Континуальность множества предполных классов в классе дефинитных автоматов

Д. Н. Жук

В данной работе показано, что в классе дефинитных автоматов мощность множества всех предполных классов равна континууму.

Введение

Известно, что решение задачи о полноте относительно операции суперпозиции и обратной связи для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности. Так в работе [1] показано, что мощность множества предполных классов равна континууму. В работе [2] установлена алгоритмическая неразрешимость задачи о полноте.

Аналогичные результаты были получены для дефинитных автоматов. Было показано, что в классе дефинитных автоматов задача о полноте относительно операции суперпозиции алгоритмически неразрешима [3]. В данной работе установлено, что мощность множества предполных классов в классе дефинитных автоматов равна континууму. При этом в работе в явном виде приводится континуальное семейство предполных классов.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Кудрявцеву В. Б. за оказанную помощь и поддержку в исследовании задачи и написании данной работы.

1. Основные понятия и результаты

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $E_2 = \{0, 1\}$, ${E_2}^l$ — множество всех слов длины l в алфавите E_2, E — множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц. Далее такие последовательности называем сверхсловами. Множество E^n состоит из всех наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E$. Если $a \in E_2$, то через $\overline{a}$ будем обозначать отрицание a.

Пусть α — слово или сверхслово. Для $n \in \mathbb{N}$ через $\alpha(n)$ обозначим n-ый элемент α. Обозначим через $|\alpha|$ длину слова α; для сверхслова α будем полагать, что $|\alpha| = \infty$. Для слова α, такого что $|\alpha| \geqslant k$, определим

$$[_k\alpha = \alpha(|\alpha| - k + 1) \ldots \alpha(|\alpha| - 1)\alpha(|\alpha|).$$

Для слова или сверхслова α, такого что $|\alpha| \geqslant k \geqslant l$ положим

$$]_k\alpha = \alpha(1)\alpha(2) \ldots \alpha(k), [_l]_k\alpha = \alpha(k - l + 1)\alpha(k - l + 2) \ldots \alpha(k).$$

Для слова α через $\mathrm{invert}(\alpha)$ обозначим слово $\alpha(|\alpha|)\alpha(|\alpha| - 1) \ldots \alpha(1)$. Для произвольного слова α определим слово $\alpha^s = \underbrace{\alpha\alpha \ldots \alpha}_{s}$ и сверхслово $\alpha^\infty = \alpha\alpha\alpha \ldots$. Через Λ будем обозначать пустое слово — такое слово, что для любого слова α выполняется $\Lambda\alpha = \alpha\Lambda = \alpha$. Будем говорить, что α является подсловом β, если для каких-то δ_1, δ_2 выполняется $\delta_1\alpha\delta_2 = \beta$.

Пусть $n, h \in \mathbb{N}$. Функция $T : E^n \to E$ называется дефинитным автоматом с n входами высоты h, если существуют функции $f_j : ({E_2}^j)^n \to E_2$ $(j = 1, 2, 3, \ldots, h)$, такие что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ выполняется:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n)(1) = f_1(]_1 x_1,]_1 x_2, \dots,]_1 x_n)$$
$$T(x_1, x_2, \dots, x_n)(2) = f_2(]_2 x_1,]_2 x_2, \dots,]_2 x_n)$$
$$\dots$$
$$T(x_1, x_2, \dots, x_n)(h) = f_h(]_h x_1,]_h x_2, \dots,]_h x_n)$$
$$T(x_1, x_2, \dots, x_n)(h+1) = f_h([_h]_{h+1} x_1, [_h]_{h+1} x_2, \dots, [_h]_{h+1} x_n)$$
$$\dots$$
$$T(x_1, x_2, \dots, x_n)(h+i) = f_h([_h]_{h+i} x_1, [_h]_{h+i} x_2, \dots, [_h]_{h+i} x_n)$$
$$\dots$$

Таким образом, согласно нашему определению автомат высоты h является также автоматом высоты $h+1$.

Пусть T — автомат высоты h. Для $p \in \mathbb{N}$ определим функцию $T^p : (E_2{}^p)^n \to E_2$. Если $p \leqslant h$, то положим

$$T^p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Для $p > h$ положим

$$T^p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_h([_h \alpha_1, [_h \alpha_2, \dots, [_h \alpha_n).$$

Таким образом, для любого p функция T^p определяет p-ый элемент выходного сверхслова. Функции T^p, где $p = 1, \dots, h$, будем называть порождающими. Нетрудно убедиться, что для задания дефинитного автомата необходимо задать высоту автомата и порождающие функции.

Множество всех дефинитных автоматов обозначим $\mathcal{P}_a$. Для $T \in \mathcal{P}_a$ через $h(T)$ обозначим наименьшую высоту автомата T.

Пусть $M \subseteq \mathcal{P}_a$. Фиксируем некоторое счётное множество $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$, элементы которого будем называть переменными. Индуктивно определим понятие терма над множеством M :

1) Если $u \in U$, то u — терм над M.
2) Если F — автомат с $n \in \mathbb{N}$ входами, $F \in M$, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ — термы над M, то выражение $F(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ — терм над M.

Термы, отличные от переменных, назовём собственными. Пусть τ — произвольный терм, $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — набор попарно различных переменных, содержащий все переменные, использованные при построении терма τ. Тогда через $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ обозначим функцию $\tau : E^m \to E$, определяемую индуктивно:

1) Если $\tau = x_c$ — переменная, $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^m) \in E^m$, то определим
$$\tau(x_1, x_2, \ldots, x_m)(\gamma) = \gamma^c.$$

2) Если $\tau = F(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^m) \in E^m$, то определим

$$\tau(x_1, x_2, \ldots, x_m)(\gamma) = F(\tau_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)(\gamma), \ldots, \tau_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)(\gamma)).$$

О функции T, такой что $T = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ для некоторого собственного терма τ над множеством M, будем говорить, что она получена термальными операциями из дефинитных автоматов множества M. Нетрудно проверить, что функция T также будет дефинитным автоматом, поэтому мы можем ввести на множестве $\mathcal{P}_a$ оператор замыкания $[\ ]$ относительно термальных операций — такое отображение, которое каждому множеству $M \subseteq \mathcal{P}_a$ сопоставляет множество $[M]$ всех автоматов, которые можно получить термальными операциями из автоматов множества M. Определённый выше оператор замыкания также известен как оператор замыкания относительно операции суперпозиции [4]. Нетрудно заметить, что дефинитные автоматы — это все автоматы, которые можно получить с помощью термальных операций из булевых функций и задержки.

Множество M называется замкнутым, если $[M] = M$; множество M называется полным, если $[M] = \mathcal{P}_a$. M называется предполным, если $[M] \neq \mathcal{P}_a$ и для любой $f \in \mathcal{P}_a \setminus M$ выполняется $[M \cup \{f\}] = \mathcal{P}_a$.

В данной работе доказывается

Теорема 1. *Мощность множества всех предполных классов в классе дефинитных автоматов равна континууму.*

2. Основные утверждения

Для произвольного автомата T высоты h с n входами и произвольного $p \geqslant h$ определим функцию $T^{-p} : ({E_2}^p)^n \to E_2$. Положим

$$T^{-p}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = T^p(\mathrm{invert}(\alpha_1), \mathrm{invert}(\alpha_2), \dots, \mathrm{invert}(\alpha_n)).$$

Заметим, что функция T^{-h} однозначно задаёт функцию T^h.

Далее определим отображение $T^\infty : E^n \to E$.

$$T^\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)(1) = T^{-h}(]_h x_1,]_h x_2, \dots,]_h x_n)$$
$$T^\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)(2) = T^{-h}([_h]_{h+1} x_1, [_h]_{h+1} x_2, \dots, [_h]_{h+1} x_n)$$
$$\dots$$
$$T^\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)(i) = T^{-h}([_h]_{h+i-1} x_1, [_h]_{h+i-1} x_2, \dots, [_h]_{h+i-1} x_n)$$
$$\dots$$

Отображение T^∞ в каком-то смысле действует также, как автомат T, но преобразует сверхслова не сначала, а как бы с конца. Можно сказать, что T^∞ имитирует поведение автомата T в обратную сторону, поэтому такое преобразование сохраняет операцию суперпозиции. Другими словами, для любых автоматов $T(x_1, \dots, x_n)$, $T_1(x_1, \dots, x_{m_1})$, $T_2(x_1, \dots, x_{m_2})$, $\dots$, $T_n(x_1, \dots, x_{m_n}) \in \mathcal{P}_a$, автомата

$$T_0(x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n}) = \\ = T(T_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}), \dots, T_n(x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n})),$$

а также для любых $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,m_n} \in E$ выполняется равенство

$$T_0^\infty(\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,m_n}) = \\ = T^\infty(T_1^\infty(\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}), \dots, T_n^\infty(\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,m_n})).$$

Также следует заметить, что отображение T^∞ не зависит от того, какую высоту выбрать в качестве h, минимальную или нет.

Определение 1. Говорим, что автомат $T \in P_a$ с n входами сохраняет множество $C \subseteq E$ на бесконечности, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in C$ выполняется

$$T^{\infty}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in C.$$

Нетрудно убедиться, что справедливо следующее

Утверждение 1. *Для любого $C \subseteq E$ множество всех автоматов, сохраняющих множество C на бесконечности, замкнуто.*

Для $C \subseteq E$ через $U^{\infty}(C)$ обозначим класс всех автоматов, сохраняющих C на бесконечности.

Пусть $\gamma \in E$. Построим последовательность слов $\delta_{\gamma,0}, \delta_{\gamma,1}, \delta_{\gamma,2}, \dots$ в алфавите $\{0, 1\}$. Пусть $\delta_{\gamma,0} = 01$, $\delta_{\gamma,i} = \delta_{\gamma,i-1}\delta_{\gamma,i-1}\gamma(i)\delta_{\gamma,i-1}$ для произвольного $i \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\alpha_{\gamma} = \delta_{\gamma,1}(1)\delta_{\gamma,2}(2)\delta_{\gamma,3}(3)\delta_{\gamma,4}(4)\dots.$$

Нетрудно убедиться, что для любого $i \in \mathbb{N}_0$ слово $\delta_{\gamma,i}$ является началом сверхслова α_{γ}.

Утверждение 2. *Для любого $\gamma \in E$ множество $U^{\infty}(\{\alpha_{\gamma}\})$ является предполным классом в $\mathcal{P}_a$.*

Утверждение 3. *Если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то $U^{\infty}(\{\alpha_{\gamma_1}\}) \neq U^{\infty}(\{\alpha_{\gamma_2}\})$.*

Доказательство теоремы 1. Учитывая, что всего дефинитных автоматов счётное количество, то мощность множества предполных классов не может быть больше, чем континуум. Из утверждений 2, 3 следует, что каждому $\gamma \in E$ соответствует предполный класс, и эти предполные классы попарно различны. Теорема доказана.

3. Доказательство утверждений 2 и 3

Лемма 1. *Для любого γ и любого $i \in \mathbb{N}_0$ выполняется $\alpha_{\gamma} = \delta_{\gamma,i}t_1\delta_{\gamma,i}t_2\delta_{\gamma,i}t_3\dots$, где $t_1, t_2, t_3, \dots \in \{0, 1, \Lambda\}$.*

Доказательство. Как мы уже отмечали, для любого j слово $\delta_{\gamma,j}$ является началом сверхслова α_γ. Значит достаточно доказать, что для любого $j > i$ слово $\delta_{\gamma,j}$ представляется в виде

$$\delta_{\gamma,i}t_1\delta_{\gamma,i}t_2\delta_{\gamma,i}t_3\dots t_l\delta_{\gamma,i},$$

где $t_1, t_2, t_3, \dots t_l \in \{0, 1, \Lambda\}$. Будем доказывать это по индукции. Для $j = i + 1$ это следует непосредственно из определения. Докажем шаг индукции. Пусть

$$\delta_{\gamma,j} = \delta_{\gamma,i}t_1\delta_{\gamma,i}t_2\delta_{\gamma,i}t_3\dots t_l\delta_{\gamma,i}.$$

Но $\delta_{\gamma,j+1} = \delta_{\gamma,j}\delta_{\gamma,j}c\delta_{\gamma,j}$, где $c \in \{0, 1\}$, значит $\delta_{\gamma,j+1}$ также представляется в таком виде. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 2. Легко проверить, что автомат, не зависящий от входа и возвращающий сверхслово 0^∞, не принадлежит $U^\infty(\{\alpha_\gamma\})$. Учитывая утверждение 1, получаем, что $[U^\infty(\{\alpha_\gamma\})] \neq \mathcal{P}_a$.

Пусть $T \notin U^\infty(\{\alpha_\gamma\})$, $h(T) = h$. Тогда

$$T^\infty(\alpha_\gamma, \alpha_\gamma, \dots, \alpha_\gamma) = \epsilon \neq \alpha_\gamma.$$

Рассмотрим минимальное j, такое что $\epsilon(j) \neq \alpha_\gamma(j)$. Рассмотрим i, такое что $|\delta_{\gamma,i}| > j + h$.

Пусть $\delta = [_h]_{j+h-1}\delta_{\gamma,i}$. Так как α_γ начинается с $\delta_{\gamma,i}$, то

$$T^{-h}(\delta, \delta, \dots, \delta) = \epsilon(j) \neq \alpha_\gamma(j) = \delta_{\gamma,i}(j) = \delta(1).$$

Из леммы 1 следует, что

$$\alpha_\gamma = \delta_{\gamma,i}t_1\delta_{\gamma,i}t_2\delta_{\gamma,i}t_3\dots$$

где $t_1, t_2, t_3, \dots \in \{0, 1, \Lambda\}$. Значит любое подслово длины $2|\delta_{\gamma,i}|$ сверхслова α_γ содержит слово $\delta_{\gamma,i}$. δ — подслово $\delta_{\gamma,i}$, значит любое подслово длины $2|\delta_{\gamma,i}|$ сверхслова α_γ содержит слово δ.

Рассмотрим произвольный автомат V с n входами. Покажем, что $V \in [U^\infty(\{\alpha_\gamma\}) \cup \{T\}]$. Пусть $h_0 = 2|\delta_{\gamma,i}| + h(V)$. Построим автомат $T_0(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ высоты h_0. Пусть

$$T_0^s(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}) = V^s(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n),$$

для $s = 1, 2, 3, \ldots, h_0 - 1$. Также положим

$$T_0^{-h_0}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}) = \begin{cases} \beta_1(1), \text{ если } \beta_1 = \beta_{n+1} \text{ и } \beta_1 \text{— подслово } \alpha_\gamma, \\ V^{-h_0}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Легко убедиться, что $T_0 \in U^\infty(\{\alpha_\gamma\})$. Покажем, что

$$T_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, T(x_1, x_1, \ldots, x_1)) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим произвольные $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in E$. Несложно проверить, что для любого $l \in \mathbb{N}$ либо $_{[h_0]}]_{l+h_0-1}\beta_1$ не является подсловом α_γ, либо δ является подсловом $_{[h_0]}]_{l+h_0-1}\beta_1$ и

$$_{[h_0]}]_{l+h_0-1}\beta_1 \neq {}_{[h_0]}]_{l+h_0-1}T^\infty(\beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_1).$$

А значит

$$T_0^\infty(\beta_1, \beta_2, \ldots . \beta_n, T^\infty(\beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_1)) = V^\infty(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Из определения автомата T_0 следует, что в первые $h_0 - 1$ моментов времени он работает как V. Значит

$$T_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, T(x_1, x_1, \ldots, x_1)) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Отсюда следует, что $[\{T\} \cup U^\infty(\{\alpha_\gamma\})] = \mathcal{P}_a$. Утверждение установлено.

Лемма 2. *Если $a\delta = \delta c$, где $\delta \in {E_2}^r$, $a, c \in E_2$, то $a = c$ и $\delta = a^r$.*

Доказательство. Из условия следует, что для любого $j \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ выполняется $\delta(j) = \delta(j+1)$. При этом $\delta(1) = a$ и $\delta(r) = c$. Отсюда получаем, что $a = c$ и $\delta = a^r$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\delta\delta = \beta_1\delta\beta_2$, где $\delta \in {E_2}^r$, β_1, β_2 — непустые слова, то найдётся слово ξ, такое что $\delta = \xi^k$, где $k \geqslant 2$.*

Доказательство. Так как β_1 — начало слова δ, а β_2 — конец слова δ, то $\delta = \beta_1\beta_2$. Тогда $\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2 = \delta\delta = \beta_1\delta\beta_2$ и $\delta = \beta_2\beta_1$. Значит для любого $j \in \mathbb{N}$ выполняется $\delta^{j+1} = \beta_1\delta^j\beta_2$.

Пусть $\epsilon = \delta^\infty$, $|\beta_1| = s < |\delta|$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ выполняется $\epsilon(i) = \epsilon(i+s)$. Пусть c — наибольший общий делитель чисел s и $|\delta|$. Тогда ϵ можно представить в виде ξ^∞, где $|\xi| = c$. Тогда $\delta = \xi^{|\delta|/c}$. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 3. Покажем, что существует автомат T, такой что $T \notin U^\infty(\{\alpha_{\gamma_1}\})$ и $T \in U^\infty(\{\alpha_{\gamma_2}\})$. Пусть m — максимальное число, такое что $\delta_{\gamma_1,m} = \delta_{\gamma_2,m}$. Обозначим $\delta_{\gamma_1,m}$ через δ. Для определённости будем полагать, что $\delta_{\gamma_1,m+1} = \delta\delta 0\delta$, а $\delta_{\gamma_2,m+1} = \delta\delta 1\delta$. Из леммы 1 следует, что

$$\alpha_{\gamma_2} = \delta\delta 1\delta t_1 \delta\delta 1\delta t_2 \delta\delta 1\delta t_3 \ldots,$$

где $t_1, t_2, t_3, \ldots \in \{0, 1, \Lambda\}$.

Построим искомый автомат T высоты $h = 3|\delta|+1$ с одним входом. Пусть $T^s(\beta) = 0$ для любого $\beta \in {E_2}^s$ и любого $s \in \{1, 2, \ldots, h-1\}$. Положим $T^{-h}(\beta) = \overline{\beta(1)}$, если $\beta = \delta\delta 0\delta$ и $T^{-h}(\beta) = \beta(1)$ иначе.

Рассмотрим максимальное k, такое что для какого-то ξ выполняется $\xi^k = \delta$. Так как $\delta_{\gamma_2,0} = 01$, то $|\xi| \geqslant 2$.

Легко проверить, что $T \notin U^\infty(\{\alpha_{\gamma_1}\})$. Покажем, что $T \in U^\infty(\{\alpha_{\gamma_2}\})$. Для этого достаточно доказать, что слово $\delta\delta 0\delta$ не является подсловом сверхслова α_{γ_2}. Предположим, что это не так, тогда $\xi^k\xi^k 0\xi^k$ является подсловом слова $\xi^k\xi^k 1\xi^k t_i \xi^k\xi^k 1\xi^k$. Из лемм 2 и 3 следует, что либо $\xi \in \{0^{|\xi|}, 1^{|\xi|}\}$, либо $\xi = {\xi_0}^j$ для какого-то $j \geqslant 2$. Первый случай невозможен, так как $\delta_{\gamma_2,0} = 01$. Второй случай невозможен, так как мы выбрали максимальное k, такое что для какого-то ξ выполняется $\xi^k = \delta$. Получили противоречие. Значит $T \in U^\infty(\{\alpha_{\gamma_2}\})$ и утверждение доказано.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 493–496.

[2] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155.

[3] Буевич В. А., Клиндухова Т. Э. Об алгоритмической неразрешимости задач об А-полноте и полноте для дефинитных ограниченно-детерминированных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 10. 2001.

[4] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.