О реализации автоматов нейронными сетями*

С. В. Моисеев

В работе исследуются функциональные возможности нейронных сетей. Изучается проблема реализуемости автомата нейронной сетью, моделируемости автомата при разрешённой перекодировке входных и выходных символов и проблема существования моделирующей кодировки. В каждом случае выявлены критериальные условия.

1. Введение

Исследование функциональных возможностей нейронных сетей ведётся, начиная с основополагающей работы У. С. Мак-Каллока и В. Питтса [4], в которой поведение нейронных сетей описано в терминах специальных временны́х пропозициональных выражений, и С. К. Клини [3], в которой, пользуясь современной терминологией, было показано, что каждый конечный автомат моделируем нейронной сетью с задержкой в два такта. Однако, после работы М. Минского [5], в которой также приводится конструкция нейронной сети, повторяющей функционирование заданного конечного автомата с некоторой временно́й задержкой, интерес к рассматриваемой проблеме угас. Тем не менее, вопрос о том, какие в точности автоматы представимы нейронной сетью (без временно́й задержки), оставался открыт.

---

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 06–01–00240).

Задачей настоящего исследования является изучение возможностей нейронных сетей Мак-Каллока—Питтса безотносительно к их структурной реализации; акцент ставится как на их собственные функциональные способности (то есть способности перерабатывать информацию во времени), так и на возможность моделирования определённого поведения во времени. Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать нейронную сеть как автомат, порождённый из простых составляющих — формальных нейронов. Нейрон мы определяем как автоматное отображение, вычисляющее пороговую булеву функцию от своих входов с единичной временно́й задержкой; нейронные сети, при этом, естественно определить как автоматные отображения, получающиеся из нейронов применением операций подстановки и обратной связи. Подобное автоматное представление не нагружено сведениями о топологии сети, а несёт лишь информацию о функционировании во времени, что позволяет абстрагироваться от структурного исполнения в сторону поведенческих аспектов нейросетей.

Использованный подход к определению нейронной сети переводит задачу в область теории функциональных систем автоматов. Это удобно, поскольку для класса автоматов, получающихся применением суперпозиции и обратной связи из некоторого множества функций с задержками, (в частности, для нейронных сетей) можно привести довольно простой структурный критерий принадлежности автомата этому классу, что и было проделано в работе.

Нейрон, как основа сетей Мак-Каллока—Питтса, базируется на понятии пороговой функции, имеющей геометрические основания — линейную отделимость множеств. Сами пороговые функции обычно задаются вектором числовых множителей — нормалью к разделяющей гиперплоскости. Такое задание неоднозначно и потому неудобно в нашем случае. В данной работе представлен иной взгляд на пороговые функции: им даётся определение комбинаторного характера, инвариантное к геометрической интерпретации. Это определение обобщается на случай функций с произвольной областью определения: вводится понятие перестановочной функции, которое, в конечном счёте, и оказалось ключевым при описании автоматов, реализуемых нейронными сетями.

Структура работы следующая: в разделе 2 изучаются свойства пороговых булевых функций, даётся определение перестановочного отношение и порогового предпорядка; в разделе 3 вводится понятие автоматного отображения, формального нейрона и нейронной сети, приводится структурный критерий принадлежности автоматного отображение классу нейронных сетей; раздел 4 содержит изложение основного результата работы — характеризация автоматов, реализуемых нейронной сетью с точки зрения свойств их функций переходов и выходов.

Замечание об обозначениях.

Через $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ мы обозначаем упорядоченный набор элементов $a_1, \ldots, a_n$, через $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ — декартово произведение множеств $A_1, \ldots, A_n$ (то есть множество всех наборов $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, где $a_k \in A_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$), через $\{0,1\}^m$ — декартово произведение m экземпляров множества $\{0,1\}$. Если $f\colon A \to B$ — функция из A в B, $a \in A$, через $f\, a$ обозначаем результат применения функции f к элементу a. Аналогично, пользуясь бесскобочной записью, через $f\, g$ обозначаем суперпозицию функции f и g (подстановку функции g в f).

Символ $\leftrightharpoons$ читается «положим по определению» и используется для присвоения значения нововводимому символу (например, запись $a \leftrightharpoons 0$ определяет символ a равным нулю), тогда как знак равенства $=$ служит для обозначения совпадения значений элементов.

2. Пороговые функции и их обобщение

2.1. Пороговые функции

Пусть $\mathbb{Z} \leftrightharpoons \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, $\mathbb{N} \leftrightharpoons \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множества целых и целых положительных чисел соответственно. m-местная ($m \in \mathbb{N}$) *булева* функция — это функция вида $f\colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$. Нульместная булева функция — это константа из $\{0,1\}$.

Булева функция f называется *пороговой*, если существует такой весовой вектор $w = \langle w^1, \ldots, w^m \rangle \in \mathbb{Z}^m$ и такое число $h \in \mathbb{Z}$, называемое порогом, что для всех $x = \langle x^1, \ldots, x^m \rangle \in \{0,1\}^m$ имеет место равенство

$$f\, x = \operatorname{sign}(w^1 \cdot x^1 + \ldots + w^m \cdot x^m - h),$$

где $\operatorname{sign}\colon \mathbb{Z} \to \{0,1\}$; $\operatorname{sign} x = 1$, если $x \geqslant 0$, и $\operatorname{sign} x = 0$, если $x < 0$.

Множество всех наборов, на которых булева функция принимает единичное значение, образует отношение, называемое её *областью истинности*. Области истинности пороговых функций (и только их) будем называть *пороговыми отношениями*.

Скажем, что отношение $R \subseteq \{0,1\}^m$ *s-асуммируемо* ($s \in \mathbb{N}$), если для всех $a_1, \dots, a_s \in R$ и $b_1, \dots, b_s \in \{0,1\}^m \setminus R$

$$a_1 + \ldots + a_s \neq b_1 + \ldots + b_s$$

(наборы складываются покомпонентно как целочисленные векторы). Как известно в пороговой логике (см. [1, 2]), булева функция порогова тогда и только тогда, когда она s-асуммируема для каждого целого положительного s. Хотя это свойство пороговых функций было давно обнаружено, нижеприводимая его очевидная комбинаторная интерпретация (утверждение 1), по-видимому, не была замечена.

2.2. Перестановочные отношения

Об отношении

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_m$$

станем говорить, что оно *s-перестановочно* ($s \in \mathbb{N}$), если для любых s наборов $\langle a_1^1, \dots, a_1^m \rangle, \dots, \langle a_s^1, \dots, a_s^m \rangle \in R$ и любых перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_m\colon \{1, \dots, s\} \to \{1, \dots, s\}$ найдётся $i \in \{1, \dots, s\}$, такое что $\langle a^1_{\sigma_1(i)}, \dots, a^m_{\sigma_m(i)} \rangle \in R$. В противном случае, если существуют такие $a_1 = \langle a_1^1, \dots, a_1^m \rangle, \dots, a_s = \langle a_s^1, \dots, a_s^m \rangle \in A_1 \times \cdots \times A_m$ и такие перестановки $\sigma_1, \dots, \sigma_m\colon \{1, \dots, s\} \to \{1, \dots, s\}$, что

$$\langle a_1^1, \dots, a_1^m \rangle, \dots, \langle a_s^1, \dots, a_s^m \rangle \in R,$$
$$\langle a^1_{\sigma_1(1)}, \dots, a^m_{\sigma_m(1)} \rangle, \dots, \langle a^1_{\sigma_1(s)}, \dots, a^m_{\sigma_m(s)} \rangle \notin R,$$

будем говорить, что на наборах $a_1, \dots, a_s$ при перестановках $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ *нарушается s-перестановочность* отношения R. Отношения, s-перестановочные для всех $s \in \mathbb{N}$, назовём *перестановочными*. Функцию $f\colon U \to \{0,1\}$ назовём *s-перестановочной*, если s-перестановочна её область истинности.

Утверждение 1. *Для булевой функции* $f\colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ *свойство* s*-асуммируемости равносильно* s*-перестановочности.*

Доказательство. Вытекает из того, что для $a_1 = \langle a_1^1, \ldots, a_1^m \rangle, \ldots, a_s = \langle a_s^1, \ldots, a_s^m \rangle$, $b_1 = \langle b_1^1, \ldots, b_1^m \rangle, \ldots, b_s = \langle b_s^1, \ldots, b_s^m \rangle \in \{0,1\}^m$ условие $a_1 + \ldots + a_s = b_1 + \ldots + b_s$ равносильно тому, что существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_m\colon \{1, \ldots, s\} \to \{1, \ldots, s\}$, такие что $\langle a^1_{\sigma_1(i)}, \ldots, a^m_{\sigma_m(i)} \rangle = \langle b_i^1, \ldots, b_i^m \rangle$ для всех $i \in \{1, \ldots, s\}$. Утверждение доказано.

Следствие. *Булева функция порогова тогда и только тогда, когда она перестановочна.*

2.3. Перестановочность как гомоморфизм отношений

Зафиксируем некоторое множество A и для целого положительного s введём два специальных $2s$-местных отношения:

$$\begin{aligned}\text{Пер}_s(A) \leftrightharpoons \big\{ \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s \rangle \in A^{2s} \mid{} & \\ \big(\exists \text{ перестановка } \sigma\colon \{1, \ldots, s\} \to \{1, \ldots, s\}\big) & \\ \big(a_1 = b_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge a_s = b_{\sigma(s)}\big) \big\};&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_s(A) \leftrightharpoons \big\{ \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s \rangle \in A^{2s} \mid{} & \\ \big(a_1 = \ldots = a_s\big) \ \to\ \big(a_1 = b_1 = \ldots = b_s\big) \big\}.&\end{aligned}$$

Скажем, что функция $f\colon A^m \to \{0,1\}$ *переводит* отношение $\text{Пер}_s(A)$ в $Z_s(A)$, если для всех $a_1 = \langle a_1^1, \ldots, a_1^m \rangle, \ldots, a_s = \langle a_s^1, \ldots, a_s^m \rangle \in A^m$ и $b_1 = \langle b_1^1, \ldots, b_1^m \rangle, \ldots, b_s = \langle b_s^1, \ldots, b_s^m \rangle \in A^m$ выполнено

$$\begin{aligned}\big(\forall j \in \{1, \ldots, m\}\ \langle a_1^j, \ldots, a_s^j, b_1^j, \ldots, b_s^j \rangle \in \text{Пер}_s(A)\big) \to & \\ \to \big\langle f\,a_1, \ldots, f\,a_s, f\,b_1, \ldots, f\,b_s \big\rangle \in Z_s.&\end{aligned}$$

Следующее утверждение является простой переформулировкой определения s-перестановочности:

Утверждение 2. *Всякая функция* $f\colon A^m \to \{0,1\}$ *является* s*-перестановочной в точности тогда, когда она переводит отношение* $\text{Пер}_s(A)$ *в* $Z_s(A)$.

2.4. Свойства перестановочных отношений

Утверждение 3. *Функция* $f\colon A_1 \times \dots \times A_m \to \{0,1\}$, *представимая суперпозицией*

$$f\langle a^1,\dots,a^m\rangle = \\ = T\langle \lambda_1^1(a^1),\dots,\lambda_1^{d_1-d_0}(a^1),\dots,\lambda_m^1(a^m),\dots,\lambda_m^{d_m-d_{m-1}}(a^m)\rangle$$

некоторой s*-перестановочной функции* $T\colon B_1\times\ldots\times B_d \to \{0,1\}$ *и одноместных функций* $\lambda_i^j\colon A_i \to B_{d_{i-1}+j}$ *(*$1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant d_i-d_{i-1}$, $0=d_0\leqslant d_1\leqslant\ldots\leqslant d_m=d$*), также* s*-перестановочна.*

Доказательство. Если функция f не является s-перестановочной, то на каких-то наборах $\langle a_1^1,\dots,a_1^m\rangle,\dots,\langle a_s^1,\dots,a_s^m\rangle\in A_1\times\ldots\times A_m$, при некоторых перестановках $\sigma_1,\dots,\sigma_m\colon\{1,\dots,s\}\to\{1,\dots,s\}$ нарушается её s-перестановочность. Но тогда на наборах $b_1,\dots,b_s$, где

$$b_i=\langle \lambda_1^1(a_i^1),\dots,\lambda_1^{d_1-d_0}(a_i^1),\dots,\lambda_m^1(a_i^m),\dots,\lambda_m^{d_m-d_{m-1}}(a_i^m)\rangle,$$

при перестановках $\underbrace{\sigma_1,\dots,\sigma_1}_{d_1-d_0},\dots,\underbrace{\sigma_m,\dots,\sigma_m}_{d_m-d_{m-1}}$ нарушается и s-перестановочность функции T, что противоречит условию. Утверждение доказано.

Для отношения $R\subseteq U$ определим его *характеристическую* функцию $\chi_R\colon U\to\{0,1\}$ условием $\chi_R\,u=1\leftrightarrow u\in R$.

Утверждение 4. *Пусть* $U_k=\{\mathbf{u}_{k,1},\dots,\mathbf{u}_{k,d_k}\}$ *(*$1\leqslant k\leqslant n$*). Отношение* $R\subseteq U_1\times\ldots\times U_n\times\{0,1\}_1\times\ldots\times\{0,1\}_m$ s*-перестановочно тогда и только тогда, когда* s*-перестановочна булева функция* $T_R\colon\{0,1\}^{d_1+\ldots+d_n+m}\to\{0,1\}$,

$$T_R\langle u^{1,1},\dots,u^{1,d_1},\dots,u^{n,1},\dots,u^{n,d_n},a^1,\dots,a^m\rangle \risingdotseq \\ \risingdotseq \begin{cases} 0, & \text{если } \exists k\in\{1,\dots,n\}\langle u^{k,1},\dots,u^{k,d_k}\rangle=\langle 0,\dots,0\rangle;\\ \chi_R(\mathbf{u}_{1,s_1},\dots,\mathbf{u}_{n,s_n},a^1,\dots,a^m), & \text{если } \forall k\in\{1,\dots,n\} \\ \qquad \exists q_k\in\{1,\dots,d_k\}\langle u^{k,1},\dots,u^{k,d_k}\rangle=\langle\underbrace{0,\dots,0}_{q_k-1},1,0,\dots,0\rangle; \\ 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $c_1,\ldots,c_s\in\{0,1\}^{d_1+\ldots+d_n+m}$,

$$c_i=\langle u_i^{1,1},\ldots,u_i^{1,d_1},\ldots,u_i^{n,1},\ldots,u_i^{n,d_n},a_i^1,\ldots,a_i^m\rangle.$$

Для $i\in\{1,\ldots,s\}$, $l\in\{1,\ldots,n\}$ введём $u_i^l\leftrightharpoons\langle u_i^{l,1},\ldots,u_i^{l,d_l}\rangle$, $a_i\leftrightharpoons\langle a_i^1,\ldots,a_i^m\rangle$. Пусть

$$\sigma_{1,1},\ldots,\sigma_{n,d_n},\rho_1,\ldots,\rho_m\colon\{1,\ldots,s\}\to\{1,\ldots,s\}$$

— перестановки, а $\widetilde{u}_j^1,\ldots,\widetilde{u}_j^n,\widetilde{a}_j$ — наборы, получающиеся из наборов $u_i^1,\ldots,u_i^n,a_i$ при перестановках $\sigma_{1,1},\ldots,\sigma_{n,d_n},\rho_1,\ldots,\rho_m$, то есть

$$\widetilde{u}_i^j=\langle u^{j,1}_{\sigma_{j,1}(i)},\ldots,u^{j,d_j}_{\sigma_{j,d_j}(i)}\rangle,$$
$$\widetilde{a}_i=\langle a^1_{\rho_1(i)},\ldots,a^m_{\rho_m(i)}\rangle.$$

Предположим, что на наборах $c_1,\ldots,c_k$ функция T_R принимает нулевое значение. Из определения функции T_R следует, что тогда для любых $i\in\{1,\ldots,s\}$ и $j\in\{1,\ldots,n\}$ вектор u_i^j содержит не более одной единицы. Если найдутся такие $i\in\{1,\ldots,s\}$ и $j\in\{1,\ldots,n\}$, что $\widetilde{u}_i^j=\langle 0,\ldots,0\rangle$, то $T_R(\widetilde{u}_i^{1,1},\ldots,\widetilde{u}_i^{n,d_n},\widetilde{a}_i^1,\ldots,\widetilde{a}_i^m)=0$. В противном случае для любых $i\in\{1,\ldots,s\}$ и $j\in\{1,\ldots,n\}$ вектор $\widetilde{u}_i^j$ содержит ровно одну единицу (а следовательно, и вектор u_i^j содержит ровно одну единицу). Однако, поскольку тогда для каждого $i\in\{1,\ldots,s\}$

$$T_R\,\langle u_i^{1,1},\ldots,u_i^{n,d_n},a_i^1,\ldots,a_i^m\rangle=$$
$$=\chi_R\,\langle\mathbf{u}_{1,p_{i,1}},\ldots,\mathbf{u}_{n,p_{i,n}},a_i^1,\ldots,a_i^m\rangle=0,$$
$$T_R\,\langle\widetilde{u}_i^{1,1},\ldots,\widetilde{u}_i^{n,d_n},\widetilde{a}_i^1,\ldots,\widetilde{a}_i^m\rangle=\chi_R\,\langle\mathbf{u}_{1,r_{i,1}},\ldots,\mathbf{u}_{n,r_{i,n}},\widetilde{a}_i^1,\ldots,\widetilde{a}_i^m\rangle,$$

где $p_{i,j}$ находится из соотношения $u_i^{j,p_{i,j}}=1$, а $r_{i,j}$ — из соотношения $\widetilde{u}_i^{j,r_{i,j}}=1$. Следовательно, для каждого $j\in\{1,\ldots,n\}$ набор $\langle\mathbf{u}_{j,q_{1,j}},\ldots,\mathbf{u}_{j,q_{s,j}}\rangle$ может быть получен перестановкой компонент набора $\langle\mathbf{u}_{j,r_{1,j}},\ldots,\mathbf{u}_{j,r_{s,j}}\rangle$, а следовательно, ввиду s-перестановочности отношения R, для некоторого $i\in\{1,\ldots,s\}$ функция T_R принимает нулевое значение на наборе $\langle\widetilde{u}_i^{1,1},\ldots,\widetilde{u}_i^{n,d_n},\widetilde{a}_i^1,\ldots,\widetilde{a}_i^m\rangle$.

Достаточность. Для $i\in\{1,\ldots,n\}$ рассмотрим функции $\lambda_i^1,\ldots,\lambda_i^{d_i}\colon Q_i\to\{0,1\}$, определяемые соотношением

$$\langle\lambda_i^1(\mathbf{u}_{i,q_i}),\ldots,\lambda_i^{d_i}(\mathbf{u}_{i,q_i})\rangle=\langle\underbrace{0,\ldots,0}_{q_i-1},1,0,\ldots,0\rangle.$$

По построению $\chi_R \langle u_1, \ldots, u_n, a_1, \ldots, a_m\rangle = T_R \langle \lambda_1^1(u_1), \ldots, \lambda_1^{d_1}(u_1), \ldots, \lambda_n^1(u_n), \ldots, \lambda_n^{d_n}(u_n)\rangle$ — в соответствии с утверждением 3 функция χ_R, а вместе с ней и отношение R, перестановочна. Утверждение доказано.

2.5. Свободнопороговые отношения

Двуместное отношение $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$ назовём *свободнопороговым*, если соответствующие ему $(m+1)$-местное отношение

$$R_P \leftrightharpoons \{\langle u, a^1, \ldots, a^m\rangle \mid \langle u, \langle a^1, \ldots, a^m\rangle\rangle \in P\}$$

перестановочно.

Введём на множестве $\{0,1\}^m$ скалярное произведение, положив для $a_1 = \langle a_1^1, \ldots, a_1^m\rangle$, $a_2 = \langle a_2^1, \ldots, a_2^m\rangle$

$$(a_1 \cdot a_2) \leftrightharpoons \sum_{k=1}^{m} a_1^k \cdot a_2^k.$$

Утверждение 5. *Отношение $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$ свободнопорогово тогда и только тогда, когда существует $w \in \mathbb{Z}^m$ и такое отображение $\tau\colon U \to \mathbb{Z}$, что*

$$\langle u, a\rangle \in P \leftrightarrow \tau(u) \leqslant (w \cdot a).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Отношение P свободнопорогово, поэтому отношение R_P из его определения перестановочно. Рассмотрим булеву функцию $T\colon \{0,1\}^{|U|+m} \to \{0,1\}$ из утверждения 4, соответствующую отношению R_P. Она порогова, поэтому найдутся такие $w \in \mathbb{Z}^m$, $v = \langle v^1, \ldots, v^n\rangle \in \mathbb{Z}^n$, $h \in \mathbb{Z}$, что для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место эквиваленция

$$T\langle \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0, a^1, \ldots, a^m\rangle = 1 \leftrightarrow h - v^k \leqslant (w \cdot a),$$

где $a = \langle a^1, \ldots, a^m\rangle$. В качестве отображения τ теперь можно выбрать

$$\tau\colon \mathbf{u}_k \mapsto h - v^k.$$

Достаточность. Удостоверимся в пороговости функции T, соответствующей отношению R_P. Пусть $|w| = |w^1| + \ldots + |w^m|$, $\tau_{\min} \leftrightharpoons$

$\min\{\tau(\mathbf{u}_1), \ldots, \tau(\mathbf{u}_n)\}$, $v \leftrightharpoons \langle v^1, \ldots, v^n \rangle$, где $v^k = -\tau(\mathbf{u}_k) + 2|\tau_{\min}| + |w| + 1 \geqslant |\tau_{\min}| + |w| + 1$. Тогда для всех $u = \langle u^1, \ldots, u^n \rangle \in \{0,1\}^n$ и $a = \langle a^1, \ldots, a^m \rangle \in \{0,1\}^m$

$$T\,\langle u^1, \ldots, u^n, a^1, \ldots, a^m \rangle = 1 \;\leftrightarrow\; \big((v \cdot u) + (w \cdot a) \geqslant 2|\tau_{\min}| + |w| + 1\big),$$

откуда и следует пороговость функции T. Утверждение доказано.

Таким образом, если отношение $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$ свободнопорогово, то для каждого $u \in U$ множество

$$M_u \leftrightharpoons \{a \in \{0,1\}^m \mid \langle u, a \rangle \in P\}$$

представляет собой пороговое отношение; при этом, для множеств M_u ($u \in U$) (как подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^m$) можно так подобрать отделяющие гиперплоскости, что они (гиперплоскости) будут параллельны (то есть задаваться одним вектором $w \in \mathbb{Z}^m$). Иными словами, свободнопороговое отношение есть не что иное, как способ задания семейства пороговых функций, получающихся из одной пороговой функции изменением величины порога (своеобразной пороговой функции со «свободным» порогом); элементы множества U, при этом, играют роль величины порога.

2.6. Пороговый предпорядок

Утверждение 6. *Отношение $P \subseteq U \times A$ является 2-перестановочным тогда и только тогда, когда существует такая биекция $\lambda\colon \{1, \ldots, |U|\} \to U$, что*

$$\{a \in A \mid \langle \lambda(1), a \rangle \in P\} \subseteq \ldots \subseteq \{a \in A \mid \langle \lambda(|U|), a \rangle \in P\}.$$

Как вытекает из этого утверждения, по любому 2-перестановочному отношению $P \subseteq U \times A$ можно построить предпорядок $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P)$ (рефлексивное и транзитивное отношение) на множестве A, такой что

$$\langle a_0, a_1 \rangle \in \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P) \leftrightarrow \{u \in U \mid \langle u, a_0 \rangle \in P\} \subseteq \{u \in U \mid \langle u, a_1 \rangle \in P\},$$

который, в свою очередь, порождает отношение эквивалентности $\overset{\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P)}{\sim}$:

$$a_0 \overset{\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P)}{\sim} a_1 \leftrightharpoons \langle a_0, a_1 \rangle \in \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P) \wedge \langle a_1, a_0 \rangle \in \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P).$$

Аналогично определим предпорядок $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P)$ и отношение эквивалентности $\overset{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P)}{\sim}$ на множестве U условием

$$\langle u_0, u_1\rangle \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P) \leftrightarrow \{a \in A \mid \langle u_0, a\rangle \in P\} \subseteq \{a \in A \mid \langle u_1, a\rangle \in P\},$$

$$u_0 \overset{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P)}{\sim} u_1 \leftrightarrow \langle u_0, u_1\rangle \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P) \wedge \langle u_1, u_0\rangle \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P).$$

Альтернативой понятию свободнопорогового отношения может рассматриваться понятие *порогового предпорядка.* Предположим, что на множестве $\{0,1\}^m$ задан предпорядок $\preccurlyeq$. Будем называть его *пороговым* предпорядком на множестве $A_0 \subseteq \{0,1\}^m$, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) Элементы множества A_0 попарно $\preccurlyeq$-сравнимы:
$$(a_0 \preccurlyeq a_1 \vee a_1 \preccurlyeq a_0).$$
2) Существует такой вектор $w \in \mathbb{Z}^m$, что для всех $a_0, a_1 \in A_0$
$$\big(a_0 \preccurlyeq a_1 \wedge \neg(a_1 \preccurlyeq a_0)\big) \rightarrow (w \cdot a_0) < (w \cdot a_1).$$

Утверждение 7. *Пусть $A_0 \subseteq \{0,1\}^m$, $P_0 \subseteq U \times A_0$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *Отношение $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_0)$ является пороговым предпорядком на A_0.*
2) *Существует такой вектор $w \in \mathbb{Z}^m$ и отображение $\pi\colon U \rightarrow A_0 \cup \{+\infty\}$ ($+\infty \notin A_0$), что для всех $u \in U$ и $a \in A_0$*
$$(\pi(u) \neq +\infty) \rightarrow \big(\langle u, a\rangle \in P_0 \leftrightarrow (w \cdot \pi(u)) \leqslant (w \cdot a)\big).$$
3) *Существует такой вектор $w \in \mathbb{Z}^m$ и отображение $\tau\colon U \rightarrow \mathbb{Z}$, что для всех $u \in U$ и $a \in A_0$*
$$\langle u, a\rangle \in P_0 \leftrightarrow \tau(u) \leqslant (w \cdot a).$$
4) *Существует такое свободнопороговое отношение $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$, что*
$$P_0 = P \cap (U \times A_0).$$

Доказательство. Переход $1 \rightarrow 2$. Пусть $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_0)$ — пороговый предпорядок, а $w \in \mathbb{Z}^m$ — вектор из его определения, $U_0 \leftrightharpoons \{u \in U \mid \exists a \in A_0\ \langle u, a\rangle \in P_0\}$. Определим отображение π: для $u \in U_0$ положим $\pi(u)$

равным такому элементу множества $\{a \in A_0 \mid \langle u, a\rangle \in P_0\}$, на котором достигается минимум скалярного произведения $(w \cdot a)$; если же $u \notin U_0$, то положим $\pi(u) = +\infty$. Таким образом, если $\langle u, a\rangle \in P_0$, то $(w \cdot \pi(u)) \leqslant (w \cdot a)$. Верно и обратное: если $(w \cdot \pi(u)) \leqslant (w \cdot a)$, то $\langle \pi(u), a\rangle \in \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_0)$ (ввиду пороговости предпорядка $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_0)$), а так как $\langle u, \pi(u)\rangle \in P_0$, то $\langle u, a\rangle \in P_0$ (по определению $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_0)$).

Переход $2 \to 3$. Вектор w оставим тем же, а отображение τ определим так: если $\pi(u) \neq +\infty$, то положим $\tau(u) \leftrightharpoons (w \cdot \pi(a))$, если же $\pi(u) = +\infty$, то $\tau(u) \leftrightharpoons 1 + \max\{(w \cdot a) \mid a \in A_0\}$.

Переход $3 \to 4$. В качестве P можно взять отношение $P \leftrightharpoons \{\langle u, a\rangle \mid \tau(u) \leqslant (w \cdot a)\}$. В самом деле, как следует из утверждения 5, оно свободнопорогово; при этом по предположению $P \cap (U \times A_0) = P_0$.

Переход $4 \to 1$. Согласно утверждению 5, существует такой вектор $w \in \mathbb{Z}^m$ и отображение $\tau\colon U \to \mathbb{Z}$, что $\langle u, a\rangle \in P \leftrightarrow \tau(u) \leqslant (w \cdot a)$. Поэтому, во-первых, элементы множества A_0 попарно $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_0)$-сравнимы; а во-вторых, если $\langle a_0, a_1\rangle \in \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_0)$ и $\langle a_1, a_0\rangle \notin \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_0)$, то для некоторого $u \in U$ имеем $\langle u, a_1\rangle \in P_0$, но $\langle u, a_0\rangle \notin P_0$, и поэтому $(w \cdot a_0) < \tau(u) \leqslant (w \cdot a_1)$. Утверждение доказано.

Утверждение 8. *Предпорядок R на множестве $A_0 \subseteq \{0,1\}^m$ порогов тогда и только тогда, когда существует такое свободнопороговое отношение $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$, что $R = \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P) \cap (A_0 \times A_0)$.*

Доказательство. R — предпорядок, поэтому $R = \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(R)$. Из утверждения 7 следует, что найдётся свободнопороговое отношение $P \subseteq A_0 \times \{0,1\}^m$, такое что $R = P \cap (A_0 \times A_0)$ Следовательно, $R = \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(R) = \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P) \cap (A_0 \times A_0)$. Утверждение доказано.

3. Автоматы и их структурное представление

3.1. Автоматные отображения

Для конечного множества A обозначим через A^* множество всех слов в алфавите A (то есть конечных наборов символов из A), включая пустое слово Λ, $A^+ \leftrightharpoons A^* \setminus \{\Lambda\}$. Пусть также A^ω — множество всех бесконечных последовательностей символов из A, о которых мы будем мыслить как о функциях вида $\mathbb{N} \to A$.

Для конечных множеств A, Q отображение $g\colon (A^\omega)^m \to Q^\omega$ назовём *переходной системой*, если найдётся функция $\varphi\colon Q \times A^m \to Q$ и $q_0 \in Q$, такие что для всех $\alpha = \langle \alpha^1, \dots, \alpha^m \rangle \in (A^\omega)^m$

$$\begin{aligned}(g\,\alpha)(1) &= q_0,\\ (g\,\alpha)(t+1) &= \varphi\langle (g\,\alpha)(t), \langle \alpha^1(t+1), \dots, \alpha^m(t+1)\rangle\rangle \qquad (t \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Отображение $f\colon (A^\omega)^m \to B^\omega$ называется *(m-местным) автоматным отображением* или просто *автоматом*, если найдётся такая переходная система $g\colon (A^\omega)^m \to Q^\omega$ и функция $\psi\colon Q \times A^m \to B$, что для всех $\alpha = \langle \alpha^1, \dots, \alpha^m \rangle \in (A^\omega)^m$

$$(f\,\alpha)(t) = \psi\langle (g\,\alpha)(t), \langle \alpha^1(t), \dots, \alpha^m(t)\rangle\rangle.$$

Набор $\mathfrak{A} \leftrightharpoons \langle A^m, Q, B, \varphi, \psi, q_0 \rangle$ будем называть *автоматным заданием* отображения f; функции φ и ψ, при этом, называются функциями *переходов* и *выходов* соответственно.

Стандартным образом расширим функции переходов и выходов автомата $\mathfrak{A}$ на множество $(A^m)^*$, а именно: $\varphi^*(\Lambda) \leftrightharpoons q_0$, $\varphi^*(\alpha a) \leftrightharpoons \varphi\,\langle \varphi^*\,\alpha, a\rangle$, $\psi^*(\Lambda) \leftrightharpoons \Lambda$, $\psi^*(\alpha a) \leftrightharpoons \psi\,\langle \varphi^*\,\alpha, a\rangle$. Состояние q автомата $\mathfrak{A}$ называется *достижимым*, если $q = \varphi^*\,\alpha$ для некоторого слова $\alpha \in A^*$. Заметим, что $\psi^*\,\alpha = f(\alpha\beta)(|\alpha|)$ для любого $\alpha \in (A^m)^*$ и $\beta \in (A^m)^\omega$; поэтому функция ψ^* инвариантна относительно автоматных заданий отображения f.

Для автомата $f\colon (A^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$ определим *язык, им распознаваемый,* — множество

$$\mathcal{L}(f) \leftrightharpoons \{\alpha \in (A^m)^+ \mid \psi^*\,\alpha = 1\},$$

где ψ — функция выходов одного из автоматных задания отображения f.

Язык $L \subseteq (A^m)^*$ называется *автоматным*, если множество $L \setminus \{\Lambda\}$ распознаваемо некоторым автоматом.

3.2. Операции над автоматами

Автоматное отображение $\mathfrak{Z}_c\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}^\omega$ $(c \in \{0,1\})$, такое что

$$\mathfrak{Z}_c\,\alpha\,1 = c,$$
$$\mathfrak{Z}_c\,\alpha\,t = \alpha(t-1) \text{ при } t \geqslant 2,$$

называется *задержкой.* Будем говорить, что автоматное отображение $f\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$ — автомат *с задержкой*, если $f = \mathfrak{Z}_c\,g$ для некоторого $c \in \{0,1\}$ и автоматного отображения $g\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$. Автоматы с задержкой, как нетрудно убедиться, суть в точности все автоматные отображения, автоматные задания которых обладают функцией выходов, несущественно зависящей от второго аргумента (то есть от входа автомата).

Над отображениями с задержкой можно ввести операцию *обратной связи*: отображение $g\colon (\{0,1\}^\omega)^{m-1} \to \{0,1\}^\omega$ называется *результатом применения обратной связи по входу* k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ к автоматному отображению $f\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$ с задержкой, если для всех слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \{0,1\}^m$

$$f\,\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g\,\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m\rangle, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m\rangle = \\ = g\,\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m\rangle.$$

Для любого автомата f с задержкой такое отображение g существует, автоматно и единственно.

Для абстрактных автоматов операция обратной связи обычно вводится явным описанием автомата, задающего функцию g, как функцию от автомата, задающего f. Такой подход не отражает интуитивного смысла обратной связи и, к тому же, отягощён необходимостью доказывать корректность определения (ввиду неоднозначности автоматного задания автоматного отображения). Обратная связь также может быть естественным образом определена в терминах логических схем, однако такой взгляд неудобен из-за неоднозначности структурной реализации автоматной функции. С целью избежать этих трудностей в настоящей работе было принято другое определение операции обратной связи, равносильное стандартному.

Определим формально также и операцию *подстановки* автоматных отображений. Отображение $h\colon (\{0,1\}^\omega)^{n+m-1} \to \{0,1\}^\omega$ называется *результатом подстановки автоматного отображения* $g\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$ *в* $f\colon (\{0,1\}^n)^\omega \to \{0,1\}^\omega$ *по входу* k ($1 \leqslant k \leqslant n$), если для всех слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1} \in \{0,1\}^\omega$

$$h\,\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}\rangle = \\ = f\,\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g\,\langle\alpha_k, \ldots, \alpha_{k+m-1}\rangle, \alpha_{k+m}, \ldots, \alpha_{n+m-1}\rangle.$$

3.3. Оператор замыкания

Для множества M обозначим через $\mathcal{P}(M)$ множество всех подмножеств множества M. *Оператором замыкания* на множестве M называется всякое отображение $[\,]\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, удовлетворяющее для всех $M_0, M_1 \subseteq M$ следующим аксиомам:

1) $M_0 \subseteq [M_0]$.
2) $M_0 \subseteq M_1 \;\to\; [M_0] \subseteq [M_1]$.
3) $[[M_0]] = [M_0]$.

3.4. Автоматные термы и термальные операции

Пусть $\mathit{Авт}(m)$ — множество всех m-местных автоматных отображений *с задержкой*, $m \in \mathbb{N}$. Множество $\mathit{Авт}(0)$ по определению полагаем состоящим в точности из всех периодических (возможно, с предпериодом) последовательностей из $\{0,1\}^\omega$. Пусть также $\mathit{Авт} \leftrightharpoons \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}_0} \mathit{Авт}(m)$.

Пусть $M \subseteq \mathit{Авт}$. Дадим определение понятия *автоматного терма* над множеством M, параллельно определяя для каждого терма его множество *свободных переменных*. Фиксируем некоторое счётное множество U, не пересекающееся с M, элементы которого станем называть *переменными*. Множество автоматных термов над M определим теперь как наименьшее множество, обладающее следующими свойствами:

1) Если α — переменная, то α — терм со множеством свободных переменных $\{\alpha\}$.

2) Если $F^{(s)} \in M$ — s-местный автомат, а $\tau_1, \ldots, \tau_s$ — термы со множествами свободных переменных $X_1, \ldots, X_s$ соответственно, то $F(\tau_1, \ldots, \tau_s)$ — терм со множеством свободных переменных $X_1 \cup \ldots \cup X_s$.

3) Если τ — терм, отличный от переменной, со множеством свободных переменных X, β — переменная, то $(\mathcal{O}\beta)\,\tau$ — терм со множеством свободных переменных $X \setminus \{\beta\}$.

Автоматные термы будут использоваться нами для описания автоматов, получающихся из данных применением подстановки и обратной связи. Поскольку, согласно нашему определению, на свободных переменных автоматного терма не наложено никакого порядка, а также с тем чтобы сделать возможным добавление несущественных переменных, введём специальное обозначение для автоматного отображения, описываемого термом; удобной для этого оказывается λ-нотация, не только позволяющая упорядочить аргументы функции, но и допускающая несущественные аргументы (в синтаксическом смысле). Так, формализуем семантику.

Пусть τ — автоматный терм, $\langle \alpha^1, \ldots, \alpha^m \rangle$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ — набор попарно различных переменных, исчерпывающих множество свободных переменных терма τ (то есть всякая свободная переменная терма τ лежит в $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$). Тогда через $(\lambda\, \alpha^1 \ldots \alpha^m.\tau)$ обозначим m-местное автоматное отображение, определяемое индуктивно:

1) Если $\tau = \beta$ — переменная, то
$$(\lambda\, \alpha^1 \ldots \alpha^m.\tau)\langle \gamma^1, \ldots, \gamma^m \rangle \risingdotseq \gamma^c,$$
где номер c определяется условием $\alpha^c = \beta$.

2) Если $\tau = F(\tau_1, \ldots, \tau_s)$, то
$$(\lambda\, \alpha^1 \ldots \alpha^m.\tau)\,\gamma \risingdotseq F\,\langle (\lambda\, \alpha^1 \ldots \alpha^m.\tau_1)\,\gamma, \ldots, (\lambda\, \alpha^1 \ldots \alpha^m.\tau_s)\,\gamma \rangle.$$

3) Если $\tau = (\mathcal{O}\beta)\,\tau_0$, то $(\lambda\, \alpha^1 \ldots \alpha^m.\tau)$ — автомат-результат применения обратной связи к автомату $(\lambda\, \beta\alpha^1 \ldots \alpha^m.\tau_0)$ по входу β, то есть тот единственный автомат, который для всех

$\gamma = \langle \gamma^1, \dots, \gamma^m \rangle \in (\{0,1\}^\omega)^m$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda\, \alpha^1 \dots \alpha^m . \tau)\, \gamma = \\ = (\lambda\, \beta \alpha^1 \dots \alpha^m . \tau_0)\, \langle (\lambda\, \alpha^1 \dots \alpha^m . \tau)\, \gamma, \gamma^1, \dots, \gamma^m \rangle.$$

Семантически, таким образом, построение терма $F(\tau_1, \dots, \tau_s)$ из автомата F и термов $\tau_1, \dots, \tau_s$ соответствует операции подстановки автоматов, а построение терма $(\mathcal{O}\beta)\, \tau$ — применению обратной связи.

Автоматные термы, отличные от переменных, назовём *собственными.* Об автоматном отображении f, таком что $f = (\lambda\, \alpha^1 \dots \alpha^m . \tau)$ для некоторого собственного терма τ над множеством M и переменных $\alpha^1, \dots, \alpha^m$, будем говорить, что оно получено *термальными операциями* из автоматов множества M. Термальные операции, будучи применяемы к автоматам с задержкой, дают автоматы с задержкой, что позволяет ввести на множестве $\mathit{Авт}$ оператор замыкания $[\,]$ относительно термальных операций: для множества $M \subseteq \mathit{Авт}$ множество $[M]$ по определению состоит из всех автоматов, полученных термальными операциями из автоматов множества M.

3.5. Структурный критерий принадлежности замкнутому классу автоматов

Утверждение 9. *Пусть $F_1, \dots, F_n \in \mathit{Авт}(n+m)$. Тогда существует и единственен набор $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ отображений вида $(\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$, удовлетворяющий для всех $\alpha = \langle \alpha^1, \dots, \alpha^m \rangle \in (\{0,1\}^\omega)^m$ системе*

$$f_k\, \alpha = F_k\, \langle f_1\, \alpha, \dots, f_n\, \alpha,\, \alpha^1, \dots, \alpha^m \rangle \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

При этом, отображения $f_1, \dots, f_n$ необходимо автоматны и лежат в классе $[\{F_1, \dots, F_n\}]$.

Доказательство. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ рассмотрим следующие термы над множеством $\{F_1, \dots, F_n\}$:

$$\tau_{k,k+1} \leftrightharpoons (\mathcal{O}\beta^{k+1})\, F_{k+1}(\beta^1, \dots, \beta^k, \beta^{k+1}, \beta^{k+2}, \dots, \beta^n, \alpha^1, \dots, \alpha^m),$$
$$\tau_{k,k+2} \leftrightharpoons (\mathcal{O}\beta^{k+2})\, F_{k+2}(\beta^1, \dots, \beta^k, \tau_{k,k+1}, \beta^{k+2}, \dots, \beta^n, \alpha^1, \dots, \alpha^m),$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&\tau_{k,n} \leftrightharpoons (\mathcal{O}\beta^n)\, F_n(\beta^1, \ldots, \beta^k, \tau_{k,k+1}, \ldots, \tau_{k,n-1}, \beta^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^m),\\
&\tau_{k,1} \leftrightharpoons (\mathcal{O}\beta^1)\, F_1(\beta^1, \ldots, \beta^k, \tau_{k,k+1}, \ldots, \tau_{k,n}, \alpha^1, \ldots, \alpha^m),\\
&\tau_{k,2} \leftrightharpoons (\mathcal{O}\beta^2)\, F_2(\tau_{k,1}, \beta^2, \ldots, \beta^k, \tau_{k,k+1}, \ldots, \tau_{k,n}, \alpha^1, \ldots, \alpha^m),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&\tau_{k,k} \leftrightharpoons (\mathcal{O}\beta^k)\, F_k(\tau_{k,1}, \ldots, \tau_{k,k-1}, \beta^k, \tau_{k,k+1}, \ldots, \tau_{k,n}, \alpha^1, \ldots, \alpha^m).
\end{aligned}
$$

В качестве f_k теперь можно взять автомат $(\lambda\, \alpha^1 \ldots \alpha^m.\tau_{k,k})$. Тогда, во-первых, $f_k \in [\{F_1, \ldots, F_n\}]$, а во-вторых, набор автоматов $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ удовлетворяет системе из условия (в чём нетрудно убедиться, пользуясь определением обратной связи).

Покажем теперь единственность решения. В сущности, это следует из того, что все автоматные отображения $F_1, \ldots, F_n$ суть автоматны с задержкой. В самом деле, путь $\alpha = \langle \alpha^1, \ldots, \alpha^m\rangle \in (\{0,1\}^\omega)^m$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Для некоторых $c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1\}$ и автоматных отображений $G_1, \ldots, G_n$ имеем $F_1 = \mathfrak{Z}_{c_1} G_1, \ldots, F_n = \mathfrak{Z}_{c_n} G_n$. Тогда, как можно извлечь из устройства системы,

$$
\begin{aligned}
&(f_k\, \alpha)(1) = c_k,\\
&(f_k\, \alpha)(2) = G_k(c_1, \ldots, c_n, \alpha^1(1), \ldots, \alpha^m(1)),\\
&\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&(f_k\, \alpha)(t) = G_k((f_1\, \alpha)(t-1), \ldots, (f_n\, \alpha)(t-1),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha^1(t-1), \ldots, \alpha^m(t-1)),
\end{aligned}
$$

— значение $f_k\, \alpha$ в момент t зависит лишь от $(f_1\, \alpha)(t–1), \ldots, (f_n\, \alpha)(t–1)$, $\alpha^1(t-1), \ldots, \alpha^m(t-1)$; поэтому существует в точности один набор последовательностей $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$, такой что автоматные функции $f_1, \ldots, f_n$, если и являются решением системы из условия, то $f_1\, \alpha = \gamma_1, \ldots, f_n\, \alpha = \gamma_n$. Утверждение доказано

Введём на множестве *Авт* оператор замыкания $[\,]_0$: для $M \subseteq$ *Авт* скажем по определению, что $f \in [M]_0$ тогда и только тогда, когда $f = (\lambda\, \gamma^1 \ldots \gamma^n.\, F(\alpha^1, \ldots, \alpha^m))$ для некоторых переменных $\alpha^1, \ldots, \alpha^m, \gamma^1, \ldots, \gamma^n$ и автомата $F \in M$. Множество $[M]_0$, таким образом, состоит из всех автоматов, получающихся из автоматов множества M перестановкой/отождествлением аргументов и добавлением несущественных.

Утверждение 10. *Пусть $M \subseteq$ Авт, $f \in [M] \cap$ Авт(m). Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует набор $\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$ автоматных отображений из класса $[M]_0 \cap$ Авт$(n+m)$, такой что для некоторых автоматов $f_1 = f, f_2, \ldots, f_n \in$ Авт(m), всех $k \in \{1, \ldots, n\}$ и $\alpha = \langle \alpha^1, \ldots, \alpha^m \rangle \in (\{0,1\}^\omega)^m$ справедливо*

$$f_k\,\alpha = F_k\,\langle f_1\,\alpha, \ldots, f_n\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^m \rangle.$$

Доказательство. Пусть $f \in [\{F_1, \ldots, F_n\}]$. Это означает, что найдётся такой собственный терм τ над множеством $\{F_1, \ldots, F_n\}$, что $f = (\lambda\,\gamma^1 \ldots \gamma^m.\tau)$ для некоторых переменных $\gamma^1, \ldots, \gamma^m$. Если терм τ имеет вид $\tau = F(\alpha^1, \ldots, \alpha^p)$, то можно взять $n = 1$, $F_1 = (\lambda\,\beta\gamma^1 \ldots \gamma^m.\,F(\alpha^1, \ldots, \alpha^p))$. Если же $\tau = F(\tau_1, \ldots, \tau_n, \alpha^1, \ldots, \alpha^p)$, а автомат $g_{k,1} \leftrightharpoons (\lambda\,\gamma^1 \ldots \gamma^m.\tau_k)$ задаётся набором $\langle F_{k,1}, \ldots, F_{k,s(k)} \rangle$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, то автоматное отображение f удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}
f\,\alpha = F\,\langle g_{1,1}\,\alpha, \ldots, g_{n,1}\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^p \rangle,\\
g_{k,1}\,\alpha = F_{k,1}\,\langle g_{k,1}\,\alpha, \ldots, g_{k,s(k)}\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^p \rangle,\\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
g_{k,s(k)}\,\alpha = F_{k,s(k)}\,\langle g_{k,1}\,\alpha, \ldots, g_{k,s(k)}\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^p \rangle
\end{gathered}$$

$(1 \leqslant k \leqslant n)$. Искомая система уравнений, задающая f может быть легко получена из этих соотношений.

Если $\tau = (\mathcal{O}\beta)\,\tau_0$, а автомат $(\lambda\,\beta\gamma^1 \ldots \gamma^m.\tau_0)$ задаётся набором $\langle F_1, \ldots, F_s \rangle$, то

$$\begin{gathered}
f\,\alpha = F_1(f_1\,\alpha, \ldots, f_s\,\alpha, f\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^m),\\
f_1\,\alpha = F_1(f_1\,\alpha, \ldots, f_s\,\alpha, f\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^m),\\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
f_s\,\alpha = F_s(f_1\,\alpha, \ldots, f_s\,\alpha, f\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^m).
\end{gathered}$$

Утверждение доказано.

4. Формальные нейроны и нейронные сети

Пусть

$$\mathcal{N}(m) \leftrightharpoons \bigl\{ \mathfrak{Z}_c\, \chi_R \mid c \in \{0,1\},\ R \subseteq \{0,1\}^m \text{ — пороговое отношение} \bigr\}$$

(здесь и далее функция χ_R отождествляется с автоматным отображением $\widehat{\chi_R}\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$,

$$(\widetilde{\chi_R}\,\langle \alpha^1, \ldots, \alpha^m \rangle)(t) \leftrightharpoons \chi_R\,\langle \alpha^1(t), \ldots, \alpha^m(t) \rangle).$$

Элементы множества $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} \mathcal{N}(m)$ будем называть *нейронами.* Согласно нашему определению, таким образом, нейроны представляют собой пороговые булевы функции с единичной задержкой, рассматриваемые как автоматные отображения. Замкнём теперь множество $\mathcal{N}$ всех нейронов относительно термальных операций и назовём элементы полученного множества $[\mathcal{N}]$ *нейроавтоматными* отображениями. Относительно автоматных отображений из множества $[\mathcal{N}]$ станем также говорить, что они *нейропорождённы.*

4.1. Критерий нейропорождённости

Приведём теперь критерий нейропорождённости, выделяющий нейроавтоматные отображения в классе всех автоматных отображений.

Теорема 1. *Для любого автомата $f\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$ и любого его автоматного задания $\mathfrak{A} \leftrightharpoons \langle \{0,1\}^m, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, s_0 \rangle$, все состояния которого достижимы, следующие утверждения равносильны:*

1) *Автомат f нейропорождён.*
2) *Существует $c_0 \in \{0,1\}$, перестановочное отношение $R \subseteq U \times \{0,1\}_1 \times \ldots \times \{0,1\}_m$ и такой автомат с задержкой $g\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to U^\omega$, что для всех $\alpha = \langle \alpha^1, \ldots, \alpha^m \rangle \in (\{0,1\}^\omega)^m$*
$$f\,\alpha = \mathfrak{Z}_{c_0}\, \chi_R\,\langle g\,\alpha,\ \alpha^1, \ldots, \alpha^m \rangle.$$
3) *Существует свободнопороговое отношение $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$ и такое семейство регулярных множеств L_u ($u \in U$), что*

$$\mathcal{L}(f) \setminus \{0,1\}^m = \bigcup_{u\in U} L_u \cdot \{a \in \{0,1\}^m \mid \langle u, a\rangle \in P\} \cdot \{0,1\}^m.$$

4) *а)* $\exists L \subseteq (\{0,1\}^m)^* \big(\mathcal{L}(f) = L \cdot \{0,1\}^m\big)$.
б) Двуместное отношение

$$\Gamma = \{\langle \alpha, a\rangle \in A^* \times \{0,1\}^m \mid \alpha a \in L\}$$

свободнопорогово.

5) *а) Функция* ψ *несущественно зависит от входа автомата.*
б) Отношение $P \leftleftharpoons \{\langle q, a\rangle \in Q \times \{0,1\}^m \mid \psi\,\varphi\,\langle q, a\rangle = 1\}$ *свободнопорогово.*

6) *а) Функция* ψ *несущественно зависит от входа автомата.*
б) Двуместное отношение $\preccurlyeq$ *на* $\{0,1\}^m$*, задаваемое условием*

$$a_0 \preccurlyeq a_1 \;\leftrightarrow\; \forall q \in Q\; \big(\psi\,\varphi\langle q, a_0\rangle = 1 \to \psi\,\varphi\langle q, a_1\rangle = 1\big),$$

является пороговым предпорядком на $\{0,1\}^m$.

Доказательство. Переход 1 $\to$ 2. Из утверждения 10 следует, что существует конечное число автоматов с задержкой $f_1, \ldots, f_n \in Авт(m)$ и нейрон $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_{c_0}\, \chi_T$, $T \subseteq \{0,1\}^{n+m}$, такие что

$$f\,\alpha = \mathfrak{N}\,\langle f_1\,\alpha, \ldots, f_n\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^m\rangle$$

для всех $\alpha = \langle \alpha^1, \ldots, \alpha^m\rangle \in (\{0,1\}^\omega)^m$. Отношение T порогово, поэтому отношение

$$R \leftleftharpoons \{\langle\langle u^1, \ldots, u^n\rangle, a^1, \ldots, a^m\rangle \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^m \mid \\ \langle u^1, \ldots, u^n, a^1, \ldots, a^m\rangle \in T\}$$

перестановочно (см. утверждение 3). Автоматны $f_1, \ldots, f_n$ нейропорождённы, поэтому они и отображения с задержкой. Пусть $g\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to (\{0,1\}^n)^\omega$,

$$(g\,\alpha)\,t \leftleftharpoons \langle (f_1\,\alpha)\,t, \ldots, (f_n\,\alpha)\,t\rangle \qquad (t \in \mathbb{N})$$

— прямое произведение отображение $f_1, \ldots, f_n$. В этом случае $f\,\alpha = \mathfrak{Z}_{c_0}\,\chi_R\langle g\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^m\rangle$.

Переход 2 $\to$ 3. Отображение g — автомат с задержкой, поэтому существуют $u_0 \in U$ и автомат $g_0\colon (\{0,1\}^m)^\omega \to U^\omega$, такие что для всех $\alpha \in (\{0,1\}^\omega)^m$ справедливо равенство $g\,\alpha = \mathfrak{Z}_{u_0}\, g_0\, \alpha$. В качестве L_u $(u \in U)$ тогда можно выбрать

$$L_u \risingdotseq \{\alpha \in (\{0,1\}^m)^+ \mid (g_0^*\,\alpha)(|\alpha|) = u\} \cup O_u,$$

где $O_u = \{\Lambda\}$ при $u = u_0$, и $O_u = \varnothing$ иначе, а g_0^* — ограничение автомата g_0 на конечные слова (то есть такое отображение класса $(\{0,1\}^m)^* \to (\{0,1\}^m)^*$, что $g_0^*(a_1 \ldots a_n) = \psi_g^*(a_1) \ldots \psi_g^*(a_1 \ldots a_n)$, где ψ_g^* — расширенная функция выходов автомата g_0). Действительно, во-первых, в соответствии с теоремой Клини, множества L_u регулярны, а во-вторых, если $\alpha = \alpha_0 a_1 a_2 \in (\{0,1\}^m)^*$, то

$$\begin{aligned}
&\alpha \in \mathcal{L}(f) \leftrightarrow \\
&\quad\leftrightarrow \mathfrak{Z}_{c_0}^* \chi_P^* \langle \mathfrak{Z}_{u_0}^* g_0^*(\alpha_0 a_1 a_2),\, (\alpha_0 a_1 a_2)^1, \ldots, (\alpha_0 a_1 a_2)^m \rangle(|\alpha|) = 1 \leftrightarrow \\
&\quad\quad\leftrightarrow \chi_P^* \langle \mathfrak{Z}_{u_0}^* g_0^*(\alpha_0 a_1),\, (\alpha_0 a_1)^1, \ldots, (\alpha_0 a_1)^m \rangle(|\alpha| - 1) = 1 \leftrightarrow \\
&\quad\quad\leftrightarrow \chi_P^* \langle u_0 \cdot g_0^*(\alpha_0),\, (\alpha_0 a_1)^1, \ldots, (\alpha_0 a_1)^m \rangle(|\alpha| - 1) = 1 \leftrightarrow \\
&\quad\quad\quad\leftrightarrow \chi_P \langle g_0^*(\alpha_0)(|\alpha_0|), a_1^1, \ldots, a_1^m \rangle = 1 \leftrightarrow \\
&\quad\quad\quad\quad\leftrightarrow \exists u \in U \big(\alpha_0 \in L_u \wedge \langle u, a_1 \rangle \in P\big),
\end{aligned}$$

где $(\alpha_0 a_1 a_2)^k$ — слово, составленное из k-ых компонент букв слова $\alpha_0 a_1 a_2$, а $\mathfrak{Z}_{c_0}^*$, χ_P^* — ограничения соответствующих автоматов на конечные слова.

Переход $3 \to 4$. В качестве L возьмём

$$L \risingdotseq \bigcup_{u \in U} L_u \cdot \{a \in \{0,1\}^m \mid \langle u, a \rangle \in P\} \cup O,$$

где $O = \{\Lambda\}$, если $\{0,1\}^m \subseteq \mathcal{L}(f)$, $O = \varnothing$ иначе. Следовательно, $\langle \alpha, a \rangle \in \Gamma \leftrightarrow \exists u \in U \ \big(\alpha \in L_u \ \wedge \ \langle u, a \rangle \in P\big) \leftrightarrow \langle \lambda(\alpha), a \rangle \in P$, где $\lambda\colon (\{0,1\}^m)^* \to U$ — отображение, приписывающее всякому $\alpha \in (\{0,1\}^m)^*$ некоторый наибольший (относительно $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P)$) элемент множества $\{u \in U \mid \alpha \in L_u\}$, если оно непусто, и ,некоторый символ $-\infty \notin U$, если пусто. А так как отношение P свободнопорогово, то свободнопорогово и отношение Γ.

Переход $4 \to 5$. Так как $\mathcal{L}(f) = L \cdot \{0,1\}^m$ и все состояния автомата $\mathfrak{A}$ достижимы, то функция ψ неизбежно несущественно зависит от входа автомата. Далее,

$$\langle \alpha, a_1 \rangle \in \Gamma \;\leftrightarrow\; \alpha a_1 a_2 \in \mathcal{L}(f) \;\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\; \psi^*(\alpha a_1 a_2) = 1 \;\leftrightarrow\; \psi \langle \varphi^*(\alpha a_1), a_2 \rangle = 1 \;\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\; \psi\varphi \langle \varphi^*(\alpha), a_1 \rangle = 1 \;\leftrightarrow\; \langle \varphi^* \alpha, a_1 \rangle \in P.$$

Отношение Γ свободнопорогово, поэтому свободнопорогово и отношение P.

Переход 5 $\to$ 6. Заметим, что $\preccurlyeq = \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P)$. Далее следует применить утверждение 7.

Переход 6 $\to$ 1. Приведём явную конструкцию нейросети, реализующей автомат f. Пусть $\{0,1\}^m = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{2^m}\}$, $\mathbf{a}_j = \langle \mathbf{a}_j^1, \ldots, \mathbf{a}_j^m \rangle$, $Q = \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$, $s_0 = \mathbf{q}_1$, $\{\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_{2^n}\}$ — множество всех подмножеств множества Q. Для $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^m\}$ обозначим через $s(i,j)$ такое число, что

$$M_{s(i,j)} = \{q \in Q \mid \varphi(q, \mathbf{a}_j) = \mathbf{q}_i\}.$$

Рассмотрим семейство пороговых булевых функций

$$T_{i,j}(q^{1,1}, \ldots, q^{1,2^m}, \ldots, q^{2^n,1}, \ldots, q^{2^n,2^m}, a^1, \ldots, a^m) \risingdotseq\\ \risingdotseq \big((a^1 \leftrightarrow \mathbf{a}_j^1) \wedge \ldots \wedge (a^m \leftrightarrow \mathbf{a}_j^m)\big) \wedge \big(q^{s(i,j),1} \vee \ldots \vee q^{s(i,j),2^m}\big)$$

и систему автоматных уравнений:

$$g_{i,j}\, \alpha = \mathfrak{Z}_{c(i)} T_{i,j}(g_{1,1}\alpha, \ldots, g_{2^n,2^m}\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^m),$$

где $c(i) = 1$, если $s_0 \in M_i$, и $c(i) = 0$ иначе. Согласно утверждению 9, эта система имеет и единственное решение — нейроавтоматные отображения $g_{1,1}, \ldots, g_{2^n,2^m}$.

Поскольку $\preccurlyeq = \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P)$ и $\preccurlyeq$ — пороговый предпорядок на $\{0,1\}^m$, то, как следует из утверждения 7, во-первых, отношение P свободнопорогово, а во-вторых, существует вектор $w \in \mathbb{Z}^m$ и отображение $\pi\colon Q \to \{0,1\}^m \cup \{+\infty\}$, такие что, если $\pi(u) \neq +\infty$, то $\langle u, a \rangle \in P \leftrightarrow (w \cdot \pi(u)) \leqslant (w \cdot a)$. Пусть $k \in \{1, \ldots, m, +\infty\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^m\}$. Обозначим при $k \neq +\infty$ через $r(k,j)$ такое число, что

$$M_{r(k,j)} = \{q \in Q \mid \pi^k \varphi(q, \mathbf{a}_j) = 1\},$$

а через $r(+\infty, j)$ такой число, что

$$M_{r(+\infty,j)} = \{q \in Q \mid \pi\,\varphi(q, \mathbf{a}_j) = +\infty\},$$

рассмотрим пороговые булевы функции

$$S_{k,j}(q^{1,1}, \dots, q^{1,2^m}, \dots, q^{2^n,1}, \dots, q^{2^n,2^m}, a^1, \dots, a^m) \leftrightharpoons \\ \leftrightharpoons \big((a^1 \leftrightarrow \mathbf{a}^1_j) \wedge \dots \wedge (a^m \leftrightarrow \mathbf{a}^1_j)\big) \wedge \big(q^{r(k,j),1} \vee \dots \vee q^{r(k,j),2^m}\big)$$

и нейроавтоматные отображения

$$h_{k,j}\,\alpha \leftrightharpoons \mathfrak{Z}_{c(k,j)}\,S_{k,j}\,\langle g_{1,1}\,\alpha, \dots, g_{2^n,2^m}\,\alpha\rangle,$$

где

$$c(k,j) = \begin{cases} \pi^k(s_0), & \text{если } \pi(s_0) \neq +\infty \,\wedge\, k \neq +\infty \,\wedge\, j = 1; \\ 1, & \text{если } \pi(s_0) = +\infty \,\wedge\, k = +\infty \,\wedge\, j = 1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть

$$U\,\langle s^{1,1}, \dots, s^{1,2^m}, \dots, s^{m,1}, \dots, s^{m,2^m}, s^{+\infty,1}, \dots, s^{+\infty,2^m}, a^1, \dots, a^m\rangle \leftrightharpoons \\ \leftrightharpoons \mathrm{sign}\big(-w^1(s^{1,1} + \dots + s^{1,2^m}) - \dots - w^m(s^{m,1} + \dots + s^{m,2^m}) + \\ + w_{+\infty}(s^{+\infty,1} + \dots + s^{+\infty,2^m}) + (w^1 \cdot a^1 + \dots + w^m \cdot a^m)\big),$$

где $w_{+\infty} = |w^1| + \dots + |w^m| + 1$. Рассмотрим нейроавтоматное отображение

$$F\,\alpha \leftrightharpoons \mathfrak{Z}_{\psi(s_0)}\,U\,\langle h_{1,1}\,\alpha, \dots, h_{m,2^m}\,\alpha,\ h_{+\infty,1}\,\alpha, \dots, h_{+\infty,2^m}\,\alpha,\ \alpha^1, \dots, \alpha^m\rangle$$

и докажем, что оно совпадает с исходным отображением f.

Пусть $\overline{f}\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to Q^\omega$ — автомат, задаваемый набором $\langle\{0,1\}^m, Q, Q, \varphi, id_Q, q_0\rangle$. Тогда

$$\overline{f}\,\alpha = \nu_1\,\langle g_{1,1}\,\alpha, \dots, g_{2^n,2^m}\,\alpha\rangle,$$

где $\nu_1\colon \{0,1\}^{2^m\cdot 2^n} \to Q$,

$$\nu_1(b) \leftrightharpoons \begin{cases} \mathbf{q}_i, & \text{если } M_1^{\varepsilon_1(b)} \cap \dots \cap M_{2^n}^{\varepsilon_{2^n}(b)} = \{\mathbf{q}_i\}; \\ \mathbf{q}_0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$M_j^{\varepsilon} = \begin{cases} M_j, & \text{если } \varepsilon = 1; \\ Q \setminus M_j, & \text{если } \varepsilon = 0; \end{cases}$$

а $\varepsilon_j \colon \{0,1\}^{2^m \cdot 2^n} \to \{0,1\}$, $\varepsilon_j(q^{1,1}, \dots, q^{2^n, 2^m}) = q^{j,1} \vee \dots \vee q^{j,2^m}$.

Далее, если положить $\widetilde{\pi} \colon Q \to \{0,1\}^{m+1}$,

$$\widetilde{\pi}(q) = \begin{cases} \langle \pi^1(q), \dots, \pi^m(q), 0 \rangle, & \text{если } \pi(q) \neq +\infty; \\ \langle 0, \dots, 0, 1 \rangle, & \text{если } \pi(q) = +\infty; \end{cases}$$

то автомат $\widetilde{\pi}\, \overline{f}$ можно представить в виде

$$\widetilde{\pi}\, \overline{f}\, \alpha = \nu_2 \langle h_{1,1}\, \alpha, \dots, h_{m,2^m}\, \alpha,\ h_{+\infty,1}\, \alpha, \dots, h_{+\infty,2^m}\, \alpha \rangle,$$

где $\nu_2 \colon \{0,1\}^{(m+1)\cdot 2^m} \to \{0,1\}^m$,

$$\nu_2 \langle s^{1,1}, \dots, s^{m,2^m}, s^{+\infty,1}, \dots, s^{+\infty,2^m} \rangle \leftrightharpoons$$
$$\leftrightharpoons \langle s^{1,1} \vee \dots \vee s^{1,2^m},\ \dots,\ s^{m,1} \vee \dots \vee s^{m,2^m},\ s^{+\infty,1} \vee \dots \vee s^{+\infty,2^m} \rangle.$$

Следовательно, если в текущий момент автомат $\mathfrak{A}$ находится в состоянии q, таком что $\pi(q) \neq +\infty$, то

$$U \langle s^{1,1}, \dots, s^{+\infty,2^m}, a^1, \dots, a^m \rangle = \operatorname{sign}\bigl(-(w \cdot \pi(q)) + (w \cdot a)\bigr).$$

Если же $\pi(q) = +\infty$, то

$$U \langle s^{1,1}, \dots, s^{+\infty,2^m}, a^1, \dots, a^m \rangle = \operatorname{sign}\bigl(w_{+\infty} + (w \cdot a)\bigr) = 1.$$

В любом случае $U \langle s^{1,1}, \dots, s^{+\infty,2^m}, a^1, \dots, a^m \rangle = \psi\, \varphi \langle q, a \rangle$. Теорема доказана.

Следствие. *Если $f \colon (\{0,1\}^m)^\omega \to \{0,1\}^\omega$ — нейроавтоматное отображение, то f принадлежит множеству $[\mathcal{N}((m+1)\cdot 2^m + m)]$.*

4.2. Моделирование с задержкой по времени

Непосредственно из критерия нейропорождённости автомата (теорема 1) вытекает, что если $g_1, \dots, g_n \colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$ — автоматы с задержкой и $\mathfrak{N} \colon (\{0,1\}^\omega)^{n+m} \to \{0,1\}^\omega$ — нейрон, то автомат $f\,\alpha \leftrightharpoons \mathfrak{N} \langle g_1\, \alpha, \dots, g_n\, \alpha,\ \alpha^1, \dots, \alpha^m \rangle$ необходимо нейропорождён. Как следствие справедливо

Утверждение 11. *Для любого автомата $f \colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$ и любых $c_1, c_2 \in \{0,1\}$ автомат $\mathfrak{Z}_{c_1}\, \mathfrak{Z}_{c_2}\, f$ нейропорождён.*

Таким образом, поведение каждого автоматного отображения может быть смоделировано некоторым нейроавтоматом с временны́м сдвигом в два такта.

Утверждение 12. *Для любого любого* $c_0 \in \{0,1\}$, *автомата* $f\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$ *и любого его автоматного задания* $\langle \{0,1\}^m, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0\rangle$, *все состояния которого достижимы, следующие утверждения равносильны:*

1) *Автомат* $\mathfrak{Z}_{c_0} f$ *нейропорождён.*
2) *Отношение* $\{\langle q,a\rangle \in Q\times\{0,1\}^m \mid \psi\,\langle q,a\rangle = 1\}$ *свободнопорогово.*

Доказательство. Автомат $\mathfrak{Z}_{c_0} f$ может быть задан набором $\langle \{0,1\}^m, Q \times \{0,1\}, \Phi, \Psi, \langle q_0, c_0\rangle\rangle$, где $\Phi\,\langle\langle q,c\rangle, a\rangle \leftrightharpoons \langle \varphi(q,a), \psi(q,a)\rangle$, а $\Psi\,\langle\langle q,c\rangle, a\rangle \leftrightharpoons c$. Тогда $\Psi\,\Phi\,\langle\langle q,c\rangle,a\rangle = 1 \leftrightarrow \psi\,\langle q,a\rangle = 1$. Далее следует воспользоваться критерием нейропорождённости (теорема 1). Утверждение доказано.

4.3. Моделирование в кодировке

Нейроавтоматные отображения, согласно нашему определению, представляют собой многоместные автоматные отображения с булевыми входами и выходами (то есть элементами множества $\{0,1\}$). Распространим понятие нейропорождённости на автомата общего вида (с необязательно булевыми входами).

Пусть $\lambda\colon A \to \widetilde{A} \subseteq \{0,1\}^m$, $\nu\colon B \to \widetilde{B} \subseteq \{0,1\}^p$ — взаимнооднозначные соответствия (будем называть их *кодировками*); функции $\lambda^1,\ldots,\lambda^m\colon A \to \{0,1\}$ и $\nu^1,\ldots,\nu^p\colon B \to \{0,1\}$, при этом, определяются условием

$$\lambda\, a = \langle \lambda^1 a, \ldots, \lambda^m a\rangle,$$
$$\nu\, b = \langle \nu^1 b, \ldots, \nu^p b\rangle.$$

Скажем, что автомат $f\colon A^\omega \to B^\omega$ *нейропредставим* (*нейромоделируем*) в кодировке $\langle\lambda,\nu\rangle$, если существуют такие нейроавтоматные отображения $g^1,\ldots,g^p\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$, что для всех $k \in \{1,\ldots,p\}$ и $\alpha \in A^\omega$ имеет место равенство

$$\nu^k f\,\alpha = g^k\,\langle \lambda^1 \alpha, \ldots, \lambda^m \alpha\rangle.$$

Теорема 2. *Для любого автомата $f\colon A^\omega \to B^\omega$ и любого её автоматного задания $\mathfrak{A} = \langle A, Q, B, \varphi, \psi, s_0\rangle$, все состояния которого достижимы, для любых кодировок $\lambda\colon A \to \widetilde{A} \subseteq \{0,1\}^m$, $\nu\colon B \to \widetilde{B} \subseteq \{0,1\}^p$ следующие утверждения равносильны:*

1) *Автомат f нейропредставим в кодировке $\langle \lambda, \nu\rangle$.*
2) а) *Функция ψ несущественно зависит от входа автомата.*
   б) *Для каждого $k \in \{1, \ldots, p\}$ существует свободнопороговое отношение $P_k \subseteq Q \times \{0,1\}^m$, такое что для всех $q \in Q$ и $a \in A$*
   $$\nu^k\, \psi\, \varphi\, \langle q, a\rangle = \chi_{P_k}\, \langle q, \lambda\, a\rangle.$$
3) а) *Функция ψ несущественно зависит от входа автомата.*
   б) *Для каждого $k \in \{1, \ldots, p\}$ двуместное отношение $\preccurlyeq_k$ на множестве $\widetilde{A}$, задаваемое условием*
   $$\widetilde{a}_0 \preccurlyeq_k \widetilde{a}_1 \;\leftrightarrow\; \forall q \in Q\ \big(\nu^k\, \psi\, \varphi\, \langle q, \lambda^{-1}\, \widetilde{a}_0\rangle = 1 \;\to\; \to\; \nu^k\, \psi\, \varphi\, \langle q, \lambda^{-1}\, \widetilde{a}_1\rangle = 1\big),$$
   является пороговым предпорядком на $\widetilde{A}$.

Доказательство. Переход $1 \to 2$. Пусть $g^1, \ldots, g^p$ — нейроавтоматные отображения из определения нейропредставимости автомата f. Зафиксируем $k \in \{1, \ldots, p\}$. На последовательностях $\langle \alpha^1, \ldots, \alpha^m\rangle \in (\{0,1\}^\omega)^m$, таких что $\langle \alpha^1(t), \ldots, \alpha^m(t)\rangle \in \widetilde{A}$ для всех $t \in \mathbb{N}$, автомат g^k совпадает с автоматом $\nu^k\, f\, \lambda^{-1}$, поэтому автомат g^k имеет такое автоматное задание $\mathfrak{B} \leftrightharpoons \langle \{0,1\}^m, Q \cup R, \{0,1\}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, s_0\rangle$, что $\widetilde{\varphi}\, \langle q, \lambda\, a\rangle = \varphi\, \langle q, a\rangle$ и $\widetilde{\psi}\, \langle q, a\rangle = \nu^k\, \psi\, \langle q, a\rangle$ (для всех $q \in Q$ и $a \in A$). Если S_0 — все достижимые состояние автомата $\mathfrak{B}$, то по теореме 1, во-первых, для всех $s \in S_0$ (а в частности и для всех $s \in Q_0$) функция $\widetilde{\psi}$ несущественно зависит только от входа автомата, а во-вторых, отношение

$$\widetilde{P}_k \leftrightharpoons \{\langle \widetilde{q}, a\rangle \in S_0 \times \{0,1\}^m) \mid \widetilde{\psi}\, \widetilde{\varphi}\, \langle \widetilde{q}, \lambda^{-1} a\rangle = 1\}$$

свободнопорогово. Следовательно, свободнопорогово и отношение $P_k \leftrightharpoons \widetilde{P}_k \cap (Q_0 \times \{0,1\}^m)$; оно-то и является искомым.

Переход $2 \to 3$. Зафиксируем число k. Отношение P_k свободнопорогово, поэтому, во-первых, элементы множества $\{0,1\}^m$ попарно

$\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P)$-сравнимы, а следовательно, и элементы множества $\widetilde{A}$ попарно $\preccurlyeq_k$-сравнимы (так как $\preccurlyeq_k = \mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_k) \cap (\widetilde{A} \times \widetilde{A})$), а во-вторых, существуют такие $w \in \mathbb{Z}^m$ и $\tau\colon Q \to \mathbb{Z}$, что $\langle q, \widetilde{a} \rangle \in P_k \leftrightarrow \tau(q) \leqslant (w \cdot \widetilde{a})$. Если $q \in Q$, $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ таковы, что $\nu^k \, \psi \, \varphi \, \langle q, a_1 \rangle = 0$, но $\nu^k \, \psi \, \varphi \, \langle q, a_2 \rangle = 1$, то $(w \cdot \lambda(a_1)) \leqslant \tau(q) < (w \cdot \lambda(a_2))$.

Переход $3 \to 1$. Зафиксируем $k \in \{1, \ldots, p\}$. Пусть

$$P_k^0 \leftrightharpoons \{\langle q, \widetilde{a} \rangle \in Q \times \widetilde{A} \mid \nu^k \, \psi \, \varphi \, \langle q, \lambda^{-1}(\widetilde{a}) \rangle = 1\}.$$

По предположению отношение $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_k^0)$ является пороговым предпорядком на $\widetilde{A}$. Согласно утверждению 7, отношение P_k^0 можно доопределить до свободнопорогового отношения $P_k \subseteq Q \times \{0,1\}^m$, такого что $P_k \cap (Q \times \widetilde{A}) = P_k^0$.

Рассмотрим автомат $g^k\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$, задаваемый набором $\mathfrak{B} \leftrightharpoons \langle \{0,1\}^m, Q \cup \{0,1\}, \{0,1\}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, q_0 \rangle$ (считаем, что $Q \cap \{0,1\} = \varnothing$), где

$$\widetilde{\varphi} \, \langle q, \widetilde{a} \rangle \leftrightharpoons \begin{cases} \varphi \, \langle q, \lambda^{-1} \widetilde{a} \rangle, & \text{если } q \in Q \ \wedge \ a \in \widetilde{A}; \\ \chi_{P_k} \, \langle q, \widetilde{a} \rangle, & \text{если } q \in Q \ \wedge \ a \notin \widetilde{A}; \\ 0, & \text{если } q \in \{0,1\}. \end{cases}$$

$$\widetilde{\psi}(q) \leftrightharpoons \begin{cases} \nu^k \psi(q), & \text{если } q \in Q; \\ q, & \text{если } q \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Так как для $q \in Q$, $a \in \widetilde{A}$ справедлива равносильность:

$$\chi_{P_k} \, \langle q, \widetilde{a} \rangle = 1 \ \leftrightarrow \ \langle q, \widetilde{a} \rangle \in P_k \ \leftrightarrow \ \langle q, \widetilde{a} \rangle \in P_k^0 \ \leftrightarrow \ \nu^k \psi \varphi \, \langle q, \lambda^{-1} \widetilde{a} \rangle,$$

то $\widetilde{\psi} \, \widetilde{\varphi} \langle q, \widetilde{a} \rangle = 1 \leftrightarrow \big(q \in Q \ \wedge \ \langle q, a \rangle \in P_k\big)$ и поэтому

$$\{\langle q, \widetilde{a} \rangle \in (Q \cup \{0,1\}) \times \{0,1\}^m \mid \widetilde{\psi} \ , \widetilde{\varphi} \, \langle q, \widetilde{a} \rangle = 1\}$$

— свободнопороговое отношение, а автомат g нейропорождён. При этом, на всех последовательностях $\langle \alpha^1, \ldots, \alpha^m \rangle \in (\{0,1\}^\omega)^m$, таких что $\langle \alpha^1(t), \ldots, \alpha^m(t) \rangle \in \widetilde{A}$, он повторяет функционирование автомата $\nu^k \, f \, \lambda^{-1}$. Автоматное отображение f, таким образом, нейропредставимо в кодировке $\langle \lambda, \mu \rangle$. Теорема доказана.

4.4. Пример моделируемости

Моделируемость автомата нейронной сетью зависит не только от самого автомата, но и от кодировок входов и выходов: автомат, нейропредставимый в одной кодировке, может не быть представим в другой. В качестве примера можно рассмотреть автомат f, задаваемый набором $\langle \{0,1\}^2, \{0,1\}, \{0,1\}, \varphi, \psi, 0\rangle$, где

$$\begin{aligned}\varphi\,\langle q, \langle a^1, a^2\rangle\rangle &\leftrightharpoons a^1 + a^2 \pmod 2,\\ \psi\,\langle q, a\rangle &\leftrightharpoons q.\end{aligned}$$

В самом деле, отношение

$$\{\langle q, a\rangle \mid \psi\,\varphi\,\langle q, a\rangle = 1\} = \{0,1\} \times \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$$

не является свободнопороговым, поэтому автомат f не может быть нейропорождён; однако он представим в кодировке

$$\begin{aligned}\lambda\colon \langle 0,0\rangle &\mapsto \langle 0,0,0\rangle,\\ \langle 0,1\rangle &\mapsto \langle 1,0,0\rangle,\\ \langle 1,0\rangle &\mapsto \langle 0,1,0\rangle,\\ \langle 1,1\rangle &\mapsto \langle 0,0,1\rangle\end{aligned}$$

(так как отношение $\{0,1\} \times \{\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle\}$ является ограничением свободнопорогового отношения $\{0,1\} \times \{\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 1,1,0\rangle\}$ на множество $\{\langle 0,0,0\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 0,0,1\rangle\}$).

4.5. Существование моделирующей кодировки

Теорема 2 устанавливает, в каком случае поведение автоматного отображение может быть смоделировано нейроавтоматным отображением в заданной кодировки входных и выходных символов и, следовательно, описывает все кодировки, в которых такое представление возможно. Следующая теорема устанавливает критерий существования такой представляющей кодировки.

Для функции $f\colon Q \times A \to B$ определим

$$\Omega_2(f) \leftrightharpoons \{M \subseteq B \mid \text{отношение } \{\langle q, a\rangle \in Q \times A \mid f\,\langle q, a\rangle \in M\} \text{ является 2-перестановочным}\}$$

Скажем, что $b_1, b_2 \in B$ *различимы относительно* $\Xi \subseteq 2^B$, если найдётся такое множество $M \in \Xi$, что $(b_1 \in M \wedge b_2 \notin M)$ или $(b_1 \notin M \wedge b_2 \in M)$.

Рассмотрим некоторое конечное множество A, элементы которого обозначим через через $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{|A|}$.

Теорема 3. *Для любого автомата $f\colon A^\omega \to B^\omega$ и любого его автоматного задания $\langle A, Q, B, \varphi, \psi, s_0\rangle$, все состояния и выходные символы которого достижимы, следующие утверждения равносильны:*

1) *Существует кодировка, в которой функция f нейропредставима.*
2) а) *Функция ψ несущественно зависит от входа автомата.*
   б) *Элементы множества B попарно различимы относительно $\Omega_2(\psi\,\varphi)$.*
3) *Существует кодировка $\langle \lambda\colon A \to \{0,1\}^m,\ \nu\colon B \to \{0,1\}^p\rangle$, в которой автомат f нейропредставим, причём $p \leqslant |B| - 1$, а $m \leqslant \min(|A| - 1,\ (|B| - 1) \cdot \lceil \log_2 |A| \rceil)$.*

Доказательство. Переход 1 $\to$ 2. Предположим, что функция f нейропредставима в кодировке $\lambda\colon A \to \widetilde{A} \subseteq \{0,1\}^m$, $\nu\colon B \to \widetilde{B} \subseteq \{0,1\}^p$. Тогда, во-первых, функция ψ несущественно зависит от входного символа, а во-вторых, для каждого $k \in \{1, \dots, p\}$ функция $\nu^k\,\psi\,\varphi$ является 2-перестановочной. Следовательно, если

$$\Xi \leftrightharpoons \big\{\{b \in B \mid \nu^k(b) = 1\} \,\big|\, k \in \{1, \dots, p\}\big\},$$

то $\Xi \subseteq \Omega(\psi\,\varphi)$. При этом, если $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$, то $\nu(b_1) \neq \nu(b_2)$ и $\exists k \in \{1, \dots, p\}$ $\nu^k(b_1) \neq \nu^k(b_2)$; поэтому, найдётся такое множество $M \in \Xi$, что $(b_1 \in M \wedge b_2 \notin M)$ или $(b_1 \notin M \wedge b_2 \in M)$.

Переход 2 $\to$ 3. Пусть $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$. Для различных $b_1, b_2 \in B$ выберем какое-нибудь множество $R(b_1, b_2) \in \Omega(\psi\,\varphi)$, их разделяющее. Пусть $B_k \leftrightharpoons \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Индуктивно определим последовательность $\Xi_1, \Xi_2, \dots \Xi_{p-1}$ подмножеств множества B, такую что для каждого $k \in \{1, \dots, p-1\}$ множество Ξ_k различает попарно различные элементы из B_k. Положим $\Xi_1 \leftrightharpoons \{R(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)\}$. Предположим, что множество Ξ_k уже построено. Если оно разделяет и попарно различные элементы множества B_{k+1}, то положим

$\Xi_{k+1} \leftrightharpoons \Xi_k$; в противном случае, существует ровно один элемент $b \in B_k$, неотличимый от $\mathbf{b}_{k+1}$ относительно Ξ_k (в силу транзитивности отношения неотличимости относительно Ξ_k), поэтому можно положить $\Xi_{k+1} \leftrightharpoons \Xi_k \cup \{R(b, \mathbf{b}_{k+1})\}$. Таким образом, $\Xi_p \subseteq \Omega(\psi\,\varphi)$ различает попарно различные элементы из $B_p = B$, при этом $|\Xi_p| \leqslant p-1$.

Пусть $\Xi_p = \{M_1, \ldots, M_{p-1}\}$. Определим представляющие кодировки входов и выходов. Обозначим элементы множества A через $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{|A|-1}$. Пусть $\lambda\colon A \to \{0,1\}^{|A|-1}$: $\lambda(\mathbf{a}_k) \leftrightharpoons \langle \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0\rangle$ $(k \in \{1, \ldots, |A|-1\})$, $\lambda(\mathbf{a}_0) \leftrightharpoons \langle 0, \ldots, 0\rangle$. В качестве выходной кодировки возьмём функцию $\nu\colon B \to \{0,1\}^{p-1}$, $\nu^k \leftrightharpoons \chi_{M_k}$. Докажем, что автомат f нейропредставим в кодировке $\langle \lambda, \nu\rangle$. Зафиксируем $k \in \{1, \ldots, |A|-1\}$. По предположению отношение $P_k \leftrightharpoons \{\langle q, a\rangle \mid \psi\,\varphi\,\langle q, a\rangle \in M_k\}$ 2-перестановочно, поэтому отношение $\preccurlyeq_k \leftrightharpoons \overset{\mathcal{O}_{\mathcal{R}}(P_k)}{\leqslant}$ является предпорядком на множестве A. Без ограничения общности будем полагать, что $\mathbf{a}_1 \preccurlyeq_k \mathbf{a}_2 \preccurlyeq_k \ldots \preccurlyeq_k \mathbf{a}_{|A|}$. Тогда существует такая функция $\tau_k\colon Q \to \{0, \ldots, |A|-1, |A|\}$, что $\langle q, \mathbf{a}_s\rangle \in P_k \leftrightarrow \tau_k(q) \leqslant s$. Определим теперь

$$\widetilde{P}_k \leftrightharpoons \{\langle q, a\rangle \in Q \times \{0,1\}^{|A|-1} \mid \tau_k(q) \leqslant (\langle 1, 2, \ldots, |A|-1\rangle \cdot a)\}.$$

По построению $\nu^k\,\psi\,\varphi\,\langle q, a\rangle = 1 \leftrightarrow \langle q, \lambda\, a\rangle \in \widetilde{P}_k$, поэтому автомат f нейропредставим в кодировке $\langle \lambda, \nu\rangle$.

Предложим теперь другую представляющую входную кодировку $\lambda\colon A \to \{0,1\}^{(|B|-1)\cdot\lceil \log_2 |A|\rceil}$. Пусть $C_1 = \{\mathbf{c}_{1,1}, \ldots, \mathbf{c}_{1,|A|}\}, \ldots, C_{|B|-1} = \{\mathbf{c}_{|B|-1,1}, \ldots, \mathbf{c}_{|B|-1,|A|}\}$ — подмножества множества $\{0,1\}^{\lceil \log_2 |A|\rceil}$, а $\preccurlyeq_1, \ldots, \preccurlyeq_{|B|}$ — пороговые предпорядки на множествах них (в качестве $\preccurlyeq_1, \ldots, \preccurlyeq_{|B|}$ можно взять лексикографический порядок, а вместо $C_1, \ldots, C_{|B|}$ — наименьшие $|A|$ элементов относительно этого порядка). Пусть также $\mathbf{c}_{k,1} \preccurlyeq_k \ldots \preccurlyeq_k \mathbf{c}_{k,|A|}$ $(k \in \{1, \ldots, |B|-1\})$. Отношение $P_k \leftrightharpoons \{\langle q, a\rangle \mid \psi\,\varphi\,\langle q, a\rangle \in M_k\}$ 2-перестановочно, поэтому для некоторых $\tau_k\colon Q \to \{1, \ldots, |A|+1\}$ и $w_k\colon A \to \{1, \ldots, |A|\}$ выполнено: $\langle q, a\rangle \in P_k \leftrightarrow \tau_k(q) \leqslant w_k(a)$. Определим кодировку λ:

$$\lambda(a) \leftrightharpoons \langle \mathbf{c}^1_{1,w_1(a)}, \ldots, \mathbf{c}^{\lceil \log_2 |A|\rceil}_{1,w_1(a)}, \ldots, \mathbf{c}^1_{|B|-1,w_{|B|-1}(a)}, \ldots, \mathbf{c}^{\lceil \log_2 |A|\rceil}_{|B|-1,w_{|B|-1}(a)}\rangle$$

(где через $\mathbf{c}_{i,j}^k$ обозначены компоненты вектора $\mathbf{c}_{i,j}$: $\mathbf{c}_{i,j} = \langle \mathbf{c}_{i,j}^1, \ldots, \mathbf{c}_{i,j}^{\lceil \log_2 |A| \rceil} \rangle$). По построению

$$\nu^k \, \psi \, \varphi \, \langle q, a \rangle = 1 \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \tau_k(q) \leqslant (\langle \underbrace{0, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots, 0}_{(k-1) \cdot \lceil \log_2 |A| \rceil}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\lceil \log_2 |A| \rceil}, 0, \ldots, 0 \rangle \cdot a),$$

поэтому автомат f нейропредставим в кодировке $\langle \lambda, \nu \rangle$.

Переход 3 $\to$ 1. Очевиден. Теорема доказана.

Как оказалось, далеко не все автоматы с задержкой реализуемы нейронной сетью хотя бы в какой-то кодировке. В качестве примера непредставимого автомата можно взять автомат f, задаваемый набором $\langle \{0,1\}, \{0,1\}, \{0,1\}, \varphi, \psi, 0 \rangle$, где $\varphi \, \langle q, a \rangle \leftrightharpoons q + a \pmod 2$, $\psi \, \langle q, a \rangle \leftrightharpoons q$. В самом деле, по построение отношение $\{\langle q, a \rangle \mid \psi \, \varphi \, \langle q, a \rangle = 1\} = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$ не является 2-перестановочным, поэтому автомат f не реализуем нейронной сетью ни в какой кодировке

Утверждение 13. *Для любых конечных множеств A ($|A| \geqslant 2$) и B существует автоматное отображение $f \colon A^\omega \to B^\omega$, нейропредставимое в какой-то кодировке, такое что для любой представляющей кодировки $\langle \lambda, \, \nu \colon B \to \{0,1\}^p \rangle$ справедливо $p \geqslant |B| - 1$.*

Доказательство. Для $|B| \leqslant 2$ утверждение очевидно; докажем его для $|B| \geqslant 3$. Без ограничения общности будем считать, что $A = \{0, 1, \ldots, m\}$ ($m \in \mathbb{N}$), $B = \{0, 1, \ldots, n\}$ ($n \geqslant 2$). Рассмотрим автоматное отображение f, задаваемое автоматом $\langle A, B, B, \varphi, \psi, 1 \rangle$, где

$$\begin{array}{lll}
\varphi \, \langle 2k, 0 \rangle \leftrightharpoons 2k + 1, & \varphi \, \langle 2k, 1 \rangle \leftrightharpoons 0 & (\text{при } 2k \neq n), \\
\varphi \, \langle 2k+1, 0 \rangle \leftrightharpoons 0, & \varphi \, \langle 2k+1, 1 \rangle \leftrightharpoons 2k + 2 & (\text{при } 2k + 1 \neq n). \\
\varphi \, \langle n, 0 \rangle = 0, & \varphi \, \langle n, 1 \rangle = 0, & \\
\varphi \, \langle q, 2 \rangle = \ldots = \varphi \, \langle q, m \rangle = 0, & & \\
\psi \, \langle q, a \rangle \leftrightharpoons q. & &
\end{array}$$

По построению $\Omega_2(\psi \, \varphi) = \{\{1\}, B \setminus \{1\}, \ldots, \{p\}, B \setminus \{p\}\}$, поэтому, с одной стороны, элементы множества B попарно различимы относительно $\Omega_2(\psi \, \varphi)$ и существует кодировка, в которой автомат f нейропредставим, а с другой стороны для любого множества $\Xi \subseteq \Omega_2(\psi \, \varphi)$

мощности не больше $p-1$ существует такое $q \in Q$, что множество Ξ не содержит ни $\{q\}$, ни $B \setminus \{q\}$, поэтому выходные символы 0 и q неразличимы относительно Ξ. Утверждение доказано.

4.6. Способы описания нейроавтоматных отображений

Оперируя с бесконечными последовательностями символов, нейроавтоматные отображения представляют собой (в некотором смысле) бесконечный объект. Ниже обсуждаются некоторые способы конечного описания нейроавтоматных отображений.

Структурное описание. Как показано в утверждении 10, в точности все нейроавтоматные отображения являются решением некоторой системы автоматных уравнений, параметризуемой конечным набором нейронов $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n \rangle$. Этот набор нейронов, таким образом, может использоваться в качестве описателя нейроавтоматного отображения, что соответствует заданию одной из его возможных структурных реализаций. Такое задание, хотя и полно (все нейроавтоматные отображения так описуемы), но неоднозначно.

Автоматное и языковое описание. Как и для автоматных отображений вообще, для нейроавтоматных отображений возможно задание в терминах конечных автоматов или регулярных выражений. Однако, они не только не дают однозначного задания, но и избыточны в том смысле, что автоматом (или регулярным выражением) может быть задано, вообще говоря, и ненейроавтоматное отображение. Это приводит к необходимости наложения дополнительных условий на функции переходов и выходов автомата или на структуру регулярного выражения (например, как в теореме 1), что может быть неудобно.

Суперпозиционое описание. Как показано в теореме 1, нейроавтоматные функции суть в точности все функции, представимые в виде $f\,\alpha = \mathfrak{Z}_{c_0}\,\chi_P\,\langle g\,\alpha,\, \alpha^1, \ldots, \alpha^m \rangle$, где $c_0 \in \{0,1\}$, $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$ —

свободнопороговое отношение, а $g\colon (\{0,1\}^m)^\omega \to U^\omega$ — автомат с задержкой. Таким образом, автомату f можно поставить в соответствие набор $\langle c_0, P, g\rangle$; такое задание будем называть *суперпозиционным.*

Назовём свободнопороговое отношение $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$ *приведённым*, если все классы $\overset{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P)}{\sim}$-эквивалентности одноточечны (иными словами, когда предпорядок $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P)$ является линейным порядком). Суперпозиционное задание $\langle c_0, P, g\rangle$, где $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$, $g\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to U^\omega$, будем называть *приведённым*, если отношение P приведённо и каждый выходной символ $u \in U$ автомата g достижим. Приведённое суперпозиционное задание нейроавтоматных отображений единственно (с точностью до переименования элементов множества U), точнее справедливо

Утверждение 14. *Пусть $\langle c_1, P_1, g_1\rangle$, $\langle c_2, P_2, g_2\rangle$ — два приведённых суперпозиционных задания некоторого нейроавтоматного отображения $f\colon (\{0,1\}^\omega)^m \to \{0,1\}^\omega$; $P_1 \subseteq U_1 \times \{0,1\}^m$, $P_2 \subseteq U_2 \times \{0,1\}^m$. Тогда существует биекция $\lambda\colon U_1 \to U_2$, такая что $\langle u_1, a\rangle \in P_1 \leftrightarrow \langle \lambda\, u_1, a\rangle \in P_2$ и $\lambda\, g_1 = g_2$.*

Доказательство. По условию

$$f\,\alpha = \mathfrak{Z}_{c_1}\,\chi_{P_1}\,\langle g_1\,\alpha,\, \alpha^1, \dots, \alpha^m\rangle = \mathfrak{Z}_{c_2}\,\chi_{P_2}\,\langle g_2\,\alpha,\, \alpha^1, \dots, \alpha^m\rangle,$$

поэтому $c_1 = c_2$ и $\chi_{P_1}\langle g_1\,\alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^m\rangle = \chi_{P_2}\langle g_2\,\alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^m\rangle$. Пусть

$$P_k'' U_k \leftrightharpoons \{A \subseteq \{0,1\}^m \mid \exists u_k \in U_k\ A = \{a \mid \langle u_k, a\rangle \in P_k\}\}$$

($k \in \{1,2\}$). Тогда $P_1'' U_1 = P_2'' U_2$. Действительно, если бы существовал такой $u_1 \in U_1$, что $\{a \mid \langle u_1, a\rangle \in P_1\} \notin P_2'' U_2$, то равенство $\chi_{P_1}\langle g_1\,\alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^m\rangle = \chi_{P_2}\langle g_2\,\alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^m\rangle$ нарушалось бы на последовательности α, для которой $g_1\,\alpha\,t = u_1$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$ (а такая последовательность α существует в силу условия достижимости всех выходных символов автомата g_1).

Множества U_1 и U_2 не содержат соответственно $\overset{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P_1)}{\sim}$- и $\overset{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P_2)}{\sim}$-эквивалентных элементов, поэтому соответствия

$$\lambda_k\colon U_k \to P_k'' U_k,$$
$$\lambda_k\colon u_k \in U_k \mapsto \{a \mid \langle u_k, a\rangle \in P_k\} \quad (k \in \{1,2\})$$

взаимно-однозначны. В качестве λ теперь можно взять $\lambda \leftrightharpoons \lambda_2^{-1}\lambda_1$. Утверждение доказано.

По данному суперпозиционному заданию нейроавтоматного отображения нетрудно построить одно из его приведённых задания. Действительно, пусть $f\,\alpha = \mathfrak{Z}_{c_0}\,\chi_P\,\langle g\,\alpha, \alpha\rangle$, где $P \subseteq U \times \{0,1\}^m$ свободнопорогово. Пусть $\pi\colon U \to U/\overset{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P)}{\sim}$ — отображение, сопоставляющее каждому значению аргумента u_0 его класс эквивалентности $\{u \in U \mid u \overset{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P)}{\sim} u_0\}$,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(P) \leftrightharpoons \{\langle \pi\,u, a\rangle \in (U/\overset{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(P)}{\sim}) \times \{0,1\}^m \mid \langle u, a\rangle \in P\}.$$

Приведённым суперпозиционным заданием автомата f тогда будет $\langle c_0, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(P), \pi\,g\rangle$.

Список литературы

[1] Elgot C. C. Truth functions realizable by single threshold organs // IEEE Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design. 1961. P. 225–245.

[2] Chow C. K. Boolean functions realizable with single threshold devices // Proc. IRE. 49. 1961. P. 370–371.

[3] Kleene S. C. Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata // Automata Studies. Princeton University Press, 1956. P. 3–42.

[4] McCulloch W. S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bull. Math. Biophys. 1943. V. 5. P. 115–133.

[5] Minsky M. L. Computation: Finite and Infinite Machines. Prentice-Hall, 1967.