Решение автоматных уравнений с одной неизвестной

И. В. Лялин

Пусть имеется автоматная схема S, полученная из автоматов с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Пусть в S один автомат x разрешается заменять на любой подходящий по входам и выходам автомат x' так, чтобы полученная схема S' реализовывала автомат, эквивалентный наперед заданному автомату h. В статье приводится алгоритм, устанавливающий возможность такой замены, а также описывается множество всех подходящих x'. Данная работа является обобщением [1] на случай схем с обратными связями.

Введение

Пусть имеется схема из автоматов, в которой один автомат не фиксирован. То есть мы можем подставлять на его место любой автомат с тем же числом входов и выходов и с теми же алфавитами входов и выходов. Меняя нефиксированный автомат, мы можем влиять на поведение всей схемы. В данной статье рассматривается следующая задача: найти множество всех таких автоматов, которые при подстановке вместо нефиксированного автомата так влияют на схему, что она становится эквивалентной напередзаданному автомату h. Показано, что множество всех таких автоматов описывается недетерминированным автоматом, и существует алгоритм, который по произвольной схеме строит этот недетерминорованный автомат.

В [2] и [3] решается задача нахождения неизвестного компонента в автоматных схемах четырех видов (рис. 1, 2, 3, 4). Здесь A — известный автомат, а X — искомый. Отличие данной работы в том

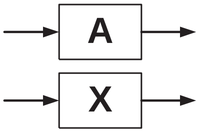

Рис. 1.

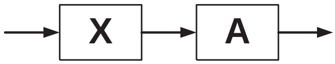

Рис. 2.

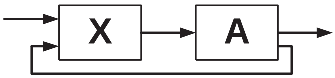

Рис. 3.

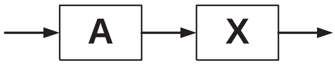

Рис. 4.

что задача решается для произвольной схемы, и находится не одно решение а все.

В работе [4] рассматривается задача о решении систем автоматных уравнений, представляющих собой обобщение систем канонических уравнений. Решается задача существования и нахождения решения, а также предлагается алгоритм для перечисления всех возможных решений. Отличие такой постановки задачи от рассматриваемой в данной статье в том, что ограничения задаются на внутреннюю структуру автомата, а не на его поведение. И как следствие возможна ситуация что из двух эквивалентных автоматов один удовлетворяет уравнению, а второй — нет. В постановке данной статьи такое невозможно. Более того, в данной статье не просто перечисляются все решения, а определяются все одновременно с помощью недетерминированного автомата. Уравнения из [4] легко сводятся к уравнениям в постановке данной статьи.

1. Основные понятия и результаты

Абстрактным конечным инициальным автоматом называется шестерка $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q^0)$, где A, Q, B — конечные множества, φ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из Q, ψ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из B, $q^0 \in Q$. Множества A, Q, B называются соответственно *входным алфавитом, алфавитом состояний* и *выходным алфавитом* автомата V. Функция φ называется *функцией переходов*, а функция ψ — *функцией выходов* автомата V. $q^0 \in Q$ называется *начальным состоянием.* Через A^* обозначим множество всех конечных слов в алфавите A. Абстрактный конечный инициальный автомат определяет автоматную функцию $f : A^* \to B^*$, которая задается рекуррентно соотношениями

$$\begin{cases} q(1) = q^0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \\ f(t) = \psi(q(t), a(t)). \end{cases}$$

Множество автоматов с входным алфавитом A и выходным B обозначим $P(A, B)$.

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q^0)$ и $z = (B, Q_z, C, \varphi_z, \psi_z, q_z^0)$. Скажем, что автомат $\pi(V, z) = (A, Q \times Q_z, C, \varphi_\pi, \psi_\pi, (q^0, q_z^0))$ получен из автоматов V и z с помощью *операции суперпозиции*, если $\varphi_\pi((q, q_z), a) = (\varphi(q, a), \varphi_z(q_z, \psi(q, a)))$ и $\psi_\pi((q, q_z), a) = \psi_z(q_z, \psi(q, a))$. Понятно, что $\pi(V, z) \in P(A, C)$.

Если $V = (A \times A', Q, B \times B', \varphi, \psi, q^0)$, то будем говорить что V имеет два входа с алфавитами A и A' и два выхода с алфавитами B и B'. Договоримся входы автомата V обозначать x_1, x_2, а выходы y_1, y_2. Функции выхода на выходах y_1, y_2 обозначим соответственно ψ_1 и ψ_2.

Скажем, что автомат $o(V) \in P(A, B)$ получен из автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q^0)$ с помощью *операции обратной связи (о.с.)*, если он вычисляется алгоритмически следующим образом. Считаем, что о.с. корректна в состоянии $q \in Q$, если ψ_2 фиктивно зависит от x_2 при $q(t) = q$, то есть для всех $a \in A$, $b_1, b_2 \in B'$ выполняется $\psi_2(q, (a, b_1)) = \psi_2(q, (a, b_2))$. Обозначим $\psi_2(q, a) = \psi_2(q, (a, b_1))$. Вычисление функции выхода $\psi_o(t)$ автомата $o(V)$ осуществляется по схеме

$$\begin{cases} q(1) = q^0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), (a(t), \psi_2(q(t), a(t)))), \\ \psi_o(t) = \psi_1(q(t), (a(t), \psi_2(q(t), a(t)))). \end{cases}$$

Считаем, что о.с. корректна, если она корректна в начальном состоянии q^0, и из её корректности в состоянии $q(t)$ следует корректность в состоянии $q(t+1)$.

Пусть $S = (A \times B', Q, B \times A', \varphi, \psi, q^0)$ и $x = (A', Q_x, B', \varphi_x, \psi_x, q_x^0)$. Рассмотрим оператор $R_S(x)$, определенный на автматах $x \in P(A', B')$ и задаваемый соответственно $R_S(x) = o(\pi(S, x))$ (рис. 5). $P_S(A', B')$ обозначим множество всех $x \in P(A', B')$, для которых инициальная обратная связь в R_S корректна. Понятно, что оператор R_S отображает множество $P_S(A', B')$ во множество $P(A, B)$.

Автоматным уравнением с одной неизвестной называется пара автоматов $S \in P(A \times B', B \times A')$ и $h \in P(A, B)$. Записывается автоматное уравнение так: $S(x) = h$. *Решением* автоматного уравнения $S(x) = h$ является каждый такой автомат $z \in P_S(A', B')$, что $R_S(z) = h$.

Возникает задача решения автоматных уравнений, то есть нахождения всех решений произвольного уравнения $S(x) = h$ (рис. 5). Решению этой задачи посвящена данная статья. Ниже приводится алгоритм, позволяющий определить имеет ли произвольное автоматное уравнение решение или нет.

Будем обозначать через h_0 константный автомат с одним выходом, всегда на выходе выдающий 0.

Утверждение 1. *Для любого уравнения $S(x) = h$ существует такое уравнение $S'(x) = h_0$, что множества их решений совпадают.*

Утверждение 1 позволяет в дальнейшем рассматривать только уравнения вида $S(x) = h_0$, тем самым упрощая изложение.

Введем некоторые необходимые определения.

Недетерминированным автоматом (НДА) называется следующая шестерка: $(A, U, B, \varphi, \psi, u^0)$, где

A — входной алфавит,

U — множество состояний НДА,

B — выходной алфавит,

$\psi : U \times A \to B$ — функция выхода,

$\varphi : U \times A \to 2^U$ — функция переходов,

$u^0 \subseteq U$ — множество начальных состояний, u^0 может быть пустым.

НДА, у которого множество состояний пусто, будем называть *пустым.*

Детерминированным автоматом (ДА) называется НДА $(A, U, B, \varphi, \psi, u^0)$, у которого:

1) $|u^0| = 1$

2) Для всех $u \in U$ и $a \in A$ выполняется $|\varphi(u, a)| = 1$

Будем говорить что ДА $z = (A, Q, B, \varphi_z, \psi_z, q^0)$ *вкладывается* в НДА $N = (A, U, B, \varphi, \psi, u^0)$, если существует такое отображение $\omega : Q \to 2^U$, что:

1) $\omega(q^0) \cap u^0 \neq \varnothing$,

2) Для всех $q \in Q, u \in \omega(q), a \in A$ выполняется $\psi_z(q, a) = \psi(u, a)$,

3) Для произвольных $q_1, q_2 \in Q, a \in A$ если $q_2 = \varphi_z(q_1, a)$, то для всех $u \in \omega(q_1)$ выполняется $\omega(q_2) \cap \varphi(u, a) \neq \varnothing$.

Утверждение 2. *Пусть автомат* $z_1 = (A, Q_1, B, \varphi_1, \psi_1, q_1^0)$ *отображением* w *вложим в НДА* $N = (A, U, B, \varphi, \psi, u^0)$ *и автомат* $z_2 = (A, Q_2, B, \varphi_2, \psi_2, q_2^0)$ *эквивалентен автомату* z_1*. Тогда* z_2 *тоже вложим в* N*.*

Будем считать, что каждый недетерминированный автомат определяет некоторое множество детерминированных автоматов, а именно множество всех автоматов, которые в него вкладываются.

Алгоритм нахождения решения автоматного уравнения

Алгоритм принимает на вход автоматное уравнение $S(x) = h_0$. На выходе выдает некий НДА, который обладает тем свойством что в него вложимы те и только те автоматы, которые являются решением входного уравнения. Пусть S имеет 2 входа x_1 и x_2 с алфавитами A и B' соответственно, 2 выхода y_1 и y_2 с алфавитами $\{0, 1\}$ и A', множество состояний Q, начальное состояние q^0, функцию переходов φ и функции выходов ψ_1 и ψ_2. Пусть F — множество функций $f : A' \to B'$. Пусть F_c — множество константных функций $f : A' \to B'$.

1. Построим по S ориентированный граф $G_1(S)$, каждая дуга которого будет иметь метку из множества $A \times A'$. Множество вершин

Q_1 есть множество $Q \times F$, за исключением таких вершин (q, f), что $\psi_2(q)$ зависит существенно от входа x_2 и f — не константная функция. Вершины вида (q^0, f), где $f \in F$, назовем выделенными.

Для каждой пары $(q, f) \in Q_1$ и буквы $a \in A$ вычислим числа a' и b следующим образом:

а) Если $\psi_2(q)$ существенно зависит от входа x_2 и $f = b' \in F_c$, то $a' = \psi_2(q, (a, b'))$ и $b = \psi_1(q, (a, b'))$.

б) Если $\psi_2(q)$ не существенно зависит от входа x_2, то $a' = \psi_2(q, (a, b''))$, где b'' — любая буква из B', и $b = \psi_1(q, (a, f(a')))$.

Пусть $q' = \varphi(q, (a, f(a')))$. Если $b = 0$, то проведем в графе $G_1(S)$ дуги с метками (a, a') из вершины (q, f) во все вершины вида $(q', f') \in Q_1$, где $f' \in F$.

2. Построим граф $G_2(S)$. Для этого проведём с $G_1(S)$ следующую процедуру. Вершину графа $G_1(S)$ назовём неправильной, если существует такое $a \in A$, что множество дуг, выходящих из данной вершины и помеченных метками вида (a, a'), пусто. Выкинем из $G_1'(S)$ все неправильные вершины. При выкидывании вершины выкидываются также все дуги выходящие из неё или входящие в неё. После этого какие-нибудь другие вершины могут стать неправильными. Выкидываем и их тоже. Продолжаем выкидывание до тех пор пока в графе не останется неправильных вершин. Полученный граф назовём $G_1'(S)$. Выкинем из графа $G_1'(S)$ все вершины, недостижимые из выделенных вершин, и получим граф $G_2(S)$. Множество вершин графа $G_2(S)$ обозначим Q_2.

3. Если множество Q_2 пусто, то НДА $G_3(S)$ считаем пустым. Иначе, строим НДА $G_3(S) = (A', U, B', \varphi, \psi, u^0)$ следующим образом.

U есть множество всех таких $u = (\{q_1, \ldots, q_{n_u}\}, f) \in 2^Q \times F$, что для всех $i : 1 \leqslant i \leqslant n_u$ $(q_i, f) \in Q_2$.

Начальными являются все состояния вида $(\{q^0\}, f)$, где $f \in F$, и никакие больше.

$\psi(u, a') = \psi((\{q_1, \ldots, q_{n_u}\}, f), a') \stackrel{\text{def}}{=} f(a')$.

Пусть $(q, f) \in Q_2$ и $a' \in A'$. Обозначим $\chi^1((q, f), a')$ множество всех таких $q' \in Q$, для которых найдется такое $f' \in F$, что в графе $G_2(S)$ существует дуга из (q, f) в $(q', f') \in Q_2$ с меткой вида $(*, a')$, где вместо $*$ может быть поставлена любая буква из A.

Пусть $u = (\{q_1, \ldots, q_{n_u}\}, f) \in U$ и $a' \in A'$. Положим по определению

$$\chi^2(u, a') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n_u} \chi^1((q_i, f), a').$$

$\varphi(u, a')$ положим по определению как множество всех $u' \in U$ вида $u' = (\chi^2(u, a'), f)$, где $f \in F$.

Теорема 1 (решение уравнения с одной неизвестной). *Автомат z является решением автоматного уравнения $S(x) = h_0$ тогда и только тогда, когда z вложим в $G_3(S)$.*

2. Упрощение автоматного уравнения

Доказательство утверждения 1.

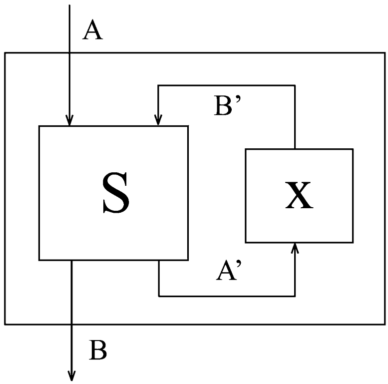

Рис. 5.

Пусть $d(a, b)$ — такой автомат, что для произвольного $t \geqslant 1$ если $a(t) = b(t)$, то $d(t) = 0$, иначе $d(t) = 1$.

Рассмотрим схему S', которая получается из схем S и h следующим образом. Выход y_1 автомата S и выход автомата h соединяем со входами автомата d. вход x_1 и вход h отождествляются. Получается схема, приведенная на рис. 6.

Нетрудно видеть, что уравнение $S(x) = h$ имеет то же множество решений, что и $S'(x) = h_0$. Утверждение доказано.

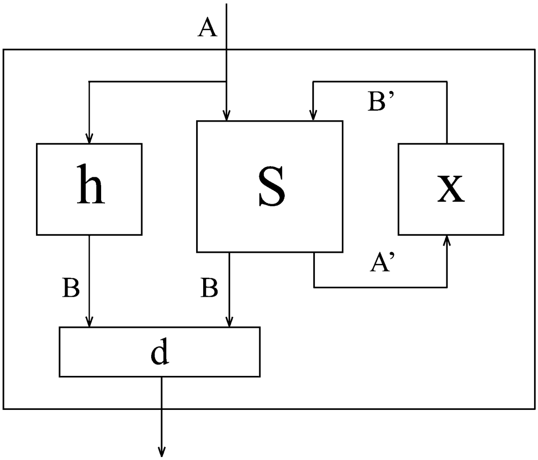

Рис. 6.

3. Корректность определения вложимости

Доказательство утверждения 2. Пусть $e : Q_2 \to 2^{Q_1}$ — такое отображение, которое каждому состоянию $q_2 \in Q_2$ ставит в соответствие множество эквивалентных ему состояний из Q_1. Докажем, что отображение w', такое что для любого $q_2 \in Q_2$ выполнено $w'(q_2) = \bigcup_{q_1 \in e(q_2)} w(q_1)$, вкладывает z_2 в N.

1) $q_1^0 \in e(q_2^0)$. Значит $w(q_1^0) \subseteq w'(q_2^0)$. Поскольку w — вложение z_1 в N, то $w(q_1^0) \cap u^0 \neq \varnothing$. Значит $w'(q_2^0) \cap u^0 \neq \varnothing$.

2) Возьмем произвольные $q_2 \in Q_2$, $u \in w'(q_2)$, $a \in A$. По определению w' существует такое $q_1 \in e(q_2)$, что $u \in w(q_1)$. Состояния q_1 и q_2 эквивалентны, значит $\psi_2(q_2, a) = \psi_1(q_1, a)$. С другой стороны w — вложение z_1 в N, значит $\psi_1(q_2, a) = \psi(u, a)$. Следовательно $\psi_2(q_2, a) = \psi(u, a)$.

3) Пусть $q_2, q_2' \in Q_2$, $a \in A$ такие, что $q_2' = \varphi_2(q_2, a)$. Возьмем произвольное $u_1 \in w'(q_2)$. По определению w' существует такое $q_1 \in e(q_2)$, что $u_1 \in w(q_1)$. Поскольку состояния q_1 и q_2 эквивалентны, то в автомате z_1 существует некоторое состояние q_1', которое эквивалентно состоянию q_2' и $q_1' = \varphi_2(q_1, a)$. Значит $q_1' \in e(q_2')$. Значит $w(q_1') \subseteq w'(q_2')$. Поскольку w есть вложение z_1 в N, то существует такое $u_2 \in$

$w(q_1') \subseteq w'(q_2')$, что $u_2 \in \varphi(u_1, a)$. Итак, для произвольного $u_1 \in w'(q_2)$ мы нашли такое $u_2 \in w'(q_2')$, что $u_2 \in \varphi(u_1, a)$. Утверждение доказано.

4. Корректность алгоритма

Скажем, что $(q, f) \in Q \times F$ есть *сопутствующее* состояние автомата $R_S(z)$ в какой-то момент времени, если S в этот момент времени находится в состоянии q, а f — выходная функция автомата z в этот момент времени.

Утверждение 3. *Пусть $S(z) = h_0$. Тогда $S(z)$ в любой момент времени находится в сопутствующем состоянии, входящим в Q_2.*

Доказательство. Пусть Q' — множество всех сопутствующих состояний, в которых может находиться автомат $S(z)$. Они являются вершинами графа $G_1(S)$, ведь в каждом из них должны быть корректными все обратные связи. Поскольку z — решение, то для каждой вершины из Q' и для каждого $a \in A$ найдется дуга, помеченная меткой $(a, 0, a')$ и ведущая в вершину из Q'. Следовательно, ни одна вершина из Q' не будет выкинута и войдет в $G_1''(S)$. Пусть автомат z в начальном состоянии реализует функцию выхода f. Тогда вершина (q^0, f) входит в Q' и все вершины Q' достижимы из неё. Следовательно, все вершины Q' являются вершинами $G_2(S)$, то есть $Q' \subseteq Q_2$. Утверждение доказано.

Следствие 1. *Если существует такой автомат z, что $S(z) = h_0$, то множество состояний $G_2(S)$ не пусто.*

Доказательство теоремы 1.

Пусть $z = (A', Q_z, B', \varphi_z, \psi_z, q_z^0)$.

Пусть $G_3(S) = (A', U, B', \varphi, \psi, u^0)$ — НДА.

Докажем необходимость. Автомат z есть решение уравнения $S(z) = h_0$, докажем что он вкладывается в $G_3(S)$. Возьмем произвольное $q_z \in Q_z$. Обозначим через $\Omega(q_z)$ множество всех состояний, в которых может находиться автомат S в те моменты времени, когда z находится в состоянии q_z. По утверждению 3 если $q \in \Omega(q_z)$, то $(q, \psi_z(q_z))$ есть вершина графа $G_2(S)$. Следовательно,

$u = (\Omega(q_z), \psi_z(q_z))$ входит в множество U. Пусть $\omega(q_z)$ есть подмножество U, содержащее u и все такие $u' = (r, \psi_z(q_z))$, что $r \subseteq \Omega(q_z)$. Аналогично ω определяется и для всех других $q_z \in Q_z$. Докажем, что ω есть вложение z в $G_3(S)$.

1. В начальный момент времени z находится в состоянии q_z^0, а S в состоянии q^0. Значит $q^0 \in \Omega(q_z^0)$. В НДА $G_3(S)$ есть начальное состояние $u = (\{q^0\}, \psi_z(q_z^0))$. По определению ω имеем $u \in \omega(q_z^0)$. Значит $\omega(q^0) \cap u^0 \neq \varnothing$.

2. Пусть q_z — произвольное состояние автомата z, а $u = (\{q_1, \ldots, q_n\}, \psi_z(q_z))$ — любое состояние из $\omega(q_z)$. Тогда для всех $a' \in A'$ имеем $\psi(u, a') = \psi_z(q_z, a')$.

3. Пусть $q_z, q_z' \in Q_z$, $a' \in A'$ — такие, что $q_z' = \varphi_z(q_z, a')$. Возьмем u_1 — любое состояние из $\omega(q_z)$. Необходимо доказать что найдется такое $u_2 \in \omega(q_z')$, что $u_2 \in \varphi(u_1, a')$. Докажем, что $u_2 = (\chi^2(u_1, a'), \psi_z(q_z'))$ удовлетворяет этим условиям. Пусть $u_1 = (\{q_1, \ldots, q_n\}, \psi_z(q_z))$ и $u_2 = (\{r_1, \ldots, r_m\}, \psi_z(q_z'))$.

а) Докажем, что $\{r_1, \ldots, r_m\} \subseteq \Omega(q_z')$. Раз $u_1 \in \omega(q_z)$, то для всех $i : 1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $q_i \in \Omega(q_z)$, значит $(q_i, \psi_z(q_z))$ есть вершина графа $G_2(S)$.

$$\{r_1, \ldots, r_m\} = \chi^2(u_1, a') = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \chi^1(q_i, a').$$

По определению χ_1 отсюда следует что для любого r_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ найдется такое q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что в графе $G_2(S)$ из q_i в r_j идет дуга с меткой (a, a') при некоторым $a \in A$. Пусть S находится в состоянии q_i, а z находится в состоянии q_z (это возможно по определению $\Omega(q_z)$). Пусть на вход x_1 подали a. Тогда S перейдет в состояние r_j, на выходе y_2 будет a' и z перейдет в состояние $q_z' = \varphi_z(q_z, a')$ (по определению графа $G_1(S)$). Значит, для любого $1 \leqslant j \leqslant m$ $r_j \in \Omega(q_z')$

б) Поскольку $\{r_1, \ldots, r_m\} \subseteq \Omega(q_z')$, то для любого $1 \leqslant j \leqslant m$ $(r_j, \psi_z(q_z'))$ есть вершина графа $G_2(S)$. Значит, $u_2 \in U$.

в) Поскольку $\{r_1, \ldots, r_m\} \subseteq \Omega(q_z')$ и $u_2 \in U$, то по определению ω имеем $u_2 \in \omega(q_z')$.

г) Поскольку $u_2 \in U$ и $u_2 = (\chi^2(u_1, a'), \psi_z(q_z'))$, то по определению φ имеем $u_2 \in \varphi(u_1, a')$.

Таким образом доказана вложимость z в $G_3(S)$.

Докажем достаточность. Пусть z вложим в $G_3(S)$ отображением ω. Нужно доказать что $S(z) = h_0$. Введем отображение $\Omega : Q_z \to 2^Q$.

$$\forall q_z \in Q_z \quad \Omega(q_z) = \bigcup_{u=(\{q_1,\ldots,q_{n_u}\},\psi_z(q_z))\in\omega(q_z)} \{q_1, \ldots, q_{n_u}\}.$$

Докажем, что в любой момент времени если z находится в состоянии q_z, то S находится в каком-то состоянии q из множества $\Omega(q_z)$. Сопутствующее состояние $(q, \psi_z(q_z))$ является вершиной графа $G_2(S)$ (по определению $G_3(S)$), в этом состоянии $S(z)$ выдает на выходе 0. Поэтому $S(z)$ будет равен h_0.

Доказывать будем индукцией по длине входного слова из алфавита A. В начальный момент времени (длина входного слова — ноль) S находится в состоянии q^0. Из определения вложимости следует, что хотя бы одно начальное состояние $G_3(S)$ попадает в $\omega(q_z^0)$. А поскольку все они имеют вид $(\{q^0\}, f)$, то из них только $(\{q^0\}, \varphi_z(q_z^0))$ может входить в $\omega(q_z^0)$. Значит, оно и входит. А значит $q^0 \in \Omega(q_z^0)$. Базис индукции доказан.

Пусть утверждение доказано для всех слов длины n ($n \geqslant 0$). Докажем его для всех слов длины $n+1$. Возьмем произвольное слово $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n a}$ длины $n+1$. Пусть после слова $\overline{a_1 \ldots a}_n$ z оказался в состоянии q_z а S — в состоянии $q \in \Omega(q_z)$. Раз $q \in \Omega(q_z)$, то существует такое $u = (r, f) \in \omega(q_z)$, что $q \in r$.

Пусть после этого на вход x_1 подается a, а на выходе y_2 — $a' \in A'$.

В следующий момент времени z перейдет в какое-то состояние $q'_z = \varphi(q_z, a')$, а S перейдет в состояние q'. По определению $G_1(S)$ и χ^1 имеем $q' \in \chi^1(q, a')$. По определению χ^2 имеем $q' \in \chi^2(u, a')$. Поскольку z вложим в $G_3(S)$ отображением ω, то найдется такое $u' \in \omega(q'_z)$, что $u' \in \psi(u, a')$. По построению $G_3(S)$ u' может быть только вида $u' = (\chi^2(u, a'), f)$, где $f \in F$. Значит найдется такое $f \in F$, что $(\chi^2(u, a'), f) \in \omega(q'_z)$. А поскольку $q' \in \chi^2(u, a')$, то по определению Ω имеем $q' \in \Omega(q'_z)$. Шаг индукции и теорема в целом доказаны.

Список литературы

[1] Лялин И. В. О решении автоматных уравнений // Дискретная Математика. Т. 16, вып. 2. 2004.

[2] Григорян А. К. Метод декомпозиции конечных автоматов // Автоматика и Телемеханика. № 5. 1968.

[3] Григорян А. К. Метод декомпозиции конечных автоматов с выделением выходного и входного автоматов // Автоматика и Телемеханика. № 10. 1968.

[4] Подколзин А. С., Ушчумлич Ш. М. О решении систем автоматных уравнений // Дискретная Математика. Т. 2, вып. 1. 1990.