

Ко второму моменту осуществляется прием вещества массой $d(1)$ по правилам А$_1$)–Е$_1$), и затем осуществляется переброс нагрузок с реснички на ресничку во всем I-дереве или выброс в среду в соответствии с правилами А$_2$), Б$_2$), В$_2$), Γ_2), Д$_2$). А если подается масса d, не превосходящая объема I-дерева, то та ее часть, которая не осела на ресничках, выбрасывается в среду.

Если в каждый момент $t = 1, 2, 3, \ldots$ все реснички I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ осуществляют прием вещества нулевой массы, то такой процесс называется *процессом транспортировки* вещества по этому I-дереву *в чистой среде*. При наступлении момента t, в который все реснички I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ впервые стали равными нулю, считается, что произошло *полное самоочищение* этого I-дерева.

Под распределением нагрузки V' I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ понимается любое из возможных распределений нагрузок всех его ресничек таких, что суммарный объем их нагрузок равен V'. Ясно, что $V' \leqslant V$, где V — объем I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ и $V = 2^{l-1}bnl$. Такие распределения называются *конфигурациями* нагрузки V' по ресничкам I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$.

Занумеруем все реснички I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ таким образом, что ресничка с номером ijk является k-ой ресничкой j-го ребра глубины i, где $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, а нумерация ребер одной глубины идет слева направо. Тогда в каждый момент t конфигурацию нагрузки $V'(t)$ в I-дереве $D^{-1}(b, r, n, l)$ можно задать набором

$$q(t) = (q_{111}(t), q_{112}(t), \ldots, q_{ijk}(t), \ldots, q_{l2^{l-1}n}(t))\,,$$

в котором каждая координата $q_{ijk}(t)$ равна нагрузке реснички с номером ijk в момент t, причем $0 \leqslant q_{ijk}(t) \leqslant 2^{l-i}b$ и $\sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}(t) = V'(t)$.

Пусть в процессе транспортировки конфигурации нагрузки $V'(t)$ в каждый момент t изменяются по правилам $A_2)-Д_2)$. Тогда процесс транспортировки можно представить некоторым конечным автономным автоматом $A(b, r, n, l)$ с одним финальным состоянием [3]. Состояниями этого автомата являются конфигурации нагрузок $V'(t)$ в I-дереве $D^{-1}(b, r, n, l)$, которые называются также состояниями этого I-дерева, а законы перехода из одного состояния в другое считаются указанными выше.

Заметим, что диаграмма Мура автомата $A(b, r, n, l)$ является ориентированным к корню q^* деревом. В состояние q^*, которое называется *финальным*, переходят все остальные состояния. Финальному состоянию соответствует такая конфигурация дерева легких, при которой нагрузки всех ресничек I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равны нулю.

Возникает вопрос, как по двум данным конфигурациям I-дерева понять, существует ли в диаграмме Мура ориентированный путь между состояниями, соответствующими данным двум конфигурациям, и если существует, то какова длина этого пути? То есть нашей задачей является нахождение критерия переводимости состояний диаграммы Мура в терминах свойств конфигураций дерева легких.

Пусть I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l)$ находится в состоянии q. Тогда через $q(t)$ обозначено состояние этого I-дерева в момент t, полагая, что в первый момент оно находится в состоянии q, то есть $q(1) = q$.

Состояние q^1 I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ *переводимо* в состояние q^2 этого I-дерева, если для некоторого t, такого что $t > 1$, будет выполнено $q^1(t) = q^2$. Очевидно, такое t единственное.

В состоянии q ресничка с номером ijk I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ при $q_{ijk} > 0$ называется *характеристической ресничкой* этого состояния, если для любой другой реснички с номером $i'j'k'$ со свойством $q_{i'j'k'} > 0$ справедливо $i' \geqslant i$ и при $i' = i$ выполнено $k' > k$.

Пусть состояние q I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ имеет s характеристических ресничек с номерами $i_1j_1k_1, i_2j_2k_2, \ldots, i_sj_sk_s$, где $s \in \mathbb{N}$. Из определения характеристических ресничек вытекает, что $i_1 = i_2 = \cdots = i_s$ и $k_1 = k_2 = \cdots = k_s$, то есть все характеристические реснички состояния q принадлежат ребрам j_1, j_2, $\ldots$, j_s одной и той же глубины I-дерева, которая обозначена через i, и имеют один и тот же номер внутри ребер этой глубины, который обозначен через k. Следовательно, множество характеристических ресничек состояния q можно задать их номерами следующим образом: $\{ij_1k, ij_2k, \ldots, ij_sk\}$, где $s \in \mathbb{N}_{2^{i-1}}$. Множество ребер, которым принадлежат характеристические реснички состояния q обозначено $\mathcal{J}_s$, то есть $\mathcal{J}_s = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$, а множество характеристических ресничек состояния q обозначено $\mathcal{N}_q(i, k, \mathcal{J}_s)$.

Величина $V_{q(t)}$, равная $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{2^{l-i}} \sum_{k=1}^{n} q_{ijk}(t)$, называется *объемом состояния* $q(t)$.

Очевидно, что состояние меньшего объема не переводимо в состояние большего объема. Поэтому будем рассматривать задачу о переводимости состояний q^1 в q^2 из $Q(b, n, l)$ в случае, когда $V_{q^1} \geqslant V_{q^2}$.

Задача о переводимости состояний q^1 в q^2 в случае, когда $V_{q^1} = 0$ и $V_{q^2} = 0$, тривиальна, так как q^1 и q^2 равны и совпадают с финальным состоянием q^*, которое переводимо в себя за любое время.

В случае, когда $V_{q^1} > 0$ и $V_{q^2} = 0$, задача о переводимости этих состояний легко решается. В этом случае $q^2 = q^*$, и, очевидно, q^1 переводимо в q^2.

Далее будем решать задачу о переводимости состояния q^1 в состояние q^2 в случае, когда $V_{q^1} > 0$ и $V_{q^2} > 0$.

Теорема 1. *Если* $\{q^1, q^2\} \subseteq Q(b, n, l)$, $q^2 \notin St(b, r, n, l)$, $V_{q^1} = V_{q^2}$, $V_{q^1} > 0$, $V_{q^2} > 0$, $\mathcal{N}_{q^1}(i_1, k_1, \mathcal{J}_{s_1})$ *и* $\mathcal{N}_{q^2}(i_2, k_2, \mathcal{J}_{s_2})$ *— множества характеристических ресничек состояний* q^1 *и* q^2*, соответственно, то* q^1 *переводимо в* q^2 *точно тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) $i_1 \geqslant i_2$ *и при* $i_1 = i_2$ *имеет место* $k_1 > k_2$,

б) $q^1((i_1 - i_2)n + k_1 - k_2 + 1) = q^2$.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что если q^1 переводимо в q^2, то должны выполняться условия а) и б), то есть докажем необходимость.

Начнем с условия а). Заметим, что при равных объемах состояний q^1 и q^2 расстояние (по числу ресничек) от корня I-дерева (то есть от реснички с номером 111) до характеристических ресничек состояния q^1 должно быть не меньше того же расстояния до характеристических ресничек состояния q^2, то есть должно иметь место $i_1 \geqslant i_2$, а при $i_1 = i_2$ должно выполняться $k_1 > k_2$. В противном случае будет иметь место одна из следующих ситуаций:

1) при всех $t > 1$ будет выполнено $\mathcal{N}_{q^1(t)}(i'_t, k'_t, \mathcal{J}_{s'_t}) \neq \mathcal{N}_{q^2}(i_2, k_2, \mathcal{J}_{s_2})$,

2) найдется t', такое что $\mathcal{N}_{q^1(t')}(i_{t'}, k_{t'}, \mathcal{J}_{s_{t'}}) = \mathcal{N}_{q^2}(i_2, k_2, \mathcal{J}_{s_2})$, но при этом будет выполнено $V_{q^1(t')} < V_{q^2}$.

Из выше описанного следует выполнение условия а).

Рассмотрим условие б). Так как q^1 переводимо в q^2, то существует такой момент t', в который множества характеристических ресничек состояний $q^1(t')$ и q^2 совпадут. Так как на каждом ребре I-дерева находится n ресничек, то легко видеть, что $t' = (i_1 - i_2)n + k_1 - k_2 + 1$. При этом будет справедливо равенство $q^1(t') = q^2$. Таким образом, должно быть выполнено условие б).

Если выполнены условия а) и б), то легко видеть, что q^1 переводимо в q^2. Таким образом, достаточность очевидна. Теорема доказана.

Замечание к теореме 1. Если $\{q^1, q^2\} \subseteq Q(b, n, l)$, $q^2 \notin St(b, r, n, l)$, $V_{q^1} = V_{q^2}$, $V_{q^1} > 0$, $V_{q^2} > 0$, то для решения задачи о переводимости q^1 в q^2 предлагается следующая процедура:

1) Найти множества $\mathcal{N}_{q^1}(i_1, k_1, \mathcal{J}_{s_1})$ и $\mathcal{N}_{q^2}(i_2, k_2, \mathcal{J}_{s_2})$.
2) Проверить выполнение условия а) теоремы 1 для найденных множеств.
   Если это условие не выполняется, то заключаем, что q^1 не переводимо в q^2.
3) Вычислить $q^1((i_1 - i_2)n + k_1 - k_2 + 1)$.
4) Проверить выполнение условия б) теоремы 1.
   Если это условие не выполняется, то заключаем, что q^1 не переводимо в q^2, а если выполняется, то заключаем, что q^1 переводимо в q^2. При этом получаем, что время перехода q^1 в q^2 равно $(i_1 - i_2)n + k_1 - k_2$.

Теорема 1 решает задачу о переводимости двух любых состояний q^1 в q^2 из $Q(b,n,l)$ в случае, когда объемы этих состояний равны. Рассмотрим теперь ту же задачу в случае, когда объемы этих состояний различны, то есть $V_{q^1} > V_{q^2}$.

Главная идея решения этой задачи заключается в том, чтобы найти момент $\tilde{t} = \tilde{t}(q^1, q^2)$, такой что $V_{q^1(\tilde{t}-1)} > V_{q^2}$ и $V_{q^1(\tilde{t})} \leqslant V_{q^2}$. Если в момент $\tilde{t}$ будет выполнено $V_{q^1(\tilde{t})} = V_{q^2}$, то затем пользуемся теоремой 1 для решения нашей задачи. Если же в момент $\tilde{t}$ выполняется $V_{q^1(\tilde{t})} < V_{q^2}$, то заключаем, что q^1 не переводимо в q^2.

Вычислим $\tilde{t}(q^1, q^2)$.

Для этого в процессе транспортировки вещества, начинающегося из состояния q^1, будем отслеживать те моменты t_1, t_2, $\ldots$, t_v, в каждый из которых происходит выброс вещества в среду, где количество таких моментов, то есть величина v, определяется из того, что суммарная масса выброшенного в эти моменты вещества либо равна $V_{q^1} - V_{q^2}$, либо в первый раз стала больше $V_{q^1} - V_{q^2}$, то есть к моменту t_v суммарная масса выброшенного в среду вещества была меньше $V_{q^1} - V_{q^2}$, а в момент t_v стала больше этой величины. Найдем величину v.

Так как в процессе транспортировки вещества по I-дереву в чистой среде от своих нагрузок освобождаются сначала верхние (лежащие ближе к корню I-дерева) реснички, то для подсчета суммарной массы выбрасываемого в среду в указанные моменты вещества достаточно, полагая $t_0 = 1$, рассматривать только характеристические реснички состояний $q^1(t_0)$, $q^1(t_1)$, $q^1(t_2)$, $\ldots$, $q^1(t_v)$.

Пусть $\mathcal{N}_{q^1(t_u)}(i'_u, k'_u, \mathcal{J}_{s'_u})$ — множество характеристических ресничек состояния $q^1(t_u)$, где $u \in \{0\} \cup \mathbb{N}_v$.

Обозначим через $\dot{q}_{ijk}(t)$ ту часть нагрузки реснички с номером ijk в состоянии q, которую она могла бы перебросить на соседнюю сверху ресничку в момент t, то есть

$$\dot{q}_{ijk}(t) = \begin{cases} q_{ijk}(t), & \text{если } q_{ijk}(t) \leqslant 2^{l-i}r, \\ 2^{l-i}r, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что в момент t_u, где $u \in \mathbb{N}_v$, в среду выбрасывается вещество, масса которого равна $\sum_{s \in \mathcal{J}_{s'_{u-1}}} \dot{q}^1_{i'_{u-1} j'_s k'_{u-1}}(t_{u-1})$. Так как количество ресничек на каждом ребре I-дерева равно n, то легко видеть, что $t_u = t_{u-1} + (i'_{u-1} - 1) \cdot n + k'_{u-1}$.

Так как вещество, масса которого не меньше $V_{q^1} - V_{q^2}$, должно быть выброшено в среду за время t_v, то

$$v = \min \left\{ h \in \mathbb{N} | \sum_{u=1}^{h} \sum_{s \in \mathcal{J}_{s'_{u-1}}} \dot{q}^1_{i'_{u-1} j'_s k'_{u-1}}(t_{u-1}) \geqslant V_{q^1} - V_{q^2} \right\}.$$

Таким образом, $\tilde{t}(q^1, q^2) = 1 + \sum_{u=1}^{v}((i'_{u-1} - 1)n + k'_{u-1})$.

Из описанной реализации главной идеи решения задачи о переводимости и теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $\{q^1, q^2\} \subseteq Q(b,n,l)$, $q^2 \notin St(b,r,n,l)$, $V_{q^1} > V_{q^2}$, $V_{q^1} > 0$, $V_{q^2} > 0$, $\mathcal{N}_{q^1}(i_1, k_1, \mathcal{J}_{s_1})$, $\mathcal{N}_{q^2}(i, k, \mathcal{J}_s)$ и $\mathcal{N}_{q^1(\tilde{t})}(i_{\tilde{t}}, k_{\tilde{t}}, \mathcal{J}_{s_{\tilde{t}}})$ — множества характеристических ресничек состояний q^1, q^2 и $q^1(\tilde{t})$, соответственно, то q^1 переводимо в q^2 точно тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) $V_{q^1(\tilde{t})} = V_{q^2}$,

б) $i_{\tilde{t}} \geqslant i$ и при $i_{\tilde{t}} = i$ имеет место $k_{\tilde{t}} \geqslant k$,

в) $q^1(\tilde{t} + (i_{\tilde{t}} - i)n + k_{\tilde{t}} - k) = q^2$.

Замечание к теореме 2. Если $\{q^1, q^2\} \subseteq Q(b,n,l)$, $q^2 \notin St(b,r,n,l)$, $V_{q^1} > V_{q^2}$, $V_{q^1} > 0$, $V_{q^2} > 0$, то для решения задачи о переводимости q^1 в q^2 предлагается следующая процедура:

1) Найти множества $\mathcal{N}_{q^1}(i_1, k_1, \mathcal{J}_{s_1})$ и $\mathcal{N}_{q^2}(i, k, \mathcal{J}_s)$.
2) Вычислить $\tilde{t}(q^1, q^2)$.
3) Найти множество $\mathcal{N}_{q^1(\tilde{t})}(i_{\tilde{t}}, k_{\tilde{t}}, \mathcal{J}_{s_{\tilde{t}}})$.
4) Проверить выполнение условия а) теоремы 2.
   Если это условие не выполняется, то заключаем, что q^1 не переводимо в q^2.
5) Проверить выполнение условия б) теоремы 2.
   Если это условие не выполняется, то заключаем, что q^1 не переводимо в q^2.
6) Вычислить $q^1(\tilde{t} + (i_{\tilde{t}} - i)n + k_{\tilde{t}} - k)$.

7) Проверить выполнение условия в) теоремы 2.
Если это условие не выполняется, то заключаем, что q^1 не переводимо в q^2, а если выполняется, то заключаем, что q^1 переводимо в q^2. При этом получаем, что время перехода q^1 в q^2 равно $\tilde{t} + (i_{\tilde{t}} - i)n + k_{\tilde{t}} - k - 1$.

Рассмотрим теперь задачу о средней глубине диаграммы Мура АМТ в чистой среде.

Введем функцию $L(b, r, n, l, V')$ для I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$, которая равна наибольшему из времен, за которое происходит полное самоочищение $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ при произвольном начальном распределении загрузки V' этого I-дерева. Эту функцию обычно называют сложностной функцией Шеннона.

Приведем утверждение из [3].

Теорема 3. *Функция $L(b, r, n, l, V')$ в зависимости от соотношений параметров b, r, n, l и V' принимает следующие значения:*

1) если $(2^l - 1)bn \leqslant V' \leqslant V$, то $L(b, r, n, l, V') =]\frac{b}{r}[(2nl - 1)$;

2) если $0 < V' < (2^l - 1)bn$, то

i) при $r = 1$ имеем:

а) если $V' \leqslant bn$, то

$$L(b, 1, n, l, V') = \begin{cases} V' + b(n-1), & \text{если } l = 1 \text{ и } n =]\frac{V'}{b}[, \\ 2V' -]\frac{V'}{b}[+ nl - 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

б) если $bn < V' \leqslant bn + (l-1)n$, то

$$L(b, 1, n, l, V') = V' + n(l + b - 1) - 1;$$

в) если $V' > bn + (l-1)n$, то

$$L(b, r, n, l, V') = \begin{cases}]\frac{b_{h_3}}{2^{l-1}}[+ 2b(nl-1), & \text{если } k_3 = 1 \text{ и } h_3 = 1, \\ 2\left( ]\frac{b_{h_3}}{2^{l-k_3}}[+ (b-1)(n(l-k_3+1) - h_3) + nl - \frac{3}{2} \right), & \text{иначе;} \end{cases}$$

ii) при $r > 1$ имеем:

а) если $V' \leqslant nl$, то $L(b, r, n, l, V') = V' + nl - 1$;

б) если $V' > nl$, то

$$L(b,r,n,l,V') = \begin{cases} \left]\frac{b_{h_3}}{2^{l-1}r}\right[+2\left]\frac{b}{r}\right[(nl-1), & \textit{если } k_3 = 1 \textit{ и } h_3 = 1,\\ 2\left(\left]\frac{b_{h_3}}{2^{l-k_3}r}\right[+(\left]\frac{b}{r}\right[-1)(n(l-k_3+1)-h_3)+nl-\frac{3}{2}\right), & \textit{иначе};\end{cases}$$

где

$$k_3 = 1 + \left[l - \log_2\left(\frac{V'-nl}{(b-1)n}+1\right)\right],$$

$$h_3 = n - \left]\frac{V'-nl-(2^{l-k_3}-1)(b-1)n}{2^{l-k_3}(b-1)}\right[+1,$$

$$b_{h_3} = V' - nl - (2^{l-k_3}-1)(b-1)n - 2^{l-k_3}(b-1)(n-h_3)+1.$$

Как отмечалось выше, диаграмма Мура автомата $A(b,r,n,l)$ является деревом, глубина которого считается глубиной $G(A(b,r,n,l))$ этой диаграммы.

Следствие. $G(A(b,r,n,l)) = \left]\frac{b}{r}\right[(2nl-1)$.

Найдем среднее значение по всем функциям $L(b,r,n,l,V')$ для всевозможных загрузок V', то есть величину

$$L_{ср.}(b,r,n,l) = \frac{1}{V}\cdot\sum_{V'=1}^{V} L(b,r,n,l,V').$$

Пусть $L(b,r,n,l) = \max_{1\leqslant V'\leqslant V} L(b,r,n,l,V')$, то есть $L(b,r,n,l)$ равна минимально достаточному времени, за которое происходит полное самоочищение I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ при произвольной его загрузке V'. Так как дольше всех будет освобождаться от своей нагрузки полностью загруженное I-дерево, то из теоремы 3 следует, что $L(b,r,n,l) = \left]\frac{b}{r}\right[(2nl-1)$.

Теорема 4. *Для $L_{ср.}(b,r,n,l)$ выполнено*

$$L_{ср.}(b,r,n,l) \sim 2n\left]\frac{b}{r}\right[l \textit{ при } l\to\infty.$$

Следствие. $L_{cp.}(b, r, n, l) \sim L(b, r, n, l)$ *при* $l \to \infty$.

Автор выражает глубокую благодарность академику Кудрявцеву Валерию Борисовичу за постановку задач и научное руководство и академику Чучалину Александру Григорьевичу за научные консультации.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Гераськина Ю. Г. О стартовых состояниях автоматной модели легких в чистой среде // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 119–135.

[3] Гераськина Ю. Г. Об одной автоматной модели в биологии // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 122–139.

[4] Гераськина Ю. Г. Модель процесса дыхания живых организмов // Интеллектуальные системы. 2004. Т. 8, вып. 1–4. С. 429–456.

[5] Гераськина Ю. Г. Модель самоочищения легочных структур // Интеллектуальные системы. 2002–2003. Т. 7, вып. 1–4. С. 41–54.