Основанный на решетках подход к исследованию и оптимизации множества правил условной системы переписывания термов

С. Д. Махортов

1. Введение

Теория систем переписывания термов (СПТ) представляет эффективный аппарат для решения ряда проблем компьютерной алгебры и искусственного интеллекта. Она находит применения в таких известных областях как, например, символьное упрощение алгебраических выражений [1], автоматическое доказательство теорем [2] и др.

Важными задачами, связанными с СПТ, являются эквивалентные преобразования и упрощение их множеств правил. В то время как для обычных СПТ подобные проблемы решались в ряде работ (например, [3]), для условных СПТ они, по-видимому, еще остаются открытыми. Этот факт можно объяснить более сложной структурой правил условных СПТ. Для обычных систем задача минимизации множества правил в конечном счете сводится к транзитивной редукции некоторого бинарного отношения («элиминация транзитивности»). Для условных систем можно говорить о более сложной задаче нахождения логической редукции.

При определении системы переписывания отправной точкой обычно является эквациональная теория, множество правил которой состоит из равенств. Правила СПТ получаются путем «ориентации» равенств и, возможно, пополнения для достижения свойства конфлюэнтности. Аналогичный подход используется и для условных СПТ [4].

Поскольку обычно именно эквациональная теория является критерием эквивалентности систем переписывания, исследование в этом плане условных СПТ можно начать с рассмотрения эквивалентности самих условных эквациональных теорий.

Предположим, что эквациональная теория (аналогично [4]) содержит набор позитивно-условных равенств вида $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n : s = t$. Его смысл таков: если имеют место все соотношения $s_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$, то выполнено и $s = t$. Если вместо термов рассматривать независимые элементы, то задача упрощения такого множества условных равенств может быть сведена к исследованной в [5] проблеме минимизации хорновых конъюнктивных нормальных форм. Более общий алгебраический подход для решения подобных задач предложен в [6]. Указанные методы можно использовать и в случае равенств между термами, но оптимизация может оказаться лишь частичной.

Рассмотрим пример, полученный модификацией примера из [4]:

1) $x + y = z : s(x) + y = s(z)$;

2) $x + y = z : g(x) + y = g(z)$;

3) $s(x) + y = s(z)$, $g(x) + y = g(z) : f(x) = f(z)$;

4) $x + y = z : f(x) = f(z)$.

Последнее равенство здесь является «лишним», так как выводится из первых трех. Действительно, пусть $x + y = z$. Тогда из 1)–2) имеем $s(x) + y = s(z)$, $g(x) + y = g(z)$, откуда с помощью 3) получим $f(x) = f(z)$. Таким образом, при $x + y = z$ справедливо $f(x) = f(z)$, то есть условное равенство 4) неявно содержится в 1)–3).

Этот факт может быть обнаружен методами работ [5-6], поскольку для этого не требуется учета особенностей термов. Заменим теперь второе равенство следующим:

2) $h(x + y) = h(z) : g(x) + y = g(z)$.

Теперь формальное применение продукционного вывода не поможет обнаружить «лишнее» условное равенство 4), если не учесть еще одно соотношение $x + y = z : h(x + y) = h(z)$, вытекающее из свойств термов.

В настоящей работе вводится основанная на решетках алгебраическая модель условной эквациональной теории. Эта модель учитывает возможные связи между термами, обусловленные применениями функций и подстановок. Исходная теория состоит из условных соотношений вида $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n : u_1 = v_1, \ldots, u_m = v_m$ («если имеют место равенства термов $s_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$, то выполнены и все $u_j = v_j$, $j = 1, \ldots, m$»). Мы будем называть такие соотношения (условными) эквациональными правилами, или просто правилами там, где это не будет вызывать недоразумений. Равенства между термами мы интерпретируем обычным для эквациональной теории способом: $s = t$, если данное равенство можно получить из имеющегося набора равенств с помощью рассматриваемой эквациональной дедукции. Соответствующие ей аксиомы и правила вывода мы определим в п. 2. Они естественным образом расширяют набор аксиом и правил вывода, описанный в [7] для условных равенств вида $s_1 = t_1$, $\ldots$, $s_n = t_n : s = t$.

В предлагаемой алгебраической модели условные эквациональные правила реализуются бинарным отношением R на решетке, порожденной множествами равенств $\{s_i = t_i\}$. Подчеркнем, что R связывает не отдельные термы (как в обычной эквациональной логике), а наборы равенств между термами: каждому правилу $s_1 = t_1$, $\ldots$, $s_n = t_n : u_1 = v_1$, $\ldots$, $u_m = v_m$ соответствует пара $(a, b) \in R$, где $a = \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$ и $b = \{u_1 = v_1, \ldots, u_m = v_m\}$. Наша модель содержит логику продукционного вывода. Такой вывод можно назвать мета-выводом, поскольку он применяется не к самим термам, а к подмножествам равенств между термами.

Помимо разработки самой модели, основные результаты статьи (п. 3) состоят в следующем. Для данной модели доказано утверждение о существовании логического замыкания (теорема 3.1), что в приложении дает возможность сформулировать понятие эквивалентной эквациональной теории. Доказана возможность локально-эквивалентных преобразований исходного отношения (теорема 3.2), соответственно и возможность преобразования множества правил. Исследована структура логического замыкания (теорема 3.3), что позволяет при его построении использовать быстрые алгоритмы. Изучены вопросы существования и построения логической редукции бинарного отношения (теорема 3.4). Это дает теоретическую основу для минимизации условной эквациональной теории. Под минимизацией мы понимаем получение такой эквивалентной системы, из которой невозможно удалить ни одного правила без нарушения эквивалентности.

В п. 4 подводятся итоги и указываются перспективы дальнейших исследований. Доказательства сформулированных теорем содержатся в п. 5.

2. Основные понятия и обозначения

Решеткой называется частично упорядоченное множество $\mathbb{F}$, в котором наряду с отношением $\leqslant$ («не больше», «содержится») введены также две двуместные операции $\wedge$ («пересечение») и $\vee$ («объединение»), вычисляющие соответственно точную нижнюю и верхнюю грани для любых a, $b \in \mathbb{F}$.

Как известно, множество всех конечных подмножеств $\lambda(U)$ некоторого универсума U является решеткой. В данной статье рассматривается именно такой вид решеток. Чтобы это подчеркнуть, мы вместо символов $\leqslant$, $\geqslant$, $\wedge$ и $\vee$ будем использовать знаки теоретико-множественных операций $\subseteq$, $\supseteq$, $\cap$ и $\cup$. Однако использование термина «решетка» сохраняется, поскольку в дальнейшем наши результаты могут быть распространены и на другие виды решеток.

Приведем некоторые базовые определения, связанные с термами [7].

Пусть Σ — алфавит, представляющий собой объединение следующих непересекающихся множеств: V — множество переменных; Σ_n, $n = 0, 1, \ldots$ — множества n-арных функций (функциональных символов); 0-арные функции называются также константами.

Множество термов $T(\Sigma)$ определяется рекурсивно:

1) $V \subset T(\Sigma)$;

2) $\Sigma_0 \subset T(\Sigma)$;

3) если $f \in \Sigma_n$ и $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma)$, то $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma)$.

Отображение $\sigma : V \to T(\Sigma)$ называется подстановкой. Это понятие распространяется на все $t \in T(\Sigma)$ следующим образом:

1) если $t = x \in V$, то $\sigma(t) = \sigma(x)$;

2) если $t = f \in \Sigma_0$, то $\sigma(t) = f$;

3) если $f \in \Sigma_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma)$ и $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, то $\sigma(t) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Эквациональной теорией называется пара (Σ, E), где Σ — алфавит, состоящий из счетного множества переменных и непустого множества функциональных символов (сигнатура), а $E \subseteq T(\Sigma) \times T(\Sigma)$ — множество равенств вида $s = t$ ($s, t \in T(\Sigma)$). Определяется понятие выводимости равенства $s = t$ из E ($(\Sigma, E) \vdash s = t$) :

1) если $s = t \in E$, то $(\Sigma, E) \vdash s = t$;
2) если $(\Sigma, E) \vdash s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n$, то $(\Sigma, E) \vdash f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ для любого $f \in \Sigma_n$;
3) если $(\Sigma, E) \vdash s = t$, то $(\Sigma, E) \vdash \sigma(s) = \sigma(t)$ для любой подстановки σ;
4) $(\Sigma, E) \vdash t = t$;
5) если $(\Sigma, E) \vdash t_1 = t_2$, $t_2 = t_3$, то $(\Sigma, E) \vdash t_1 = t_3$;
6) если $(\Sigma, E) \vdash s = t$, то $(\Sigma, E) \vdash t = s$.

Для данного множества равенств E рассмотрим множество конечных подмножеств $\lambda(E)$. В нем заданы отношения включения $\subseteq$, $\supseteq$, а также «решеточные» операции $\cap$ и $\cup$ — теоретико-множественные пересечение и объединение. Кроме них нам потребуются еще две группы операций, связанных соответственно с функциями и подстановками термов:

1) если $a = \{s_i = t_i | i = 1, \ldots, n\}$ и $f \in \Sigma_n$, то $f(a) = \{f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)\}$;
2) если $a = \{s_j = t_j | j = 1, \ldots, m\}$, то $\sigma(a) = \{\sigma(s_j) = \sigma(t_j) | j = 1, \ldots, m\}$ для любой подстановки σ.

Определение 2.1. Пусть задана эквациональная теория (Σ, E). Эквациональной решеткой $\mathbb{F}$ будем называть решетку, полученную пополнением $\lambda(E)$ относительно определенных выше операций 1)–2).

Как говорилось в п. 1, мы рассматриваем условную эквациональную теорию, содержащую условные правила вида $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n : u_1 = v_1, \ldots, u_m = v_m$. Таким образом, предпосылка и заключение правила являются элементами $\mathbb{F}$.

По аналогии с [7] введем аксиомы и правила нашей условной эквациональной дедукции. Аксиомы порождаются перечисленными выше правилами вывода равенств. Правило вывода 2) означает наличие условного правила (аксиомы) $a : f(a)$ для любых $a = \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$ и $f \in \Sigma_n$; из 3) следует аксиома $a : \sigma(a)$ для любых

$a \in \mathbb{F}$ и подстановки σ. Такие условные правила в нашей логике можно также назвать тавтологиями. Еще одной очевидной тавтологией является правило $a : b$, $a, b \in \mathbb{F}$ при $a \supseteq b$. Эти три аксиомы мы задаем в нашей логике.

Правила вывода в условной эквациональной логике таковы:

1) $a : b \vdash \sigma(a) : \sigma(b)$ $(a, b \in \mathbb{F})$ для любой подстановки σ (см. аналогичное правило в [7] с исходными обозначениями);
2) $a : b, a : c \vdash a : b \cup c$ $(a, b, c) \in \mathbb{F}$ (возможность вывода по частям);
3) $a : b, b : c \vdash a : c$ $(a, b, c) \in \mathbb{F}$ (транзитивность).

3. Алгебраическая модель условной эквациональной теории

В этом разделе мы рассматриваем бинарные отношения на эквациональной решетке. Ниже будет введено понятие логического отношения, которое соответствует множеству правил условной эквациональной теории. Свойства такого отношения должны отражать сформулированные в п. 2 аксиомы и правила условной эквациональной дедукции.

Во-первых, логическое отношение R должно содержать все тавтологии. Введем для них общее обозначение: $a \succcurlyeq b$, если $a \supseteq b$, $b = \sigma(a)$ или $b = f(a)$. Таким образом, для логического отношения R справедливо $\succcurlyeq \subseteq R$. Другие свойства логического отношения вытекают из правил дедукции.

Определение 3.1. Отношение R назовем применимым, если для любой подстановки σ из $(a, b) \in R$ следует $(\sigma(a), \sigma(b)) \in R$.

Определение 3.2. Отношение R назовем $\cup$-дистрибутивным, если для любых (a, b_1), $(a, b_2) \in R$ выполнено $(a,\ b_1 \cup b_2) \in R$.

Следующее определение суммирует рассмотренные свойства.

Определение 3.3. Бинарное отношение на эквациональной решетке называется логическим, если оно содержит тавтологии, а также является применимым, $\cup$-дистрибутивным и транзитивным. Логическим замыканием произвольного отношения R называется наименьшее логическое отношение, содержащее R.

Два отношения R_1 и R_2, определенные на общей эквациональной решетке, называются эквивалентными, если их логические замыкания совпадают. Этот факт будем обозначать $R_1 \sim R_2$. Логической редукцией данного отношения R называется эквивалентное ему минимальное отношение R_0.

Из определения не следует существования логического замыкания или редукции для произвольного бинарного отношения. Эти вопросы мы рассматриваем ниже.

Определение 3.4. Пусть задано некоторое отношение R на эквациональной решетке $\mathbb{F}$. Будем говорить, что упорядоченная пара $a, b \in \mathbb{F}$ логически связана отношением R (обозначим этот факт $a \xrightarrow{R} b$), если выполнено одно из следующих условий:

1) $(a, b) \in R$;
2) $a \succcurlyeq b$:
   2.1) $a \supseteq b$ или
   2.2) $b = \sigma(a)$ или
   2.3) $b = f(a)$;
3) существуют такие $a_1, b_1 \in \mathbb{F}$ и подстановка σ, что $a = \sigma(a_1)$, $b = \sigma(b_1)$ причем $a_1 \xrightarrow{R} b_1$;
4) существуют такие $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, что $b_1 \cup b_2 = b$, причем $a \xrightarrow{R} b_1$, $a \xrightarrow{R} b_2$;
5) существует элемент $c \in \mathbb{F}$ такой, что $a \xrightarrow{R} c$ и $c \xrightarrow{R} b$.

Теорема 3.1. *Для произвольного отношения R на эквациональной решетке логическое замыкание существует и совпадает с множеством $\xrightarrow{R}$ всех упорядоченных пар, логически связанных отношением R.*

Следствие 3.1. *Пусть R — бинарное отношение на эквациональной решетке и $a_t \xrightarrow{R} b_t$ $\forall\, t \in T$. Тогда отношение $R' = R \cup \{(a_t, b_t) \mid t \in T\}$ эквивалентно R.*

Пусть дано произвольное бинарное отношение R на эквациональной решетке. Его эквивалентным преобразованием называется такая замена всего множества упорядоченных пар R или его части, что полученное в результате новое отношение P логически эквивалентно R, то есть $P \sim R$.

Теорема 3.2. *Пусть R_1, R_2, R_3, R_4 — отношения на общей эквациональной решетке. Если при этом $R_1 \sim R_2$ и $R_3 \sim R_4$, то $R_1 \cup R_3 \sim R_2 \cup R_4$.*

Следствие 3.2. *Пусть R_1, R_2, R — отношения на общей эквациональной решетке. Если при этом $R_1 \sim R_2$, то $R_1 \cup R \sim R_2 \cup R$.*

Следствия 3.1 и 3.2 обосновывают принцип локальности эквивалентных преобразований логических отношений.

Попробуем выяснить вопрос о том, можно ли в общем процессе построения логического замыкания выделить этап, соответствующий транзитивному замыканию. Это позволит свести изучение некоторых важных вопросов, касающихся логических отношений, к соответствующим проблемам транзитивных отношений. В частности, построение логического замыкания или редукции можно будет осуществить с помощью быстрых алгоритмов (типа Уоршолла [8]).

Для произвольного отношения R на эквациональной решетке рассмотрим отношение $\tilde{R}$, построенное по данному R последовательным выполнением следующих шагов:

1) добавить к R все пары (a, b), для которых $b = \sigma(a)$ либо $b = f(a)$, и обозначить новое отношение R_1;
2) добавить к R_1 всевозможные пары вида $(\sigma(a), \sigma(b))$, для которых $(a, b) \in R_1$, и обозначить новое отношение R_2;
3) добавить к R_2 всевозможные пары вида $(a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_m, b_1 \cup b_2 \cup \ldots \cup b_m)$, где $(a_i, b_i) \in R_2$, и обозначить новое отношение R_3;
4) объединить R_3 с отношением $\supset$.

Заметим, что в силу бесконечности множества $\mathbb{F}$ описанный процесс построения $\tilde{R}$ носит теоретический характер. В приложениях в качестве $\mathbb{F}$ можно взять конечное подмножество эквациональной решетки, построенное при ограничении максимального уровня вложенности термов.

Теорема 3.3. *Логическое замыкание отношения R на эквациональной решетке совпадает с транзитивным замыканием $\tilde{R}^*$ соответствующего отношения $\tilde{R}$.*

Выясним далее вопрос о существовании и построении логической редукции бинарных отношений.

Для отношения R на эквациональной решетке рассмотрим отношение $\underset{\sim}{R}$, построенное по данному R последовательным выполнением шагов, обратных построению $\tilde{R}$, а именно:

1) исключить из R все пары (a, b), для которых $a \supset b$, и обозначить новое отношение R_{-1}.
2) исключить из R_{-1} все пары (a, b) вида $(a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_m, b_1 \cup b_2 \cup \ldots \cup b_m)$, где $(a_i, b_i) \in R_{-1}$, причем (a, b) не совпадает ни с одной парой (a_i, b_i), и обозначить новое отношение R_{-2};
3) исключить из R_{-2} всевозможные пары вида $(\sigma(a), \sigma(b))$, для которых $(a, b) \in R_{-2}$, причем (a, b) не совпадает с парой $(\sigma(a), \sigma(b))$, и обозначить новое отношение R_{-3};
4) исключить из R_{-3} все пары (a, b), для которых $b = \sigma(a)$ либо $b = f(a)$.

Следующая теорема указывает достаточное условие существования и способ построения логической редукции данного отношения.

Теорема 3.4. *Пусть для отношения R на эквациональной решетке $\mathbb{F}$ построено соответствующее отношение $\tilde{R}$. Тогда, если для $\tilde{R}$ существует транзитивная редукция R^0, то соответствующее ей отношение $\underset{\sim}{R}^0$ представляет собой логическую редукцию исходного отношения R.*

4. Заключение

В настоящей работе предложена основанная на решетках алгебраическая модель условной эквациональной теории и проведено теоретическое исследование этой модели. Полученные результаты обосновывают локально-эквивалентные преобразования множества условных правил, а также его оптимизацию путем получения эквивалентной системы с минимальным набором правил.

В дальнейшем можно рассмотреть более общую модель, если в качестве ее основы вместо $\lambda(E)$ использовать решетку Линденбаума-Тарского [9]. Тогда условные правила смогут в качестве предпосылок и заключений содержать формулы пропозиционального исчисления. При этом общие методы исследования останутся прежними.

Еще одно возможное направление связано с более глубоким рассмотрением структуры условных правил. В п. 1 мы указывали, что, заменив термы независимыми элементами некоторого множества, можно оптимизировать систему правил на основе методов [5–6]. Этот уровень исследований можно считать первым. В настоящей работе предложена модель второго уровня — с учетом связей между равенствами на основе функций и подстановок. Более глубокий третий уровень мог бы учитывать в равенствах структуру отдельных термов. Рассмотрим пример:

1) $x + y = z : s(x) + y = s(z)$;

2) $x + y = z : s(z) = g(x + z)$;

3) $x + y = z : s(x) + y = g(x + z)$.

Здесь условное правило 3) является «лишним»: при $x + y = z$ по правилам 1)–2) из $s(x) + y = s(z)$ и $s(z) = g(x + z)$ автоматически следует $s(x) + y = g(x + y)$. Однако этот факт можно увидеть лишь на третьем уровне исследования.

На этом же уровне лежат и решения ряда других проблем, зависящих от структуры равенств и термов. К таковым, например, относится вопрос о влиянии внешних переменных [10] на возможности логической редукции (такие переменные имеются в правилах 1)–3)). Результаты, полученные на уровне исследования данной статьи, от внешних переменных не зависят.

Что касается оценок сложности алгоритмов построения логической редукции, то здесь прогнозы не всегда оптимистичны. Как показано в [5], проблема минимизации функций Хорна является NP-полной. Это соответствует сложности минимизации множества условных правил уже на верхнем уровне. В нашей работе мы описали нахождение не наименьшего, а минимального множества правил. Использование при этом быстрого алгоритма построения транзитивной редукции [8] дает сложность $O(N^3)$, если при этом удастся эффективно реализовать построение отношений $\tilde{R}$ и $\underset{\sim}{R}$. Также заметим, что число условных правил N может оказаться сопоставимым с мощностью булеана $2^{n\times n}$, где n — количество рассматриваемых термов.

5. Доказательства теорем

Напомним, что определение 3.4 по данному R задает новое бинарное отношение $\xrightarrow{R}$ на решетке $\mathbb{F}$.

Условия 1)–5) определения 3.4 мы будем также называть правилами вывода в нашей алгебраической модели. При выводе некоторой логической связи $a \xrightarrow{R} b$ шагом вывода будем называть применение ровно одного правила, возможно, одновременно к некоторому конечному множеству элементов решетки. Например:

- если $a_i \xrightarrow{R} c_i$, $c_i \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1, \ldots, n$, то $a_i \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Уровнем рекурсии в соотношении $a \xrightarrow{R} b$ будем называть количество шагов вывода, необходимое для получения этой связи. При этом учитываются лишь применения правил 3)–5) определения 3.4. Для связи по правилу 1) или 2) уровень рекурсии считается равным нулю.

Поскольку в общем случае связь $a \xrightarrow{R} b$ может быть получена не единственным набором правил, мы обычно будем лишь оценивать сверху ее уровень рекурсии, не указывая его точного значения.

Применительно к шагам вывода соотношения $a \xrightarrow{R} b$ мы будем употреблять слова «начальный», «последний», а также «предыдущий», «следующий» и т. д. При этом имеется в виду продвижение в направлении прямого логического вывода, то есть от пар исходного отношения $(R\cup \succcurlyeq)$ к выводимой паре отношения $\xrightarrow{R}$. Заметим, что рекурсивное определение 3.4 сформулировано в духе обратного вывода.

Лемма 5.1. *Пусть R — логическое отношение на эквациональной решетке $\mathbb{F}$ и $a, b \in \mathbb{F}$. Тогда, если справедливо $a \xrightarrow{R} b$, то $(a, b) \in R$.*

Доказательство. Проведем его с помощью индукции по m — верхней оценке уровня рекурсии в соотношении $a \xrightarrow{R} b$. При $m = 0$ имеет место одно из условий 1)–2) определения 3.4. Случай 1) означает требуемое утверждение. Если же справедливо 2), то и тогда $(a, b) \in R$, поскольку логическое отношение R содержит тавтологии.

Предположим далее, что лемма верна для некоторого $m \geqslant 0$, и докажем ее утверждение при уровне рекурсии $m + 1$. В этом случае новые для рассмотрения варианты могут дать правила 3)–5).

Если имеет место 3), то по предположению индукции уровень рекурсии в соответствующем соотношении $a_1 \xrightarrow{R} b_1$ $(a = \sigma(a_1), b = \sigma(b_1))$ не превосходит m, поэтому $(a_1, b_1) \in R$. Тогда, в силу свойства применимости логического отношения R, получим $(a, b) \in R$. Варианты происхождения связи $a \xrightarrow{R} b$ из условий 4)–5) рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Покажем, что при произвольном R соответствующее отношение $\xrightarrow{R}$ является логическим. Действительно, в силу п. 2) определения 3.4 оно содержит тавтологии, из п. 3) следует его применимость, из п. 4) — дистрибутивность, а п. 5) означает транзитивность данного отношения. Далее, в силу п. 1) определения 3.4, отношение $\xrightarrow{R}$ содержит R. Для доказательства теоремы осталось показать, что это — наименьшее из таковых отношений.

Пусть R' — любое другое логическое отношение, содержащее R. Тогда очевидно, что если $a \xrightarrow{R} b$, то $a \xrightarrow{R'} b$. Отсюда по лемме 5.1 имеем $(a, b) \in R'$. Следовательно, отношение $\xrightarrow{R}$ содержится в произвольно выбранном R', и, таким образом, является наименьшим логическим отношением, содержащим R. Теорема доказана.

Доказательство следствия 3.1. Заметим вначале, что по определению любое логическое отношение является собственным же логическим замыканием. Это в силу теоремы 3.1 относится и к отношению $\xrightarrow{R}$. Далее, из определения 3.4 следует, что для любых $R_1 \subseteq R_2$ справедливо $\xrightarrow{R_1} \subseteq \xrightarrow{R_2}$. В нашем случае по построению отношения R' выполнены включения $R \subseteq R' \subseteq \xrightarrow{R}$. Переходя к логическим замыканиям и учитывая вышесказанное, получаем, что отношения R и R' имеют общее логическое замыкание $\xrightarrow{R}$. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 3.2. Требуется доказать равенство $\xrightarrow{R_1 \cup R_3} = \xrightarrow{R_2 \cup R_4}$ как соотношение двух множеств. Пусть $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$. Докажем, что при этом справедливо $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Для этого вновь применим метод индукции по m — оценке уровня рекурсии в соотношении $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$.

При $m = 0$ имеет место одно из условий 1)–2) определения 3.4. Если справедливо 2), то тогда $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$, поскольку логическое отношение $\xrightarrow{R_2 \cup R_4}$ содержит и тавтологии. Если выполнено условие 1), то имеем $(a, b) \in R_1 \cup R_3$. Пусть, для определенности, $(a, b) \in R_1$ (вариант $(a, b) \in R_3$ симметричен). В этом случае имеет место $a \xrightarrow{R_1} b$, откуда в силу условия эквивалентности $R_1 \sim R_2$ получим $a \xrightarrow{R_2} b$. Следовательно, справедливо и $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Таким образом, при $m = 0$ требуемое утверждение доказано.

Предположим далее, что оно верно для некоторого $m \geqslant 0$, и докажем его при уровне рекурсии $m+1$. В этом случае новые для рассмотрения варианты для $a \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b$ могут дать условия 3)–5) определения 3.4.

Если имеет место 3), то по предположению индукции уровень рекурсии в соответствующем соотношении $a_1 \xrightarrow{R_1 \cup R_3} b_1$ $(a = \sigma(a_1)$, $b = \sigma(b_1))$ не превосходит m, поэтому $a_1 \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b_1$. В этом случае, в силу свойства применимости логического отношения $\xrightarrow{R_2 \cup R_4}$, получим $a \xrightarrow{R_2 \cup R_4} b$. Аналогично рассматриваются случаи применения правил 3)–5). Теорема доказана.

Лемма 5.2. *Пусть R — отношение на эквациональной решетке и $a_i \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда справедлива логическая связь* $\bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} a_i \xrightarrow{R} \bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} b_i$.

Доказательство. Введем обозначения $\tilde{a} = \bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} a_i$, $\tilde{b} = \bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} b_i$. Поскольку $\tilde{a} \supseteq a_i$, $i = 1, \ldots, n$, то в силу $a_i \xrightarrow{R} b_i$ и условия 5) определения 3.4 справедливо $\tilde{a} \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Применяя к последнему соотношению правило 4), получим $\tilde{a} \xrightarrow{R} \tilde{b}$. Лемма доказана.

Следствие 5.1. *На основе леммы 5.2 можно ввести обобщенное правило вывода, соответствующее правилу 4) определения 3.4: упо-*

рядоченная пара $a, b \in \mathbb{F}$ логически связана отношением R ($a \xrightarrow{R} b$), если выполнено следующее условие:

$4'$) существуют такие $a_i, b_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, \ldots, n$, что $\bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} a_i = a$, $\bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} b_i = b$, причем $a_i \xrightarrow{R} b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Очевидно, что правило 4) определения 3.4 является частным случаем правила $4'$).

Лемма 5.3. *Пусть R — отношение на эквациональной решетке $\mathbb{F}$. Тогда при выводе любой логической связи $a \xrightarrow{R} b$ все применения правила $4'$) могут быть произведены без участия правила 2.1) определения 3.4 со строгим неравенством. Роль последнего можно свести к присутствию лишь в качестве компонента для транзитивного правила 5).*

Доказательство. Предположим, что при получении вывода $a \xrightarrow{R} b$ использовалось условие $4'$). Разобьем имеющееся множество пар $\{(a_i, b_i) | i = 1, \ldots, n\}$ на 2 подмножества. В первое из них войдут такие пары (a_j, b_j), $j = 1, \ldots, n_1$, для которых выполнено $a_j \supset b_j$. Ко второму подмножеству отнесем все остальные пары (a_j, b_j), $j = 1, \ldots, n_2$. Тогда, вводя обозначения $\bigcup\limits_{j=1,\ldots,n_1} a_j = a^1$, $\bigcup\limits_{j=1,\ldots,n_1} b_j = b^1$, $\bigcup\limits_{j=1,\ldots,n_2} a_j = a^2$, $\bigcup\limits_{j=1,\ldots,n_2} b_j = b^2$, получим $a = a^1 \cup a^2$, $b = b^1 \cup b^2$. При этом $a^1 \supseteq b^1$ (соответственно $a^1 \xrightarrow{R} b^1$) и по условию $4'$) имеет место $a^2 \xrightarrow{R} b^2$. Очевидно, что указанное выше применение правила $4'$) для $\{(a_i, b_i) | i = 1, \ldots, n\}$ можно заменить аналогичным правилом для (a^1, b^1), (a^2, b^2).

Если при этом окажется, что $n_1 = 0$, то для данного вывода $a \xrightarrow{R} b$ сформулированное в лемме утверждение относительно правила $4'$) выполнено сразу. Если же $n_2 = 0$ либо $a^2 \supseteq b^2$, то применение правила $4'$) не требуется вовсе. Рассмотрим оставшийся нетривиальный случай ($n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$ и не имеет места $a^2 \supseteq b^2$), в котором поступим следующим образом. Применим правило $4'$) к соотношениям $b^1 \xrightarrow{R} b^1$, $a^2 \xrightarrow{R} b^2$, тогда получим $b^1 \cup a^2 \xrightarrow{R} b^1 \cup b^2$. Возвращаясь к имеющемуся неравенству $a^1 \supseteq b^1$, заметим, что в силу свойств решетки $\mathbb{F}$ из него следует неравенство $a^1 \cup a^2 \supseteq b^1 \cup a^2$. Поэтому, применяя к парам $a^1 \cup a^2 \supseteq b^1 \cup a^2$ и $b^1 \cup a^2 \xrightarrow{R} b^1 \cup b^2$ транзитивное правило 5), приходим к соотношению $a^1 \cup a^2 \xrightarrow{R} b^1 \cup b^2$, то есть $a \xrightarrow{R} b$. При этом мы исключили в применяемом правиле $4'$) участие строгих неравенств вида $a_j \supset b_j$. Таким образом, утверждение леммы доказано.

Доказательства следующих двух лемм проводятся по аналогичной схеме. В целях экономии места мы их здесь не приводим.

Лемма 5.4. *Пусть R — отношение на эквациональной решетке $\mathbb{F}$. Тогда при выводе логической связи $a \xrightarrow{R} b$ любое применение правила 3) определения 3.4 можно исключить либо поменять местами с предшествующим ему применением каждого из правил 2.1), $4'$), 5), получив при этом ту же логическую связь.*

Лемма 5.5. *Пусть R — отношение на эквациональной решетке. Тогда при выводе любой логической связи $a \xrightarrow{R} b$ все применения транзитивного правила 5) могут быть исключены либо перенесены в заключительную стадию данного процесса.*

Применяя лемму 5.2 и следствие 3.1, нетрудно убедиться в том, что отношение $\tilde{R}$ (см. п. 3) логически эквивалентно R.

Лемма 5.6. *Пусть R — отношение на эквациональной решетке. Тогда, если $a \xrightarrow{R} b$, и это соотношение может быть получено без использования транзитивного правила 5) определения 3.4, то $(a, b) \in \tilde{R}$.*

Доказательство. Пусть имеет место $a \xrightarrow{R} b$, полученное без правила 5). Если указанное соотношение произошло непосредственно из условия 1) или 2) определения 3.4, то сразу имеем $(a, b) \in \tilde{R}$.

Остается рассмотреть нетривиальный случай применения цепочки правил 3), $4'$). Все необходимые для этого тавтологии могут быть подготовлены в самом начале процесса вывода. При этом в силу лемм 5.3 и 5.4 пары вида $a \supset b$ не потребуются. Также по лемме 5.4 все применения правила 3) могут быть осуществлены на начальном этапе процесса вывода. Следовательно, правило 4′) может лишь завершать этот процесс.

Если сопоставить указанные этапы вывода с последовательностью построения отношения $\tilde{R}$, то окажется, что вывод $a \xrightarrow{R} b$ соответствует построению некоторого подмножества $\tilde{R}$, что и доказывает включение $(a, b) \in \tilde{R}$.

Доказательство теоремы 3.3. Как было отмечено выше, отношение $\tilde{R}$ эквивалентно R. Следовательно, по определению логического замыкания, имеем $\tilde{R} \subseteq \xrightarrow{R}$. Отсюда, поскольку отношение $\xrightarrow{R}$ транзитивно, получаем $\tilde{R}^* \subseteq \xrightarrow{R}$.

Докажем обратное включение. Предположим, что $a \xrightarrow{R} b$. По лемме 5.5, при получении этого вывода все применения транзитивного правила 5) определения 3.4 могут быть перенесены в заключительную стадию процесса: существует цепочка элементов $a = c_0, c_1, \ldots, c_N = b$ такая, что выполнены соотношения $c_{k-1} \xrightarrow{R} c_k$, $k = 1, \ldots, N$, при выводе которых правило 5) не используется. Тогда по лемме 5.6 имеем $(c_{k-1}, c_k) \in \tilde{R}$, откуда сразу получаем $(a, b) \in \tilde{R}^*$. Итак, $\xrightarrow{R} \subseteq \tilde{R}^*$. Теорема доказана.

Так же с помощью леммы 5.2 и следствия 3.1 нетрудно убедиться в том, что отношение $\underset{\sim}{R}$ (см. п. 3) логически эквивалентно R.

Лемма 5.7. *Пусть R — бинарное отношение на эквациональной решетке. Для того чтобы R являлось логической редукцией, необходимо и достаточно, чтобы R не содержало ни одной такой пары (a, b), что выполнено соотношение $a \xrightarrow{R\setminus\{(a,b)\}} b$.*

Доказательство. Пусть отношение R представляет собой логическую редукцию, то есть является минимальным логически эквивалентным себе отношением. Если бы существовала пара $(a, b) \in R$, логически связанная отношением $R \setminus \{(a, b)\}$, то в силу следствия 3.1 ее можно было бы исключить из R, получив при этом меньшее эквивалентное отношение. Таким образом, при наличии указанной пары отношение R не может быть логической редукцией.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что не существует ни одной пары $(a, b) \in R$, для которой справедливо

$a \xrightarrow{R\setminus\{(a,b)\}} b$. Требуется доказать, что в этом случае R есть логическая редукция. Предположим противное — пусть существует отношение $R_0 \subset R$, эквивалентное R, и пусть $(a, b) \in R \setminus R_0$. Тогда, поскольку $(a, b) \in R$, в силу эквивалентности рассматриваемых отношений справедливо $a \xrightarrow{R_0} b$. Так как отношение R_0 не содержит пару (a, b), то $R_0 \subseteq R\setminus\{(a, b)\}$, и логическая связь $a \xrightarrow{R_0} b$ противоречит сделанному предположению — таких пар (a, b) в R нет. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 3.4 основывается на лемме 5.7 и принципиальных трудностей не содержит.

Список литературы

[1] Buchberger B., Loos R. Algebraic Simplification // Computer Algebra — Symbolic and Algebraic Computation / B. Buchberger, G. E. Collins, R. Loos (ed.) P. 11–43. Vienna — New York: Springer Verlag, 1982.

[2] Hsiang J. Refutational theorem proving using term-rewriting systems // Artif. Intell. 1985. Vol. 25. P. 255–300.

[3] Toyama Y. On Equivalence Transformations for Term Rewriting Systems // Proceedings of the 1983 and 1984 RIMS Symposia on Software Science and Engineering II / E. Goto, K. Araki, T. Yuasa (eds.) Lecture Notes In Computer Science. Vol. 220. London: Springer-Verlag, 1986. P. 44–61.

[4] Dershowitz N., Okada M. Sivakumar G. Canonical Conditional Rewrite Systems // Proceedings of the 9th international Conference on Automated Deduction (May 23–26, 1988) / E. L. Lusk, R. A. Overbeek (eds.) Lecture Notes In Computer Science. Vol. 310. London: Springer-Verlag, 1988. P. 538–549.

[5] Hammer P. L., Kogan A. Optimal compression of propositional Horn knowledge bases: complexity and approximation // Artif. Intell. 64, 1 (Nov. 1993). P. 131–145.

[6] Махортов С. Д. О редукции логических отношений на решетках // Вестник факультета ПММ. Вып. 5. Воронеж: ВГУ, 2004. С. 172–179.

[7] Klop J. W. Term rewriting systems // Handbook of Logic in Computer Science (Vol. 2): Background: Computational Structures / S. Abramsky, D. M. Gabbay, S. E. Maibaum (eds.) Osborne Handbooks of Logic In Computer Science. Vol. 2. New York: Oxford University Press, 1992. P. 1–116.

[8] Aho A. V., Garey M. R., Ulman J. D. The transitive reduction of a directed graph // SIAM J. Computing. 1: 2. P. 131–137. 1972.

[9] Rasiowa H., Sikorski R. The Mathematics of Metamathematics. Warszawa: PWN, 1963.

[10] Ohlebusch E. Transforming Conditional Rewrite Systems with Extra Variables into Unconditional Systems // Proceedings of the 6th international Conference on Logic Programming and Automated Reasoning (September 06–10, 1999) / H. Ganzinger, D. A. McAllester, A. Voronkov (eds.) Lecture Notes In Computer Science. Vol. 1705. London: Springer-Verlag. P. 111–130.