О неразрешимости проблемы полноты для дефинитных автоматов*

Д. Н. Жук

В работе рассматриваются системы вида $M = F \cup \nu$, где F — некоторый класс Поста, а ν — конечная система дефинитных автоматов. Выделены некоторые классы Поста, для которых проблемы полноты и A-полноты для систем вида $F \cup \nu$ алгоритмически неразрешимы.

Введение

В работах [10, 3] установлена алгоритмическая неразрешимость задач о полноте и A-полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для конечных систем автоматных функций. Для систем автоматов, содержащих все булевы функции, указанные задачи алгоритмически разрешимы [4, 5]. Д.Н.Бабин исследовал на полноту и A-полноту системы вида $F \cup \nu$, где F — некоторый класс Поста, а ν — конечная система автоматных функций. Ему удалось построить классификацию классов Поста по их способности гарантировать разрешимость проблемы полноты конечных систем автоматов. Оказалось, что проблемы полноты и A-полноты для систем вида $F \cup \nu$ разрешимы точно тогда, когда F содержит либо функцию $x \oplus y \oplus z$, либо функцию $xy \vee yz \vee xz$ [6].

Похожие результаты были получены для дефинитных автоматов. Было показано, что для этих автоматов задачи о полноте и A-полноте относительно операции суперпозиции алгоритмически неразрешимы [7]. Ранее автор показал, что для систем дефинитных автоматов

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00240)

вида $P_2 \cup \nu$ существует алгоритм проверки на полноту и A-полноту таких систем автоматов [8]. Для каждого конечного ν он заключается в проверке непринадлежности ν конечному числу предполных классов. Естественно исследовать на полноту и A-полноту системы вида $F \cup \nu$, где F — некоторый класс Поста, а ν — конечная система дефинитных автоматов. Возникает разделение классов Поста на сильные и слабые по их способности гарантировать разрешимость полноты и A-полноты для дефинитных автоматов. В данной работе выделены слабые классы Поста.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Кудрявцеву В. Б. за оказанную помощь и поддержку в исследовании задачи и написании данной работы.

1. Основные понятия и результаты

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $E_2 = \{0, 1\}$, ${E_2}^l$ — множество всех слов длины l в алфавите E_2, E — множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц. Далее такие последовательности называем сверхсловами. Множество E^n состоит из всех наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E$. Если $a, b \in E_2$, то $\overline{a}$ — отрицание a, $a \vee b$ — дизъюнкция a и b, $a\&b$ — конъюнкция a и b.

Пусть α — слово или сверхслово, тогда $\alpha(n)$ — n-ый элемент α. Обозначим через $|\alpha|$ длину слова α; для сверхслова α будем полагать, что $|\alpha| = \infty$. Для произвольного слова α определим $[_k\alpha = \alpha(|\alpha| - k + 1) \ldots \alpha(|\alpha| - 1)\alpha(|\alpha|)$. Для $k \leqslant |\alpha|$ обозначим $]_k\alpha = \alpha(1)\alpha(2) \ldots \alpha(k)$, $[_l]_k\alpha = \alpha(k - l + 1)\alpha(k - l + 2) \ldots \alpha(k)$. Для произвольного конечного слова α определим слово $\alpha^s = \underbrace{\alpha\alpha \ldots \alpha}_{s}$, и сверхслово $\alpha^\infty = \alpha\alpha\alpha \ldots$.

Функция $T : E^n \to E$ называется дефинитным автоматом с n входами высоты h, если существуют функции $f_j : ({E_2}^j)^n \to E_2$ ($j = 1, 2, 3, \ldots, h$), такие что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ выполняется:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n)(1) = f_1(]_1x_1,]_1x_2, \ldots,]_1x_n),$$

$$T(x_1,x_2,\ldots,x_n)(2) = f_2(]_2x_1,]_2x_2,\ldots,]_2x_n),$$
$$\ldots$$
$$T(x_1,x_2,\ldots,x_n)(h) = f_h(]_hx_1,]_hx_2,\ldots,]_hx_n),$$
$$T(x_1,x_2,\ldots,x_n)(h+1) = f_h([_h]_{h+1}x_1,[_h]_{h+1}x_2,\ldots,[_h]_{h+1}x_n),$$
$$\ldots$$
$$T(x_1,x_2,\ldots,x_n)(h+i) = f_h([_h]_{h+i}x_1,[_h]_{h+i}x_2,\ldots,[_h]_{h+i}x_n).$$
$$\ldots$$

Таким образом, согласно нашему определению автомат высоты h является также автоматом высоты $h+1$. Элемент $T(x_1,x_2,\ldots,x_n)(j)$ будем называть элементом на выходе автомата T в момент времени j, а $x_i(j)$ — элементом, подаваемым на i-ый вход в момент времени j. Для $j=1,\ldots,h-1$ функции f_j определяют элемент на выходе автомата T в моменты времени от 1 до $h-1$, а функция f_h определяет элемент на выходе автомата, начиная с момента времени h.

Для $p \in \mathbb{N}$ зададим функцию $T^p : ({E_2}^p)^n \to E_2$. Если $p \leqslant h$, то определим
$$T^p(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = f_p(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$
Для $p > h$ определим
$$T^p(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = f_h([_h\alpha_1,[_h\alpha_2,\ldots,[_h\alpha_n).$$
Таким образом, для любого s функция T^s определяет элемент на выходе автомата T в момент времени s.

Функции f_j, где $j=1,\ldots,h$, будем называть порождающими. Нетрудно убедиться, что для задания дефинитного автомата необходимо задать высоту автомата и порождающие функции. Для $p \leqslant h$ функции T^p также будем называть порождающими. Функция T^h порождает функцию T^s для любого $s > h$
$$T^s(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = T^h([_h\alpha_1,[_h\alpha_2,\ldots,[_h\alpha_n).$$

Множество всех дефинитных автоматов обозначим $\mathcal{P}_a$. Множество всех дефинитных автоматов высоты 1 обозначим P_2. Такие автоматы будем называть булевыми функциями. Будем использовать стандартные обозначения для автоматов из P_2. А именно $\overline{x}$, $x\&y = xy$,

$x \vee y$ — дефинитные автоматы T_1, T_2 и T_3 высоты один такие, что выполняется $T_1^1(\alpha) = \overline{\alpha}$, $T_2^1(\alpha, \beta) = \alpha \& \beta$, $T_3^1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$.

Автомат S_c высоты два с одним входом, для которого $S_c^1(\alpha) = c$, $S_c^2(\alpha) = \alpha(1)$, назовём задержкой с начальным состоянием c.

Пусть $M \subseteq \mathcal{P}_a$. Фиксируем некоторое счётное множество $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$, элементы которого будем называть переменными. Индуктивно определим понятие терма над множеством M :

1) Если $u \in U$, то u — терм над M.
2) Если F — автомат с $n \in \mathbb{N}_0$ входами, $F \in M$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ — термы над M, то выражение $F(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ — терм над M.

Термы, отличные от переменных, назовём собственными. Пусть τ — произвольный терм, $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — набор попарно различных переменных, содержащий все переменные, использованные при построении терма τ. Тогда через $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ обозначим функцию $\tau : E^m \to E$, определяемую индуктивно:

1) Если $\tau = x_c$ — переменная, $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^m) \in E^m$, то определим
$$\tau(x_1, x_2, \ldots, x_m)(\gamma) = \gamma^c.$$
2) Если $\tau = F(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^m) \in E^m$, то определим
$$\tau(x_1, x_2, \ldots, x_m)(\gamma) = \\ = F(\tau_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)(\gamma), \ldots, \tau_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)(\gamma)).$$

О функции T такой, что $T = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ для некоторого собственного терма τ над множеством M, будем говорить, что она получена термальными операциями из дефинитных автоматов множества M. Нетрудно проверить, что функция T также будет дефинитным автоматом, поэтому мы можем ввести на множестве $\mathcal{P}_a$ оператор замыкания $[\ ]$ относительно термальных операций — такое отображение, которое каждому множеству $M \subseteq \mathcal{P}_a$ сопоставляет множество $[M]$ всех автоматов, которые можно получить термальными операциями из дефинитных автоматов множества M. Определённый выше оператор замыкания также известен как оператор замыкания относительно операции суперпозиции [9].

Множество M называется замкнутым, если $[M] = M$; множество M называется полным, если $[M] = \mathcal{P}_a$. Проблема полноты для $\mathcal{P}_a$ состоит в описании всех полных множеств M. Пусть $\tau \in \mathbb{N}$, скажем, что автоматы T_1 и T_2 с n входами τ-равны, если для любого $i \leqslant \tau$ выполняется $T_1^i = T_2^i$. Обозначим через $[M]_\tau$ множество всех дефинитных автоматов, τ-равных получающимся из M с помощью термальных операций. Множество называется τ-полным, если $[M]_\tau = \mathcal{P}_a$. Множество M называется A-полным, если $[M]_\tau = \mathcal{P}_a$ для любого τ. Проблема A-полноты для $\mathcal{P}_a$ состоит в описании всех A-полных множеств M.

Нетрудно заметить, что дефинитные автоматы — это все автоматы, которые можно получить с помощью термальных операций из автоматов из P_2 и задержки. Другими словами $[P_2 \cup S_c] = \mathcal{P}_a$, где S_c — задержка с начальным состоянием c. Отсюда в частности следует, что $[\{\overline{x} \vee \overline{y}, S_c\}] = \mathcal{P}_a$.

Постом полностью описаны все замкнутые относительно операции суперпозиции классы булевых функций [1, 2]. Все они конечнопорожденные и образуют счётную решетку по включению.

Пусть F — замкнутый класс булевых функций. Определим две проблемы. Проблема А-ПОЛНОТА(F): дана конечная система ν дефинитных автоматов, заданных своими порождающими функциями; требуется установить, A-полна ли система $F \cup \nu$. Проблема ПОЛНОТА(F): дана конечная система ν дефинитных автоматов, заданных своими порождающими функциями; требуется установить, полна ли система $F \cup \nu$.

Ранее было показано, что для верхнего элемента решётки $F = P_2$ проблемы А-ПОЛНОТА(F) и ПОЛНОТА(F) алгоритмически разрешимы [8]. Нетрудно убедиться, что если $F' \subseteq F$ и проблема А-ПОЛНОТА(F) (ПОЛНОТА(F)) алгоритмически неразрешима, то А-ПОЛНОТА(F') (ПОЛНОТА(F')) также алгоритмически неразрешима. Аналогично, если F^* — класс, двойственный к F относительно замены 0 на 1, и проблема А-ПОЛНОТА(F) (ПОЛНОТА(F)) алгоритмически неразрешима, то А-ПОЛНОТА(F^*) (ПОЛНОТА(F^*)) также алгоритмически неразрешима.

Воспользуемся обозначениями из [1]. $F_4^\infty = [\{x \vee \overline{y}\}]$, $F_8^\infty = [\{x \& \overline{y}\}]$, $S_6 = [\{x \vee y, 0, 1\}]$, $P_6 = [\{x \& y, 0, 1\}]$, $O_9 = [\{\overline{x}, 0\}]$.

Теорема 1. *Проблема А-ПОЛНОТА(F) алгоритмически неразрешима для каждого* $F \in \{F_4^\infty, F_8^\infty, S_6, P_6, O_9\}$.

Теорема 2. *Проблема ПОЛНОТА(F) алгоритмически неразрешима для каждого* $F \in \{F_4^\infty, F_8^\infty, S_6, P_6, O_9\}$.

2. Основные утверждения

Тройка $\theta = \langle D, \rho, \omega \rangle$, где $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, D^* — множество слов в алфавите D, $\rho : D \to D^*$, $\rho(d_i) = R_i$, ω — натуральное число, называется системой однородных продукций Поста. Если $l \geqslant \omega$, то скажем, что θ применима к слову $\xi = d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_l}$ и слово $\theta(\xi) = d_{i_{w+1}} d_{i_{w+2}} \ldots d_{i_l} R_{i_1}$ назовём результатом применения θ к слову ξ. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ такую, что $\xi_1 = \xi$, а $\xi_{i+1} = \theta(\xi_i)$, назовём последовательностью продукций Поста слова ξ. Известно, что существует система однородных продукций Поста, для которой не существует алгоритма, по слову ξ решающего вопрос о конечности последовательности продукций слова ξ [11]. Зафиксируем эту систему продукций Поста $\langle D, \rho, \omega \rangle$.

Обозначим $\eta = \max(\omega + 2, |R_1| + 2, |R_2| + 2, \ldots, |R_k| + 2, 4)$. Пусть $\tilde{d_i} = 001(01)1^{i+1}01^{k+1-i}$, $\tilde{d}'_i = 001(10)1^{i+1}01^{k+1-i}$ для $d_i \in D$. Положим $\tilde{d_0} = 001(01)101^{k+1}$, $\tilde{d}'_0 = 001(10)101^{k+1}$. Если $\xi = d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_{l-1}} d_{i_l}$, то $\tilde{\xi} = \tilde{d}_{i_1} \tilde{d}_{i_2} \ldots \tilde{d}_{i_{l-1}} \tilde{d}'_{i_l}$. Нетрудно убедиться, что для любого i, $0 \leqslant i \leqslant k$, выполняется $|\tilde{d_i}| = |\tilde{d}'_i| = k + 8$.

Пусть $M_0 = \{\tilde{d}_0^n \tilde{d}'_0 0^\infty | n \in \mathbb{N}_0\}$; $M_i = \{\tilde{d}_0^n \tilde{d}_{j_1} \ldots \tilde{d}_{j_{l-1}} \tilde{d}'_{j_l} 0^\infty | n \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}, d_{j_1} = d_i\}$, где $1 \leqslant i \leqslant k$. Определим отображение $\widetilde{T}_i : M_i \to E$

$$\widetilde{T}_i(\tilde{d}_0^n \tilde{d}_{j_1} \ldots \tilde{d}_{j_{l-1}} \tilde{d}'_{j_l} 0^\infty) = \begin{cases} \tilde{d}_0^{n+\omega} \tilde{d}_{j_{\omega+1}} \ldots \tilde{d}_{j_l} \tilde{R}_i 0^\infty, & l > \omega, \\ \tilde{d}_0^{n+\omega} \tilde{R}_i 0^\infty, & l = \omega, \\ \tilde{d}_0^{n+\omega-1} \tilde{d}'_0 0^\infty, & 0 < l < \omega. \end{cases}$$

Определение 1. Дефинитный автомат T с n входами называется автоматным доопределением отображения $\widetilde{T} : C \to E$, если $C \subseteq E^n$ и для любого $\gamma \in C$ выполняется $T(\gamma) = \widetilde{T}(\gamma)$.

Пусть $K_i = \{\alpha \in {E_2}^{2(k+8)} | \exists \beta \exists \gamma \ (\beta \alpha \gamma \in M_i)\}$, $i = 0, 1, \ldots, k$. То есть, K_i состоит из всех слов длины $2(k + 8)$, являющихся подсловами сверхслов из M_i. Аналогично положим $\widehat{K}_0 = \{\alpha \in {E_2}^{2(k+8)} | \exists\beta\exists\gamma\ (\beta\alpha\gamma = \tilde{d}_0^{\infty})\}$. Легко проверить, что $\widehat{K}_0 \subset K_0$.

Пусть $h = \eta \cdot (k+8)$. Зададим порождающими функциями дефинитные автоматы $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_k$, W, W_0, G, G_0 высоты h.

Зададим $T_i^h(\alpha)$. Пусть какое-то подслово длины $2(k+8)$ слова α не принадлежит K_i, тогда рассмотрим минимальное $j \geqslant 2(k+8)$ такое, что $[_{2(k+8)}]_j\alpha$ не принадлежит K_i. Определим $T_i^h(\alpha) = 1$, когда $h-j$ чётно, и $T_i^h(\alpha) = 0$, когда $h-j$ нечётно.

Пусть теперь любое подслово длины $2(k+8)$ слова α принадлежит K_i. В этом случае $T_i^h(\alpha) = 1$ точно тогда, когда найдутся $l \geqslant h$ и $\gamma \in M_i$, такие что $[_h]_l\gamma = \alpha$ и для $\beta = \widetilde{T}_i(\gamma)$ выполняется $\beta(l) = 1$. Осталось определить $T_i^j(\alpha)$ для $j < h$. Положим

$$T_i^j(\alpha) = T_i^{j+h}(\tilde{d}_0^{\eta}\alpha).$$

Теперь зададим порождающие функции $G^h(\alpha,\beta)$ и $W^h(\alpha,\beta,\gamma)$. Пусть какое-то подслово длины $2(k+8)$ слова α не принадлежит K_0, тогда рассмотрим минимальное $j \geqslant 2(k+8)$ такое, что $[_{2(k+8)}]_j\alpha$ не принадлежит K_0. Определим

$$G^h(\alpha,\beta) = \overline{\beta(j-2)}, W^h(\alpha,\beta,\gamma) = \beta(j-1)\&\gamma(j-1),$$

если $h-j$ чётно, и

$$G^h(\alpha,\beta) = \beta(j-2), W^h(\alpha,\beta,\gamma) = \overline{\beta(j-1)} \vee \overline{\gamma(j-1)},$$

если $h-j$ нечётно.

Пусть теперь любое подслово длины $2(k+8)$ слова α принадлежит K_0. В этом случае положим

$$G^h(\alpha,\beta) = \beta(h-1), W^h(\alpha,\beta,\gamma) = \overline{\beta(h)} \vee \overline{\gamma(h)}.$$

Аналогично зададим порождающие функции $G_0^h(\alpha,\beta)$ и $W_0^h(\alpha,\beta,\gamma)$. Если какое-то подслово длины $2(k+8)$ слова α не принадлежит $\widehat{K}_0$, тогда рассмотрим минимальное $j \geqslant 2(k+8)$ такое, что $[_{2(k+8)}]_j\alpha$ не принадлежит $\widehat{K}_0$. Определим

$$G_0^h(\alpha,\beta) = \overline{\beta(j-2)}, W_0^h(\alpha,\beta,\gamma) = \beta(j-1)\&\gamma(j-1),$$

если $h-j$ чётно, и

$$G_0^h(\alpha,\beta)=\beta(j-2), W^h(\alpha,\beta,\gamma)=\overline{\beta(j-1)}\vee\overline{\gamma(j-1)},$$

если $h-j$ нечётно.

Для $j<h$ положим

$$G^j(\alpha,\beta)=G^{j+h}(\tilde{d}_0^{\eta}\alpha,1^h\beta), G_0^j(\alpha,\beta)=G_0^{j+h}(\tilde{d}_0^{\eta}\alpha,1^h\beta),$$
$$W^j(\alpha,\beta,\gamma)=W^{j+h}(\tilde{d}_0^{\eta}\alpha,1^h\beta,1^h\gamma), W_0^j(\alpha,\beta,\gamma)=W_0^{j+h}(\tilde{d}_0^{\eta}\alpha,1^h\beta,1^h\gamma).$$

Пусть $c_i(\alpha)$ — минимальное j такое, что ${}_{[2(k+8)]}]_{2(k+8)+j}(\tilde{d}_0\tilde{d}_0\alpha)\notin K_i$, где $i=0,1,\ldots,k$. Если такого j не существует, то $c_i(\alpha)=\infty$. Из определения следует, что для любого $\alpha\in M_i$ выполняется $c_i(\alpha)=\infty$. Аналогично определим $\hat{c}_0(\alpha)$ — минимальное j такое, что ${}_{[2(k+8)]}]_{2(k+8)+j}(\tilde{d}_0\tilde{d}_0\alpha)\notin\widehat{K}_0$. Легко проверить, что для любого α выполняется $\hat{c}_0(\alpha)\leqslant c_0(\alpha)$.

Из определений следует, что автоматы $W(\alpha,\beta,\gamma)$ и $G(\alpha,\beta)$, начиная с момента времени $c_0(\alpha)-1$, выдают на выходе слово $(a\overline{a})^{k+8}$, где $a\in E_2$. Аналогично автоматы $W_0(\alpha,\beta,\gamma)$ и $G_0(\alpha,\beta)$, начиная с момента времени $\hat{c}_0(\alpha)-1$, выдают на выходе слово $(a\overline{a})^{k+8}$, где $a\in E_2$. Автомат $T_i(\alpha)$, начиная с момента времени $c_i(\alpha)$, выдает на выходе слово $(10)^{k+8}$. Слово $(a\overline{a})^{k+8}$ — это, в каком-то смысле, код ошибки.

Утверждение 1. *Для любого $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ дефинитный автомат T_i является автоматным доопределением отображения $\widetilde{T}_i$.*

Утверждение 2. *Для любых $\alpha\in M_0$, $\beta,\gamma\in E$ выполняется $G(\alpha,\beta)=G_0(\tilde{d}_0^{\infty},\beta)=S_1(\beta)$, $W(\alpha,\beta,\gamma)=W_0(\tilde{d}_0^{\infty},\beta,\gamma)=\overline{\beta}\vee\overline{\gamma}$, где S_1 — задержка с начальным состоянием 1.*

Из этого утверждения, в частности, следует, что если на первый вход каждого из автоматов G_0, W_0 подается сверхслово из M_0, то G_0 работает как задержка до какого-то момента времени, а W_0 работает как автомат $\overline{x}\vee\overline{y}$ до какого-то момента времени.

Для каждого $\xi\in D^*$ определим дефинитный автомат T_ξ — автомат без входов, который возвращает сверхслово $\tilde{\xi}0^{\infty}$, то есть $T_\xi()=\tilde{\xi}0^{\infty}$.

Утверждение 3. *Система* $\Sigma_1 = \{x \vee \overline{y}, W, G, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$ *полна точно тогда, когда последовательность продукций слова* ξ *конечна.*

Утверждение 4. *Система* $\Sigma_2 = \{x \vee y, 0, 1, W, G, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$ *полна точно тогда, когда последовательность продукций слова* ξ *конечна.*

Утверждение 5. *Система* $\Sigma_3 = \{\overline{x}, 0, W, G, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$ *полна точно тогда, когда последовательность продукций слова* ξ *конечна.*

Утверждение 6. *Система* $\Sigma'_1 = \{x \vee \overline{y}, W_0, G_0, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$ *A-полна точно тогда, когда последовательность продукций слова* ξ *бесконечна.*

Утверждение 7. *Система* $\Sigma'_2 = \{x \vee y, 0, 1, W_0, G_0, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$ *A-полна точно тогда, когда последовательность продукций слова* ξ *бесконечна.*

Утверждение 8. *Система* $\Sigma'_3 = \{\overline{x}, 0, W_0, G_0, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$ *A-полна точно тогда, когда последовательность продукций слова* ξ *бесконечна.*

Доказательство теорем 1, 2.

Доказательства этих теорем основываются на утверждениях 3–8, причём сами доказательства аналогичны, поэтому докажем только теорему 2. Предположим, что теорема неверна. Тогда существует алгоритм, решающий проблему ПОЛНОТА(F) для какого-то $F \in \{F_4^\infty, F_8^\infty, S_6, P_6, O_9\}$.

Построим алгоритм, решающий проблему конечности последовательности продукций Поста $\langle D, \rho, \omega\rangle$. По слову ξ эффективно строится автомат T_ξ. По предположению существует алгоритм, решающий проблему полноты для системы $F \cup \{W, G, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$. Из утверждений 3–5 следует, что $F \cup \{W, G, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$ полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ конечна.

Таким образом, алгоритм, решающий проблему конечности последовательности продукций Поста $\langle D, \rho, \omega\rangle$, заключается в следующем: по слову ξ строим дефинитный автомат T_ξ; решаем проблему полноты для системы $F \cup \{W, G, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

3. Доказательство утверждений

Доказательство утверждения 1. Снова обозначим $h = \eta \cdot (k+8)$. Легко проверить, что если $\widetilde{T}_i(\alpha) = \beta$, то для любого $j \geqslant h$ элемент $\beta(j)$ полностью определяется словом $[_h]_j\alpha$ и не зависит от j и сверхслова α. Отсюда сдедует, что если $\widetilde{T}_i(\alpha) = \beta$ и $T_i(\alpha) = \beta'$, то $\beta(j) = \beta'(j)$ для любого $j \geqslant h$.

Нетрудно убедиться, что для любого $\alpha \in M_i$ выполняется $\widetilde{T}_i(\tilde{d}_0^\eta\alpha) = \tilde{d}_0^\eta\widetilde{T}_i(\alpha)$. Из определения автомата T_i следует, что $]_hT_i(\alpha) = [_h]_{2h}T_i(\tilde{d}_0^\eta\alpha)$. Тогда

$$]_hT_i(\alpha) = [_h]_{2h}T_i(\tilde{d}_0^\eta\alpha) = [_h]_{2h}\widetilde{T}_i(\tilde{d}_0^\eta\alpha) = [_h]_{2h}(\tilde{d}_0^\eta\widetilde{T}_i(\alpha)) =]_h\widetilde{T}_i(\alpha).$$

Таким образом, для любого $\alpha \in M_i$ выполняется $\widetilde{T}_i(\alpha) = T_i(\alpha)$, значит, для любого i автомат T_i является автоматным доопределением отображения $\widetilde{T}_i$. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 2. Проведем доказательство для автомата G. Нетрудно убедиться, что если $\alpha \in M_0$, $G(\alpha, \beta) = \delta$, то $\delta(j+1) = \beta(j)$ для любого $j \geqslant h$. Из определения автомата G следует, что для любых $\alpha, \beta \in E$ выполняется

$$\begin{aligned}]_h\delta =]_hG(\alpha,\beta) = [_h]_{2h}G(\tilde{d}_0^\eta\alpha, 1^h\beta) = \\ = [_h]_{2h}S_1(1^h\beta) = [_h]_{2h}(1^{h+1}\beta) = 1(]_{h-1}\beta). \end{aligned}$$

А значит, $\delta(j+1) = \beta(j)$ для $j < h$ и $G(\alpha, \beta) = S_1(\beta)$. Для автоматов G_0, W, W_0 доказательства полностью аналогичны. Утверждение установлено.

Лемма 1. *Если последовательность продукций слова ξ конечна, то система автоматов $\{W, G, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi\}$ полна.*

Доказательство. Пусть последовательность продукций Поста конечна и имеет вид $\xi = \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_s$. Также пусть для любого t слово ξ_t начинается с буквы d_{i_t}, тогда

$$T_{i_s}(T_{i_{s-1}}(\ldots T_{i_1}(T_\xi())\ldots)) = \tilde{d}_0^k\tilde{d}_0'0^\infty,$$

где $k = s \cdot \omega - 1$. Значит

$$W(T_{i_s}(T_{i_{s-1}}(\dots T_{i_1}(T_\xi())\dots)),y,z)=\overline{y}\vee\overline{z},$$

а $G(T_{i_s}(T_{i_{s-1}}(\dots T_{i_1}(T_\xi())\dots)),y)$ — задержка с начальным состоянием 1. Но $\overline{y}\vee\overline{z}$ и задержка составляют полную систему в $\mathcal{P}_a$. Лемма установлена.

Лемма 2. *Если последовательность продукций слова ξ бесконечна, то система автоматов $\{W_0,G_0,T_1,T_2,\dots,T_k,T_\xi\}$ A-полна.*

Доказательство. Пусть последовательность продукций Поста бесконечна и имеет вид $\xi=\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots$. Также пусть для любого t слово ξ_t начинается с буквы d_{i_t}. Тогда на всех словах длины $\tau=(s\cdot\omega-1)\cdot(k+8)$ автомат

$$W_0(T_{i_s}(T_{i_{s-1}}(\dots T_{i_1}(T_\xi())\dots)),y,z)$$

совпадает с автоматом $\overline{y}\vee\overline{z}$, а автомат

$$G_0(T_{i_s}(T_{i_{s-1}}(\dots T_{i_1}(T_\xi())\dots)),y)$$

совпадает с задержкой с начальным состоянием 1. Так как $\overline{y}\vee\overline{z}$ и задержка составляют полную систему в $\mathcal{P}_a$, а s мы можем выбрать сколь угодно большим, то данная система A-полна и лемма доказана.

Пусть $\widetilde{D}=\{\tilde{d}_0,\dots,\tilde{d}_k,\tilde{d}'_0,\dots,\tilde{d}'_k,0^{k+8}\}$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha\in E$, $l\in\mathbb{N},i\in\{0,1,2,\dots k\}$, $c_i(\alpha)>l$, тогда существует γ из M_i такое, что $]_l(\alpha)=]_l(\gamma)$.*

Доказательство. Обозначим $\alpha_0=\tilde{d}_0\tilde{d}_0(]_l\alpha)$.

Для какого-то c, $1\leqslant c\leqslant(k+8)$, и каких-то слов $\beta_1,\dots,\beta_{s-1},\delta$, где $|\beta_1|=|\beta_2|=\dots=|\beta_{s-1}|=k+8$, $|\delta|=c$, выполняется $\alpha_0=\beta_1\beta_2\dots\beta_{s-1}\delta$.

Сначала докажем индукцией по j, что для любого $j<s$ верно $\beta_j\in\widetilde{D}$.

Действительно $\beta_1=\beta_2=\tilde{d}_0$. Предположим, что $\beta_{j-1}\in\widetilde{D}$, тогда β_{j-1} начинается с двух нулей. Покажем, что $\beta_j\in\widetilde{D}$. По условию $(\beta_{j-1})(\beta_j)\in K_i$ для $j<s$, но в K_i любое слово, начинающееся с двух нулей, имеет вид $\delta_1\delta_2$, где $\delta_1,\delta_2\in\widetilde{D}$. Поэтому $\beta_j\in\widetilde{D}$. Таким образом, мы доказали, что для любого $j<s$ выполнено $\beta_j\in\widetilde{D}$.

В любом сверхслове из множества M_i после слова из $\widetilde{D}$ обязательно идёт слово из $\widetilde{D}$. По условию $([_{k+8-c}\beta_{s-2})\beta_{s-1}\delta \in K_i$, значит для какого-то $\beta_s \in \widetilde{D}$ выполняется $\delta =]_c(\beta_s)$, причём β_s идёт после β_{s-1} в каком-то сверхслове из множества M_i.

Пусть $i = 0$. Для любого $j \leqslant s$ слово $\beta_{j-1}\beta_j \in K_0$, поэтому после $\tilde{d}_0$ в слове $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_s$ идёт либо $\tilde{d}_0$, либо $\tilde{d}'_0$. После слов 0^{k+8}, $\tilde{d}'_0$ обязательно идёт 0^{k+8}. Если $\beta_s \in \{0^{k+8}, \tilde{d}'_0\}$, то возьмём $\gamma = \beta_3\beta_4 \ldots \beta_s 0^\infty \in M_0$. Если $\beta_s = \tilde{d}_0$, то возьмём $\gamma = \beta_3\beta_4 \ldots \beta_s\tilde{d}'_0 0^\infty \in M_0$.

Теперь пусть $i > 0$. Для любого $j \leqslant s$ слово $\beta_{j-1}\beta_j \in K_i$, поэтому после $\tilde{d}_0$ в слове $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_s$ идёт либо $\tilde{d}_0$, либо $\tilde{d}_i$, либо $\tilde{d}'_i$. После $\tilde{d}_r$, где $r > 0$, идёт либо $\tilde{d}_t$, либо $\tilde{d}'_t$, где $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Аналогично после слов 0^{k+8}, $\tilde{d}'_r$, где $r \geqslant 0$, обязательно идёт 0^{k+8}. Если $\beta_s \in \{0^{k+8}, \tilde{d}'_1, \ldots, \tilde{d}'_k\}$, то возьмём $\gamma = \beta_3\beta_4 \ldots \beta_s 0^\infty \in M_i$. Если $\beta_s \in \{\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_k\}$, то возьмём $\gamma = \beta_3\beta_4 \ldots \beta_s \tilde{d}'_i 0^\infty \in M_i$. Лемма доказана.

Определение 2. Говорим, что автомат с n входами $T \in \mathcal{P}_a$ сохраняет $A \subseteq E$, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A$ выполняется $T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A$.

Нетрудно убедиться, что справедлива следующая

Лемма 4. *Для любого $A \subseteq E$ множество всех автоматов, сохраняющих множество A, замкнуто.*

Пусть F_j — множество сверхслов вида $\gamma b_1 b_2 \delta$, где $|\gamma| = (k + 8) \cdot i$, $0 \leqslant i \leqslant j$, $\delta \in E$, $(b_1, b_2) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Пусть L_j — множество сверхслов вида $\gamma b_1 b_2 \delta$, где $|\gamma| = (k + 8) \cdot i$, $0 \leqslant i \leqslant j$, $\delta \in E$, $(b_1, b_2) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$.

Лемма 5. *Для любых $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\alpha \in F_j \cup L_j$, $\beta, \gamma \in E$ сверхслова $T_i(\alpha)$, $W(\alpha, \beta, \gamma)$, $W_0(\alpha, \beta, \gamma)$, $G(\alpha, \beta)$, $G_0(\alpha, \beta)$ принадлежат $F_j \cap L_j$.*

Доказательство. Каждый из автоматов $W(\alpha, \beta, \gamma)$, $G(\alpha, \beta)$, $(W_0(\alpha, \beta, \gamma), G_0(\alpha, \beta))$, начиная с момента времени $c_0(\alpha)-1$ $(\hat{c}_0(\alpha)-1)$, выдает на выходе слово $(a\overline{a})^{k+8}$, где $a \in E_2$. Значит, если $c_0(\alpha) \leqslant (k + 8) \cdot j + 2$, то сверхслова $W(\alpha, \beta, \gamma)$, $W_0(\alpha, \beta, \gamma)$, $G(\alpha, \beta)$, $G_0(\alpha, \beta)$

принадлежат $F_j \cap L_j$. Пусть $c_0(\alpha) > (k+8)\cdot j+2$, тогда из леммы 3 следует, что для какого-то $\gamma \in M_0$ выполняется $]_{(k+8)\cdot j+2}\gamma =]_{(k+8)\cdot j+2}\alpha$. Тогда $\gamma \in F_j \cup L_j$, а это невозможно.

Автомат $T_i(\alpha)$, начиная с момента времени $c_i(\alpha)$, выдает на выходе слово $(10)^{k+8}$. Значит, если $c_i(\alpha) < (k+8)\cdot j+2$, то $T_i(\alpha) \in F_j \cap L_j$. Пусть $c_i(\alpha) \geqslant (k+8)\cdot j+2$, тогда из леммы 3 следует, что для какого-то $\gamma \in M_i$ выполняется $]_{(k+8)\cdot j+1}\gamma =]_{(k+8)\cdot j+1}\alpha$. Так как $\alpha \in F_j \cup L_j$, $\gamma \notin F_j \cup L_j$, то $\alpha((k+8)\cdot j+2) = 1$, $\gamma((k+8)\cdot j+2) = 0$, $c_i(\alpha) = (k+8)\cdot j+2$. Но легко проверить, что $T_i(\alpha)((k+8)\cdot j+1) = T_i(\gamma)((k+8)\cdot j+1) = 0$. Значит $T_i(\alpha) \in F_j \cap L_j$. Лемма доказана.

Будем говорить, что $\alpha \geqslant \beta$, если для любого $t \in \mathbb{N}$ верно $\alpha(t) \geqslant \beta(t)$. Если $\alpha \geqslant \beta$ и $\alpha \neq \beta$, то говорим, что $\alpha > \beta$.

Лемма 6. *Пусть* $M = \bigcup\limits_{j=0}^{k} M_j$. *Если* $i \in \{0,1,2,\dots,k\}$, $\alpha \in M$, $\beta > \alpha$, *то* $c_i(\beta) < \infty$,

Доказательство. Предположим, что это не так и $c_i(\beta) = \infty$. Пусть

$$\alpha = \tilde{d}_0^n \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}'_{j_l} 0^\infty.$$

Так как по условию $\alpha \neq \beta$, то найдётся $s > (k+8)\cdot(n+l)$ такое, что $]_s\alpha \neq]_s\beta$. По лемме 3 найдется $\beta' \in M_i$ такое, что $]_s\beta =]_s\beta'$. Заметим, что для любого j в словах $\tilde{d}_j$, $\tilde{d}'_j$ ровно $k+4$ единицы и поэтому, если $\gamma \in \widetilde{D}$ и $\gamma \geqslant \tilde{d}_j$ ($\gamma \geqslant \tilde{d}'_j$), то $\gamma = \tilde{d}_j$ ($\gamma = \tilde{d}'_j$). Значит, β' совпадает с α на первых $(k+8)\cdot(n+l)$ символах. Но в любом сверхслове из M_i после слова $\tilde{d}'_c$ обязательно идёт бесконечная последовательность нулей. Значит $\beta' = \alpha$ и $]_s\alpha =]_s\beta' =]_s\beta$. А это противоречит выбору s. Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\alpha, \beta \in M = \bigcup\limits_{j=0}^{k} M_j$, $\beta \geqslant \alpha$, *то* $\alpha = \beta$.

Доказательство. Предположим, что это не так, тогда $\beta > \alpha$. Из леммы 6 следует, что для любого i выполняется $c_i(\beta) < \infty$. А это противоречит условию $\beta \in M$.

Доказательство утверждений 3–5. Достаточность в этих утверждениях следует из леммы 1. Осталось доказать необходимость.

Пусть последовательность продукций ξ_1, $\xi_2, \ldots$ слова ξ бесконечна. Покажем, что каждая из систем Σ_1, Σ_2 и Σ_3 неполна. Обозначим

$$\alpha_i = \tilde{d}_0^{\omega\cdot(i-1)}\tilde{\xi}_i 0^\infty.$$

Нетрудно убедиться, что для любого $i \in \mathbb{N}$ выполняется $T_a(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$, где d_a — первая буква слова ξ_i. Пусть $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$.

Рассмотрим множество $D_1 = (\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} F_j) \cup \{\beta | \exists \alpha \in A, \beta \geqslant \alpha\}$. Пусть $D_2 = D_1 \cup \{0^\infty\}$.

Лемма 7. *Для любых $\alpha, \beta, \gamma \in D_2$ выполнено*

$$W(\alpha,\beta,\gamma), G(\alpha,\beta), T_1(\alpha), T_2(\alpha), \ldots, T_k(\alpha), T_\xi() \in D_1.$$

Доказательство. $T_\xi() = \alpha_1 \in D_1$. Если $\alpha = 0^\infty$, то для любого i выполняется $c_i(\alpha) = 3$, значит, $T_1(\alpha), T_2(\alpha), \ldots, T_k(\alpha), W(\alpha,\beta,\gamma)$, $G(\alpha,\beta) \in F_1 \subset D_1$.

Если $\alpha \in F_j$ для какого-то $j \in \mathbb{N}_0$, то лемма следует из леммы 5. Если для какого-то $\delta \in A$ выполняется $\alpha > \delta$, то лемма следует из леммы 6. Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha \in A$. Для любого $\alpha \in A$ выполняется $c_0(\alpha) < \infty$. Значит, для любых $\beta, \gamma \in D_2$ выполнено $W(\alpha,\beta,\gamma), G(\alpha,\beta) \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} F_j \subset D_1$.

Теперь докажем, что $T_i(\alpha) \in D_1$, если $\alpha = \alpha_j \in A$. Если $\xi_j(1) = d_i$, то $T_i(\alpha) = T_i(\alpha_j) = \alpha_{j+1} \in D_1$, иначе $T_i(\alpha) = T_i(\alpha_j) \in F_{\omega\cdot j} \subset D_1$. Лемма доказана.

Следствие. *Каждый из автоматов $1, W, G, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi$ сохраняет D_1 и D_2.*

Легко проверить, что если $\alpha \in D_1, \beta \geqslant \alpha$, то $\beta \in D_1$. Тогда $\alpha \vee \overline{\beta}$ сохраняет D_1, так как $\alpha \vee \overline{\beta} \geqslant \alpha$. Итак, мы доказали, что Σ_1 сохраняет D_1, значит $[\Sigma_1]$ сохраняет D_1. Но в D_1 нет сверхслова 0^∞, значит, в $[\Sigma_1]$ нет константы 0 и Σ_1 не полно. Утверждение 3 доказано.

Покажем, что $\alpha \vee \beta$ сохраняет D_2. Пусть $\alpha, \beta \in D_2$. Если $\alpha = 0^\infty$, то $\alpha \vee \beta = \beta \in D_2$. Если $\alpha \neq 0^\infty$, то $\alpha \in D_1$, но $\alpha \vee \beta \geqslant \alpha$, значит, $\alpha \vee \beta \in D_1 \subset D_2$. То есть, Σ_2 сохраняет D_2. Рассмотрим задержку S_0. Если бы Σ_2 было полно, то она бы сохраняла D_2. Но это не так, потому что $S_0(010^\infty) = 0010^\infty \notin D_2$, где $010^\infty \in F_0 \subset D_2$. Утверждение 4 доказано.

Пусть

$$D_3 = \{0^\infty, 1^\infty\} \cup (\bigcup_{j=0}^{\infty} L_j) \cup A \cup \{\alpha | \overline{\alpha} \in A\}.$$

Лемма 8. *Каждый из автоматов* $W, G, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi, 0, 1, \overline{x}$ *сохраняет* D_3.

Доказательство. Для автоматов $T_\xi, 0, 1, \overline{x}$ это очевидно. Докажем, что для произвольных $\alpha, \beta, \gamma \in D_3$ выполняется

$$W(\alpha, \beta, \gamma), G(\alpha, \beta), T_1(\alpha), T_2(\alpha), \ldots, T_k(\alpha) \in D_3.$$

Если $\alpha \in L_j$ для какого-то $j \in \mathbb{N}_0$, то это следует из леммы 5. Если $\alpha = 0^\infty$, $\alpha = 1^\infty$, либо $\overline{\alpha} \in A$, то для любого i выполняется $c_i(\alpha) \leqslant 3$, значит, для любых $\beta, \gamma \in D_3$ выполнено $T_1(\alpha), T_2(\alpha), \ldots, T_k(\alpha), W(\alpha, \beta, \gamma), G(\alpha, \beta) \in L_1 \subset D_3$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha \in A$. Для любого $\alpha \in A$ выполнено $c_0(\alpha) < \infty$. Значит, для любых $\beta, \gamma \in D_3$ выполнено $W(\alpha, \beta, \gamma), G(\alpha, \beta) \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} L_j \subset D_3$.

Теперь докажем, что $T_i(\alpha) \in D_3$, если $\alpha = \alpha_j \in A$. Если $\xi_j(1) = d_i$, то $T_i(\alpha) = T_i(\alpha_j) = \alpha_{j+1} \in D_3$, иначе $T_i(\alpha) = T_i(\alpha_j) \in L_{\omega \cdot j} \in D_3$. Лемма доказана.

Из леммы 8 следует, что Σ_3 сохраняет D_3. Рассмотрим задержку S_0, возвращающую 0 в первый момент времени. Если бы Σ_3 было полно, то она бы сохраняла D_3. Но это не так, потому что $S_0(010^\infty) = 0010^\infty \notin D_3$, где $010^\infty \in L_0 \subset D_3$. Утверждение 5 доказано.

Доказательство утверждений 6–8. Достаточность в этих леммах следует из леммы 2. Осталось доказать необходимость. Пусть последовательность продукций слова ξ конечна и имеет вид $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$. Покажем, что каждая из систем Σ'_1, Σ'_2 и Σ'_3 не является А-полной. Для $1 \leqslant i \leqslant s$ обозначим

$$\alpha_i = \tilde{d}_0^{\omega \cdot (i-1)} \tilde{\xi}_i 0^\infty, \alpha_{s+1} = \tilde{d}_0^{s \cdot \omega - 1} \tilde{d}'_0 0^\infty,$$

Нетрудно убедиться, что $T_a(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant s$, где d_a — первая буква слова ξ_i.

Пусть $A' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s, \alpha_{s+1}\}$. Рассмотрим множество

$$D'_1 = F_{s\cdot\omega} \cup \{\beta | \exists \alpha \in A', \beta \geqslant \alpha\}.$$

Пусть $D'_2 = D'_1 \cup \{0^\infty\}$. Обозначим $\tau = s \cdot \omega \cdot (k+8) + 2$.

Лемма 9. *Для любых $\alpha, \beta, \gamma \in D'_2$ выполнено*

$$W_0(\alpha,\beta,\gamma), G_0(\alpha,\beta), T_1(\alpha), T_2(\alpha), \dots, T_k(\alpha), T_\xi() \in D'_1.$$

Доказательство. $T_\xi() = \alpha_1 \in D'_1$. Если $\alpha \in F_{s\cdot\omega}$, то лемма следует из леммы 5. Если $\alpha = 0^\infty$, то для любого i, $0 \leqslant i \leqslant k$, выполняется $\hat{c}_0(\alpha) = c_i(\alpha) = 3$, а из этого следует утверждение леммы.

Докажем, что $W_0(\alpha,\beta,\gamma), G_0(\alpha,\beta) \in D'_1$, если для какого-то $\delta \in A'$ выполняется $\alpha \geqslant \delta$. Если $\hat{c}_0(\alpha) \leqslant \tau$, то $W_0(\alpha,\beta,\gamma), G_0(\alpha,\beta) \in F_{s\cdot\omega} \subset D'_1$. Если же $\hat{c}_0(\alpha) > \tau$, то $c_0(\alpha) > \tau$ и из леммы 3 следует, что для какого-то $\alpha' \in M_0$ выполняется $]_\tau\alpha =]_\tau\alpha'$. Учитывая, что $\alpha \geqslant \delta$, $\delta =]_\tau(\delta)0^\infty$, получаем $\alpha' \geqslant \delta$. По следствию из леммы 6 получаем, что $\alpha' = \delta \in A'$. Но $M_0 \cap A' = \varnothing$, получили противоречие.

Осталось доказать, что $T_i(\alpha) \in D'_1$, если для какого-то $\delta \in A'$ выполняется $\alpha \geqslant \delta$, $\alpha \notin F_{s\cdot\omega}$. Если $c_i(\alpha) < \tau$, то $T_i(\alpha) \in F_{s\cdot\omega} \subset D'_1$. Если же $c_i(\alpha) \geqslant \tau$, то из леммы 3 следует, что для какого-то $\alpha' \in M_i$ выполняется $]_{\tau-1}\alpha =]_{\tau-1}\alpha'$. Так как $\alpha \notin F_{s\cdot\omega}$, то $\alpha(\tau) = 0$. Тогда α и α' совпадают на словах длины τ. Учитывая, что $\alpha \geqslant \delta$, $\delta =]_\tau(\delta)0^\infty$, получаем $\alpha' \geqslant \delta$. По следствию из леммы 6 получаем, что $\alpha' = \delta = \alpha_j \in A'$. Так как $\alpha' \in M_i$, то $\xi_j(1) = d_i$, значит $T_i(\alpha)$ совпадает с $T_i(\alpha_j) = \alpha_{j+1}$ на словах длины τ, тогда $T_i(\alpha) \geqslant \alpha_{j+1}$ и $T_i(\alpha) \in D'_1$. Лемма доказана.

Следствие. *Каждый из автоматов $1, W_0, G_0, T_1, T_2, \dots, T_k, T_\xi$ сохраняет D'_1 и D'_2.*

Легко проверить, что если $\alpha \in D'_1, \beta \geqslant \alpha$, то $\beta \in D'_1$. Тогда $\alpha \vee \overline{\beta}$ сохраняет D'_1, так как $\alpha \vee \overline{\beta} \geqslant \alpha$. Итак, мы доказали, что $[\Sigma'_1]$ сохраняет D'_1. Но в D'_1 нет сверхслова, первые τ символов которого равны 0. Значит в $[\Sigma'_1]$ нет автомата, τ-равного константе 0, и Σ'_1 не A-полно. Утверждение 6 доказано.

Покажем, что $\alpha \vee \beta$ сохраняет D'_2. Пусть $\alpha, \beta \in D'_2$. Если $\alpha = 0^\infty$, то $\alpha \vee \beta = \beta \in D'_2$. Если $\alpha \neq 0^\infty$, то $\alpha \in D'_1$, но $\alpha \vee \beta \geqslant \alpha$, значит $\alpha \vee \beta \in D'_1 \subset D'_2$. Тем самым Σ'_2 сохраняет D'_2. Рассмотрим единичную задержку S_0, возвращающую 0 в первый момент времени. Если бы Σ'_2 было A-полно, то нашёлся бы автомат $T \in [\Sigma'_2]$, сохраняющий D'_2, такой, что автоматы T и S_0 τ-равны. Но, очевидно, что для какого-то $\epsilon \in E$ выполняется $T(010^\infty) = 0010^{\tau-3}\epsilon \notin D'_2$, где $010^\infty \in F_0 \subset D'_2$. Получили противоречие. Утверждение 7 доказано.

Пусть
$$D'_3 = \{0^\infty, 1^\infty\} \cup L_{s*\omega} \cup A' \cup \{\alpha | \overline{\alpha} \in A'\}.$$

Лемма 10. *Каждый из автоматов* $W_0, G_0, T_1, T_2, \ldots, T_k, T_\xi, 0, 1, \overline{x}$ *сохраняет* D'_3.

Доказательство. Для автоматов $T_\xi, 0, 1, \overline{x}$ это очевидно. Докажем, что для произвольных $\alpha, \beta, \gamma \in D'_3$ выполняется
$$W_0(\alpha, \beta, \gamma), G_0(\alpha, \beta), T_1(\alpha), T_2(\alpha), \ldots, T_k(\alpha) \in D'_3.$$
Если для какого-то j выполняется $\alpha \in L_j$, то это следует из леммы 5. Если $\alpha = 0^\infty$, $\alpha = 1^\infty$, либо $\overline{\alpha} \in A'$, то для любого i выполняется $c_i(\alpha) \leqslant 3$, значит, для любых $\beta, \gamma \in D'_3$ выполнено $T_1(\alpha), T_2(\alpha), \ldots, T_k(\alpha), W_0(\alpha, \beta, \gamma), G_0(\alpha, \beta) \in L_1 \subset D'_3$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha \in A'$. Легко проверить, что в этом случае $\hat{c}_0(\alpha) < \tau$ и $W_0(\alpha, \beta, \gamma), G_0(\alpha, \beta) \in L_j \subset D'_3$.

Теперь докажем, что $T_i(\alpha) \in D'_3$, если $\alpha = \alpha_j \in A'$. Если $\xi_j(1) = d_i$, то $T_i(\alpha) = T_i(\alpha_j) = \alpha_{j+1} \in D'_3$, иначе $T_i(\alpha) = T_i(\alpha_j) \in L_{\omega \cdot j} \in D'_3$. Лемма доказана.

Из леммы 10 следует, что Σ'_3 сохраняет D'_3. Рассмотрим задержку S_0, возвращающую 0 в первый момент времени. Если бы Σ'_3 было A-полно, то нашёлся бы автомат $T \in [\Sigma'_3]$, сохраняющий D'_3, такой, что автоматы T и S_0 τ-равны. Но, очевидно, что для какого-то $\epsilon \in E$ выполняется $T(010^\infty) = 0010^{\tau-3}\epsilon \notin D'_3$, где $010^\infty \in L_0 \subset D'_3$. Получили противоречие. Утверждение 8 доказано.

Список литературы

[1] Post E. Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.

[2] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П.,Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[3] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания *A*-полноты для о.д.-функций // Математические заметки. Т. 12. № 6. 1972. С. 687–697.

[4] Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. № 4. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 41–56.

[5] Буевич В. А. Условия *A*-полноты для автоматов. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[6] Бабин Д. Н. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты // Доклады Академии наук. № 4. Т. 367. 1999. С. 439–441

[7] Буевич В. А., Клиндухова Т. Э. Об алгоритмической неразрешимости задач об А-полноте и полноте для дефинитных ограниченно-детерминированных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 10. 2001.

[8] Жук Д. Н., Присмотров Ю. Н. О проблеме полноты в классе автоматов без обратной связи // Интеллектуальные системы. Т. 11, вып. 1–4. 2007. С. 439–472.

[9] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[10] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155.

[11] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.