

Кодирование изображений, инвариантное относительно проективных преобразований

Д. В. Алексеев

Определение 1. Ориентированным углом $\angle AOB$ будем называть величину α , если поворот на угол $0 \leq \alpha \leq \pi$ в положительном направлении (то есть против часовой стрелки) относительно точки O переводит луч OA в луч OB и $\angle AOB = -\alpha$ если поворот на угол α в отрицательном направлении (то есть по часовой стрелке) переводит луч OA в луч OB .

Кодирующая функция T задается с помощью двойного отношения:

Определение 2. Двойным отношением прямых OA , OB , OC и OD называют величину $[A, B, C, D]_O = \frac{\sin \angle AOC}{\sin \angle BOC} : \frac{\sin \angle AOD}{\sin \angle BOD}$, где все углы рассматриваются как ориентированные. Если же какой либо из знаменателей обращается в ноль будем обозначать это (формально) $[A, B, C, D]_O = \infty$.

Определение 3. Проективной плоскостью $\bar{\mathbb{P}}$ будем называть множество $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, причем наборы (x, y, z) и (kx, ky, kz) , $(k \neq 0)$ соответствуют одной и той же точке проективной плоскости. Геометрически проективная плоскость представляет собой объединение плоскости и множества бесконечно удаленных точек, образующих бесконечно удаленную прямую.

В дальнейшем везде будет использоваться проективная плоскость, а для обычной плоскости будут даны некоторые комментарии.

Определение 4. Проективное преобразование переводит $(x, y, z) \mapsto (x, y, z)A$, $(\det A \neq 0)$.

Замечание 1. Корректность определения очевидна: $(kx, ky, kz) \mapsto (x, y, z)A \cdot k$

Замечание 2. Геометрически проективное преобразование соответствует следующему: Пусть заданы проективные плоскости Π и Π' и точка O , не принадлежащая ни одной из них. Выберем произвольную собственную точку $A \in \Pi$ и рассмотрим прямую OA . Возможны два случая:

1. $OA \cap \Pi' = A'$ — некоторая собственная точка Π' .

2. $OA \parallel \Pi'$. Тогда в качестве A' берем бесконечно удаленную точку, соответствующую направлению OA . Выберем произвольную бесконечно удаленную точку $A(\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \in \Pi$ и рассмотрим прямую l , проходящую через точку A и имеющую направление α . Возможны два случая:

1. $l \cap \Pi' = A'$ — некоторая собственная точка Π' .

2. $l \parallel \Pi'$. Тогда в качестве A' берем бесконечно удаленную точку, соответствующую направлению прямой l . Таким образом для произвольной точки A строится ее образ A' .

Пусть \mathfrak{A} — конечное множество точек проективной плоскости. Пусть задана биекция $M : \mathfrak{A} \leftrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ — нумерация точек и кодирующая функция $T : \overline{\mathbb{P}}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \cdot C_{n-1}^4}$, ставящая множеству \mathfrak{A} в соответствие множество $\rho_s; i, j, k, l = [M^{-1}(i), M^{-1}(j), M^{-1}(k), M^{-1}(l)]_{M^{-1}(s)}$ — двойные отношения четверок прямых, для тех пятерок, для которых оно определено.

Определение 5. Кодом изображения \mathfrak{A} будем называть пару $\langle M, T(\mathfrak{A}, M) \rangle$.

Определение 6. Изображения \mathfrak{A} и \mathfrak{B} будем называть эквивалентными относительно кодирующей функции T , если существуют нумерации M_1 и M_2 , такие, что $T(\mathfrak{A}, M_1) = T(\mathfrak{B}, M_2)$.

Определение 7. Изображения \mathfrak{A} и \mathfrak{B} будем называть проективно эквивалентными (π -эквивалентными), если существует проективное преобразование $\mathcal{P} : \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{B}$.

Определение 8. Изображение \mathfrak{A} будем называть плоским проективным изображением, если не существует трех прямых l_1, l_2 и l_3 таких, что $\mathfrak{A} \subset l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

Теорема 1. *Плоские проективные изображения эквивалентны тогда и только тогда, когда они π -эквивалентны.*

Доказательство. В доказательстве используются следующие леммы:

Лемма 2. (см. [3].) *Пусть \mathcal{P} — проективное преобразование, и точки O, A, B, C, D таковы, что никакие две прямые из OA, OB, OC и OD не совпадают. Тогда $[A, B, C, D]_O = [\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B), \mathcal{P}(C), \mathcal{P}(D)]_{\mathcal{P}(O)}$. Другими словами, двойное отношение инвариантно относительно проективных преобразований.*

Лемма 3. (см. [7].) *Пусть заданы две четверки точек $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \bar{\Pi}$ и $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \bar{\Pi}$ так, что никакие три не лежат на одной прямой. Тогда существует единственное проективное преобразование \mathcal{P} , такое, что $\mathcal{P}(A_i) = B_i, i=1,2,3,4$.*

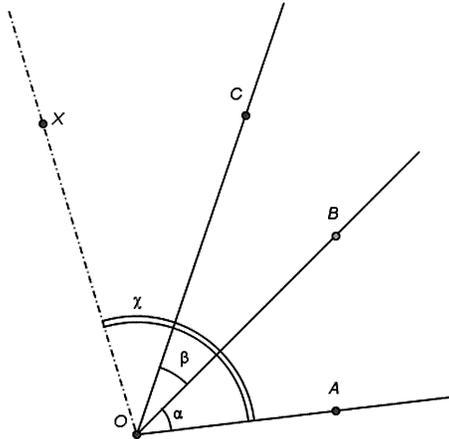


Рис. 1.

Лемма 4. *Пусть заданы точки O, A, B, C , так, что никакие три не лежат на одной прямой и число $\kappa \in \mathbb{R}$. Тогда геометрическим местом точек X таких, что $[A, B, C, X]_O = \kappa$ является $l \setminus \{O\}$, где l — некоторая прямая, проходящая через точку O .*

Доказательство. Обозначим $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$ и $\angle AOX = \chi$ (см. рис.1). Проводя преобразования, получим, что $[A, B, C, X]_O = \kappa$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{ctg} \chi = \frac{\kappa \cdot \cos \alpha \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\kappa \cdot \sin(\beta) \sin(\alpha + \beta)} \equiv \operatorname{const}$. Геометрическое место таких точек — прямая l , проходящая через O образующая с OA угол $\chi = \operatorname{arctg} \frac{\kappa \cdot \cos \alpha \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\kappa \cdot \sin(\beta) \sin(\alpha + \beta)}$.

Лемма 5. 1) Если $[A, B, C, D]_O = 1$, то точки A, O, B , или C, O, D лежат на одной прямой. 2) Если $[A, B, C, D]_O = 0$, то точки A, O, C или B, O, D лежат на одной прямой. 3) Если $[A, B, C, D]_O$ не определено, то точки B, O, C или A, O, D лежат на одной прямой.

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из определения двойного отношения.

Лемма 6. Пусть известен код плоского проективного изображения \mathfrak{A} . Тогда существует алгоритм, позволяющий для любой тройки точек определить, лежат ли они на одной прямой или нет.

Доказательство. Обозначим эти три точки O, A , и D . Если они лежат на одной прямой, то для всех $B, C \in \mathfrak{A}$ величина $[A, B, C, D]_O$ не определена (по лемме 5). Таким образом, если указанная величина определена хотя бы для одной пары точек $B, C \in \mathfrak{A}$, то гарантированно точки O, A , и D не коллинеарны.

Пусть теперь $\forall B, C \in \mathfrak{A}$ величина $[A, B, C, D]_O$ не определена. Предположим, что O, A , и D не коллинеарны. Тогда, по лемме 5 коллинеарны O, B и C . Из произвольности $B, C \in \mathfrak{A}$ вытекает, что если зафиксировать B и брать произвольные $C_i \in \mathfrak{A}$ то все точки C_i лежат на прямой OB (см рис. 2). Но в этом случае $\mathfrak{A} \subset OB \cup AD$, что противоречит определению плоского проективного изображения. Следовательно, точки O, A , и D обязательно лежат на одной прямой.

Доказательство (теоремы).

Из леммы 2 сразу же вытекает, что если \mathfrak{A} и \mathfrak{B} проективно эквивалентны, то они эквивалентны и относительно кодирующей функции T .

Докажем в обратную сторону. Рассмотрим точки $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ никакие три из которых не лежат на одной прямой. Такая четверка

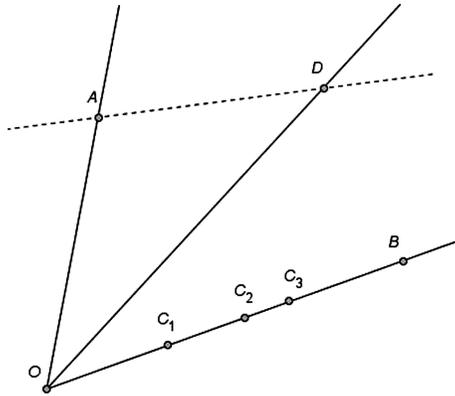


Рис. 2.

всегда существует, так как \mathfrak{A} — плоское проективное изображение. Пусть им соответствуют точки B_i $i=1,2,3,4$. По лемме 3 найдется проективное преобразование \mathcal{P} , переводящее A_i в B_i , $i=1,2,3,4$. Рассмотрим произвольную точку $A' \in \mathfrak{A}$. Рассмотрим следующие случаи:

1. A' не лежит на прямых A_1A_2 , A_1A_3 и A_1A_4 . Тогда двойное отношение $\varkappa = [A'A_2A_3A_4]_{A_1}$ определено и не равно 0. По лемме 2 таким же будет и $[\tilde{B}B_2B_3B_4]_{B_1} = \varkappa$, где \tilde{B} — образ A' при проективном преобразовании \mathcal{P} . Но по лемме 4 из этого следует, что точка \tilde{B} должна лежать на прямой $l' = B_1B'$, где $B' \in \mathfrak{B}$ — точка, соответствующая A' . Если точка \tilde{B} лежит на какой-либо прямой \tilde{l} , соединяющих данные точки, но не проходящей, через A_1 , то точка B' тоже должна лежать на этой прямой \tilde{l} . Таким образом $\tilde{B} = B' = l' \cap \tilde{l}$, что и требовалось доказать.

Список литературы

- [1] Горшкова Л. С., Паньженский В. И., Марина Е. В. Проективная геометрия: учебное пособие. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
- [2] Ефимов Н. В. Высшая геометрия, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
- [3] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2, Геометрия, М.: Наука, 1987, С. 44–45.

- [4] Козлов В. Н. Элементы математической теории зрительного восприятия, М.: Изд. ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001.
- [5] Козлов В. Н. О кодировании дискретных фигур // Дискретная математика. Т. 8. Вып. 4. 1996, С. 57–61.
- [6] Кокстер Х. С. М. Действительная проективная плоскость. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.
- [7] Юнг Дж. В. Проективная геометрия, М.: ИЛ, 1949.