Автоматная модель транспортировки вещества по легким в загрязненных средах

Ю. Г. Гераськина

Введение

В предлагаемой работе продолжается изучение механизма транспортировки вещества по легким, начатое в работах [2]–[6]. В процессе транспортировки вещества вниз последнее распределяется по легким, начиная с верхних его слоев. Вещество распределяется по бронхам послойно пропорционально их емкости сверху вниз. В процессе транспортировки вещества вверх легкие самоочищаются как от внутреннего секрета, так и от поступающего извне вещества. В работе [4] предложена автоматная модель для описания функционирования механизма транспортировки вещества по легким (автоматная модель транспортировки — АМТ).

В работах [2]–[4] и [6] рассмотрен случай функционирования АМТ в чистой среде. Для соответствующего автономного автомата оценены число состояний в нем и диаметр его диаграммы Мура. Описаны стартовые состояния и найдено их число. Найдена средняя глубина диаграммы, указан критерий перехода одного состояния в другое и оценено время такого перехода. Найдено время полного самоочищения.

В этой работе рассматривается случай функционирования АМТ в загрязненной стационарной среде, которая является автономным автоматом, а также и в нестационарной среде, когда АМТ уже не является автономным автоматом. Для них решаются задачи, указанные в случае чистой среды, а также решаются задачи описания финальных состояний и нахождения оценки их количества.

1. Автоматная модель транспортировки

Легкие представляются полным дихотомическим ориентированным к корню деревом, которое называется *I-деревом* и обозначается D^{-1}, со следующими параметрами.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ и l, $l \in \mathbb{N}$, считается глубиной этого I-дерева. Считается, что ребро I-дерева D^{-1}, инцидентное корню, имеет глубину 1.

Каждое ребро из D^{-1} разделено на n, $n \in \mathbb{N}$, равных частей, называемых *ресничками*, и занумерованных числами i, $i = 1, 2, \ldots, n$, возрастающими в направлении, обратном ориентации ребра.

Каждому ребру глубины j, $j = 1, 2, \ldots, l$, приписывается два числа $2^{l-j}b$ и $2^{l-j}r$, где $b, r \in \mathbb{N}$ и $r \leqslant b$, называемых *емкостью* и *мерой переброса* ресничек ребер глубины j, соответственно.

Такое I-дерево D^{-1} с описанными выше параметрами b, r, n и l обозначается $D^{-1}(b, r, n, l)$.

С этим I-деревом связывается некоторый процесс, который называется *процессом транспортировки* вещества по I-дереву $D^{-1}(b, r, n, l)$. Он обусловлен рядом допущений.

Считается, что в $D^{-1}(b, r, n, l)$ заданы распределения нагрузок по всем ресничкам, учитывая, что нагрузка может быть нулевой. Пусть V' — суммарная нагрузка по всем ресничкам, а V — максимально возможная суммарная нагрузка по всем ресничкам. V назовем *объемом I-дерева (легких)*, а V' — *исходным объемом загруженности I-дерева.*

I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l)$ с исходным объемом загруженности V' обозначается $D^{-1}(b, r, n, l; V')$.

Каждая ресничка осуществляет прием вещества извне и переброс своей нагрузки на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра.

Прием ресничкой вещества, имеющего массу d, $d \in \mathbb{N}_0$ и $d \leqslant V - V'$, из внешней среды внутри ребра уровня j, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, осуществляется по следующему правилу (для этого правила ориентация считается обратной к заданной).

A_1) Если нагрузка реснички равна ее емкости, то прием вещества не осуществляется.

Б$_1$) При нагрузке d_1, меньшей емкости первой с такой назрузкой реснички, она осуществляет прием вещества максимально возможной массы d_2, такой что $d_2 \leqslant \min(2^{l-j}b - d_1, d)$, где $2^{l-j}b$ — емкость этой реснички.

В$_1$) Следующая за ресничкой из Б$_1$) принимает массу d_3, как и в Б$_1$), с заменой там d на $d - d_2$.

Г$_1$) Оставшаяся масса вещества опускается до следующей реснички с большим номером в ребре, для которой не выполняется условие А$_1$). Она осуществляет прием вещества по правилу В$_1$) или Б$_1$).

Д$_1$) Если ресничка в рассматриваемом ребре является последней, не удовлетворяющей условию А$_1$), то оставшаяся масса вещества делится пополам (если число нечетное, то та из частей, которая на единицу больше другой, опускается на левое ребро, при условии, что реснички поддерева, инцидентного этому ребру, могут принять это вещество, в противном случае оставшееся вещество передается правому ребру); и каждая из частей вещества воспринимается соответствующими ребрами, как описано выше.

Е$_1$) Процесс, описываемый позициями А$_1$)–Д$_1$), начинается с ребра, которое инцидентно корню.

Переброс ресничкой вещества осуществляется на соседнюю ресничку с меньшим номером внутри ребра уровня j, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, по такому правилу.

А$_2$) Если следующая ресничка имеет не нулевую нагрузку, то переброс с реснички не осуществляется.

Б$_2$) Если нагрузка реснички не превосходит ее меры переброса $2^{l-j}r$ и не выполнено условие А$_2$), то перебрасывается на следующую вся нагрузка реснички и считается, что ее нагрузка становится равной нулю.

В$_2$) Если на ресничке нагрузка m и $m > 2^{l-j}r$, то она перебрасывает на следующую ресничку нагрузку $2^{l-j}r$ и оставляет у себя нагрузку $m - 2^{l-j}r$.

Если ресничка в ребре последняя, то переброс нагрузки осуществляется по правилам А$_2$), Б$_2$), В$_2$).

Г$_2$) Если ребро инцидентно корню, то переброс с наименьшей по номеру реснички осуществляется в среду по правилам Б$_2$) и В$_2$) в предположении, что среда играет роль реснички с нулевой нагрузкой.

Д$_2$) Если ребро не инцидентно корню, то есть его вершина инцидентна следующему ребру, то нагрузка с наименьшей по номеру реснички этого ребра передается наибольшей по номеру ресничке другого ребра по правилам А$_2$), Б$_2$), В$_2$).

Считается, что процесс транспортировки вещества по I-дереву $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ осуществляется в дискретные моменты времени $t = 1,2,3,\ldots$

В первый момент I-дерево $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ имеет заданное распределение нагрузок по его ресничкам.

Ко второму моменту осуществляется прием вещества массой $d(1)$ по правилам А$_1$)–Е$_1$), и затем осуществляется переброс нагрузок с реснички на ресничку во всем I-дереве или выброс в среду в соответствии с правилами А$_2$), Б$_2$), В$_2$), Г$_2$), Д$_2$). А если подается масса d, не превосходящая объема I-дерева, то та ее часть, которая не осела на ресничках, выбрасывается в среду.

Если в каждый момент $t = 1,2,3,\ldots$ все реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ осуществляют прием вещества нулевой массы, то такой процесс называется *процессом транспортировки* вещества по этому I-дереву *в чистой среде*. При наступлении момента t, в который все реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ впервые стали равными нулю, считается, что произошло *полное самоочищение* этого I-дерева.

Под распределением нагрузки V' I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ понимается любое из возможных распределений нагрузок всех его ресничек таких, что суммарный объем их нагрузок равен V'. Ясно, что $V' \leqslant V$, где V — объем I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ и $V = 2^{l-1}bnl$. Такие распределения называются *конфигурациями* нагрузки V' по ресничкам I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$.

Занумеруем все реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ таким образом, что ресничка с номером ijk является k-ой ресничкой j-го ребра глубины i, где $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, а нумерация ребер одной глубины идет слева направо. Тогда в каждый момент t конфигурацию нагрузки $V'(t)$ в I-дереве $D^{-1}(b,r,n,l)$ можно задать набором

$$q(t) = \left(q_{111}(t), q_{112}(t), \ldots, q_{ijk}(t), \ldots, q_{l2^{l-1}n}(t)\right),$$

в котором каждая координата $q_{ijk}(t)$ равна нагрузке реснички с номером ijk в момент t, причем $0 \leqslant q_{ijk}(t) \leqslant 2^{l-i}b$ и $\sum\limits_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}(t) = V'(t)$.

Пусть в процессе транспортировки конфигурации нагрузки $V'(t)$ в каждый момент t изменяются по правилам $A_2)-Д_2)$. Тогда процесс транспортировки можно представить некоторым конечным автономным автоматом $A(b,r,n,l)$ с одним финальным состоянием [4]. Состояниями этого автомата являются конфигурации нагрузок $V'(t)$ в I-дереве $D^{-1}(b,r,n,l)$, которые называются также состояниями этого I-дерева, а законы перехода из одного состояния в другое считаются указанными выше.

Далее формализация механизма транспортировки вещества по легким распространяется на случай загрязненной стационарной во времени среды и процесс транспортировки вещества по легким представим некоторым конечным автоматом $A_a(b,r,n,l)$ со входом [4]. Входной алфавит автомата $A_a(b,r,n,l)$ состоит только из одной буквы a, где $a \in \{1,2,3,\dots,V\}$. На вход такого автомата могут подаваться как слова, так и сверхслова.

Понятие состояния I-дерева не зависит от параметра r, а полностью определяется параметрами b, n, l и распределением вещества по его ресничкам. Учитывая отмеченную независимость понятия состояния I-дерева от r, обозначим через $Q(b,n,l)$ множество состояний I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, а его мощность — через $|Q(b,n,l)|$, полагая далее, что $n>1$.

Приведем результаты, полученные в работе [2].

Теорема 1. *Имеет место соотношение*

$$|Q(b,n,l)| = \Pi_{i=1}^{l}(2^{l-i}b+1)^{2^{i-1}\cdot n}.$$

Следствие 1. *Справедливы следующие оценки*

$$b^{(2^l-1)\cdot n}\cdot 2^{(2^l-l-1)\cdot n} < |Q(b,n,l)| \leqslant (b+1)^{(2^l-1)\cdot n}\cdot 2^{(2^l-l-1)\cdot n}.$$

Следствие 2. *Имеет место* $\log_2|Q(b,n,l)| \asymp 2^l$ *при* $l\to\infty$.

2. О финальных состояниях АМТ в загрязненных стационарных средах

Состояние q из $Q(b,n,l)$ называется *финальным* для автомата $A_a(b,r,n,l)$, если оно переходит только в себя.

Главными задачами этого параграфа являются описание всех финальных состояний автомата $A_a(b,r,n,l)$ для каждого a из множества $\{1,2,3,\ldots,V\}$ и указание их числа.

Пусть $Fin(b,r,n,l,a)$ — множество финальных состояний автомата $A_a(b,r,n,l)$.

Через q_a^* обозначено состояние автомата $A_a(b,r,n,l)$, при котором все реснички, кроме реснички с номером 111, имеют нагрузки, равные своей емкости, а ресничка с номером 111 имеет нагрузку $2^{l-1}(b-r)$.

При $a > 2^{l-1}r$ автомат $A_a(b,r,n,l)$ имеет только одно состояние, которое переходит в себя, и оно совпадает с q_a^*. Таким образом, если $a > 2^{l-1}r$, то $Fin(b,r,n,l,a) = \{q_a^*\}$.

При $a \leqslant 2^{l-1}r$ все финальные состояния описываются так.

Теорема 2. *Для q из $Q(b,n,l)$ при $a \leqslant 2^{l-1}r$ выполнено $q \in Fin(b,r,n,l,a)$ точно тогда, когда для q одновременно выполнены следующие условия:*

а) $q_{111} \leqslant 2^{l-1}(b-r)$ при $a = 2^{l-1}r$ и $q_{111} = 0$ при $a < 2^{l-1}r$,

б) для любого номера ijk, такого что $ijk \neq 111$, $ijk \neq ljn$ при $j \in \{1,2,\ldots 2^{l-1}\}$ и $q_{ijk} = 0$, при $k < n$ имеет место $q_{ij(k+1)} = 0$, а при $k = n$ имеет место $q_{(i+1)j'1} = q_{(i+1)j''1} = 0$, где ребра j' и j'' уровня $i+1$ инцидентны ребру j уровня i.

Доказательство. Так как любая ресничка может передавать свою нагрузку соседней сверху ресничке только с нулевой нагрузкой, то в процессе транспортировки наступит такой момент, когда ниже ресничек с нулевыми нагрузками могут быть реснички только с нулевыми нагрузками. При этом реснички с положительной нагрузкой не смогут передавать ее соседним сверху ресничкам.

Рассмотрим, при каких вариантах нагрузок реснички с номером 111 получившееся состояние q I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ будет переходить только в себя при входном сверхслове $aaa\ldots$, где $a \leqslant 2^{l-1}r$.

Если имеет место $0 \leqslant q_{111} \leqslant 2^{l-1}(b-r)$ и $a = 2^{l-1}r$ или имеет место $q_{111} = 0$ и $a < 2^{l-1}r$, то состояние q I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ будет переходить в себя под воздействием входной буквы a, так как нагрузка a, принимаемая ресничкой с номером 111, будет выбрасываться в среду в этот же момент, при этом все реснички будут сохранять свои нагрузки.

Если $q_{111} > 2^{l-1}(b-r)$ и $a = 2^{l-1}r$, то ресничка с номером 111 примет только часть нагрузки a, а оставшуюся часть примут другие реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ (если это возможно), при этом нагрузка реснички с номером 111 станет $2^{l-1}(b-r)$. Таким образом, состояние q перейдет в другое, отличное от q, состояние.

Если $q_{111} > 0$ и $a < 2^{l-1}r$, то, очевидно, под воздействием входной буквы a состояние q I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в себя не перейдет, так как нагрузка ресничка с номером 111 станет меньше чем q_{111}. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $a \leqslant 2^{l-1}r$, *то* $\log_2|Fin(b,r,n,l,a)| \asymp 2^l$ *при* $l \to \infty$.

Доказательство. Так как $|Fin(b,r,n,l,a)| \leqslant |Q(b,n,l)|$ и $\log_2|Q(b,n,l)| \asymp 2^l$ при $l \to \infty$, то получаем верхнюю оценку для порядка логарифма числа финальных состояний, а именно $\log_2|Fin(b,r,n,l,a)| \preceq 2^l$ при $l \to \infty$.

Получим теперь нижнюю оценку для $\log_2|Fin(b,r,n,l,a)|$. Для этого посчитаем количество состояний, у которых все реснички, кроме реснички с номером 111 имеют любые положительные нагрузки, ресничка с номером 111 имеет нулевую нагрузку. Нетрудно видеть, что количество таких состояний равно $(2^{l-1}b)^{n-1} \cdot \Pi_{i=2}^{l}(2^{l-i}b)^{2^{i-1}n}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\log_2|Fin(b,r,n,l,a)| &\geqslant \log_2((2^{l-1}b)^{n-1} \cdot \Pi_{i=2}^{l}(2^{l-i}b)^{2^{i-1}n}) = \\
&= (n-1)\log_2(2^{l-1}b) + \log_2(\Pi_{i=2}^{l}(2^{l-i}b)^{2^{i-1}n}) = \\
&= (n-1)(l+\log_2 b - 1) + n \cdot \sum_{i=2}^{l}(2^{i-1}\log_2(2^{l-i}b)) = \\
&= (n-1)(l+\log_2 b-1) + n \cdot \sum_{i=2}^{l}(2^{i-1}(l-i)) + n \cdot \sum_{i=2}^{l}(2^{i-1}\log_2 b)) = \\
&= (n-1)(l+\log_2 b-1) + n(2^l-2l) + n(2^l-2)\log_2 b \asymp 2^l
\end{aligned}$$

при $l \to \infty$.

Таким образом, из неравенств $2^l \preceq \log_2|Fin(b,r,n,l,a)| \preceq 2^l$ при $l \to \infty$ следует, что при $a \leqslant 2^{l-1}r$ имеет место $\log_2|Fin(b,r,n,l,a)| \asymp 2^l$ при $l \to \infty$. Теорема доказана.

Следствие. *Диаграмма Мура автомата $A_a(b, r, n, l)$ предсталяет собой дерево при $a > 2^{l-1}r$ и лес при $a \leqslant 2^{l-1}r$.*

3. О стартовых состояниях АМТ в загрязненных стационарных средах

Состояние q из $Q(b, n, l)$ называется *стартовым* для автомата $A_a(b, r, n, l)$, если в него не переходит ни одно из состояний множества $Q(b, n, l)$.

Приведем результат, полученный в работе [2], который дает описание множества стартовых состояний $St(b, r, n, l)$ АМТ в чистой среде. Этот результат будет использоваться в решении задачи описания множества стартовых состояний АМТ в загрязненных стационарных средах.

Будем говорить, что q из $Q(b, n, l)$ обладает:

– s_1-*свойством*, если при данном q выполнено $q_{111} > 0$ и $q_{112} > 0$;

– s_2-*свойством*, если при данном q существует ресничка с номером ijk, где $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 2^{i-1}\}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, причем $k > 1$ при $i = 1$ и $k < n$ при $i = l$, такая что $q_{ijk} = 0$ и выполнено либо $q_{ij(k-1)} = 0$ при $k > 1$, либо $q_{(i-1)j'n} = 0$ при $k = 1$ и $i > 1$, где ребро j' уровня $i - 1$ инцидентно ребру j уровня i, и при этом имеет место хотя бы одно из следующих условий (ребра j'' и j''' уровня $i+1$ инцидентны ребру j уровня i):

а) при $k < n - 1$ выполнено $q_{ij(k+1)} > 0$ и $q_{ij(k+2)} > 0$,

б) при $k = n - 1$ и $i = l$ выполнено $q_{ljn} > 0$,

в) при $k = n - 1$ и $i < l$ выполнено

– если $0 < q_{ijn} \leqslant 2^{l-(i+1)}r$, то $q_{(i+1)j''1} > 0$ и либо $q_{(i+1)j''2} > 0$, либо $q_{(i+1)j'''1} > 0$,

– если $2^{l-(i+1)}r < q_{ijn} \leqslant 2^{l-i}r$, то $q_{(i+1)j''1} > 0$,

г) при $k = n$ и $i < l$ выполнено $q_{(i+1)j''1} > 0$ и $q_{(i+1)j''2} > 0$;

– s_3-*свойством*, если $l > 1$ и при данном q существует ресничка с номером ij_11, где $i \in \{2, 3, \dots, l\}$, $j_1 \in \{1, 2, \dots, 2^{i-1}\}$, такая что $q_{ij_11} = 0$, при этом выполнено $q_{ij_12} > 0$, а также имеет место хотя бы одно из следующих условий (ребро j_1 уровня i инцидентно ребру j уровня $i - 1$ и ребру j_2 уровня i):

а) если $q_{(i-1)jn} = 1$, $q_{ij_2 1} = 0$, $q_{ij_2 2} > 0$ и при этом

– при $n > 2$ выполнено $q_{ij_1 3} > 0$ и $q_{ij_2 3} > 0$,

– при $n = 2$ и $i < l$ для каждого p из $\{1, 2\}$ выполнено (ребро j_p уровня i инцидентно ребрам j'_p и j''_p уровня $i+1$):

– если $0 < q_{ij_p 2} \leqslant 2^{l-(i+1)}r$, то либо $q_{(i+1)j'_p 1} > 0$ и $q_{(i+1)j'_p 2} > 0$, либо $q_{(i+1)j'_p 1} > 0$ и $q_{(i+1)j''_p 1} > 0$,

– если $2^{l-(i+1)}r < q_{ij_p 2} \leqslant 2^{l-i}r$, то $q_{(i+1)j'_p 1} > 0$,

б) если $0 < q_{(i-1)jn} \leqslant 2^{l-i}r$, $q_{ij_2 1} > 0$, $q_{ij_2 2} > 0$ и при этом

– при $n > 2$ выполнено $q_{ij_1 3} > 0$,

– при $n = 2$ и $i < l$ выполнено (ребро j_1 уровня i инцидентно ребрам j'_1 и j''_1 уровня $i+1$):

– если $0 < q_{ij_1 2} \leqslant 2^{l-(i+1)}r$, то либо $q_{(i+1)j'_1 1} > 0$ и $q_{(i+1)j'_1 2} > 0$, либо $q_{(i+1)j'_1 1} > 0$ и $q_{(i+1)j''_1 1} > 0$,

– если $2^{l-(i+1)}r < q_{ij_1 2} \leqslant 2^{l-i}r$, то $q_{(i+1)j'_1 1} > 0$,

в) если $2^{l-i}r < q_{(i-1)jn} \leqslant 2^{l-(i-1)}r$, $q_{ij_2 1} > 0$ и при этом

– при $n > 2$ выполнено $q_{ij_1 3} > 0$,

– при $n = 2$ и $i < l$ выполнено (ребро j_1 уровня i инцидентно ребрам j'_1 и j''_1 уровня $i+1$):

– если $0 < q_{ij_1 2} \leqslant 2^{l-(i+1)}r$, то либо $q_{(i+1)j'_1 1} > 0$ и $q_{(i+1)j'_1 2} > 0$, либо $q_{(i+1)j'_1 1} > 0$ и $q_{(i+1)j''_1 1} > 0$,

– если $2^{l-(i+1)}r < q_{ij_1 2} \leqslant 2^{l-i}r$, то $q_{(i+1)j'_1 1} > 0$.

Чтобы описать m_v-свойства, $v \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, состояния q введем следующее определение.

Три соседние реснички ребра j уровня i I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ с номерами k, $(k+1)$ и $(k+2)$, где $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, 2^{i-1}\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, имеющие в состоянии q нагрузки q_{ijk}, $q_{ij(k+1)}$ и $q_{ij(k+2)}$, такие что $q_{ijk} = 2^{l-i}r$, $0 < q_{ij(k+1)} \leqslant \min(2^{l-i}r; 2^{l-i}(b-r))$ и $q_{ij(k+2)} = 0$, будем называть *μ-тройками.*

Распространим это определение на соседние реснички двух инцидентных ребер j и j' уровней i и $i+1$, соответственно, где $i \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, 2^{l-i}\}$ и $j' \in \{1, 2, \ldots, 2^{l-(i+1)}\}$ следующим образом. Будем называть μ-тройками также реснички с номерами $ij(n-1)$, ijn, $(i+1)j'1$ или ijn, $(i+1)j'1$, $(i+1)j'2$, если для состояния q I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ выполнено $q_{ij(n-1)} = 2^{l-i}r$,

$0 < q_{ijn} \leqslant \min(2^{l-i}r; 2^{l-i}(b-r))$, $q_{(i+1)j'1} = 0$ или $q_{ijn} = 2^{l-i}r$, $0 < q_{(i+1)j'n} \leqslant \min(2^{l-(i+1)}r; 2^{l-(i+1)}(b-r))$, $q_{(i+1)j'2} = 0$, соответственно.

Будем говорить, что q из $Q(b,n,l)$ обладает:

– *m_1-свойством*, если при данном q в случае $b \geqslant 2r$ выполнено $q_{111} > 2^{l-1}(b-r)$, а в случае $r < b < 2r$ имеет место хотя бы одно из условий:

а) $2^{l-1}(b-r) < q_{111} < 2^{l-1}r$ и $q_{112} > 0$,

б) $q_{111} = 2^{l-1}r$ и $q_{112} > 2^{l-1}(b-r)$,

в) $q_{111} > 2^{l-1}r$;

– *m_2-свойством*, если при данном q существует цепочка инцидентных ребер, идущая (в направлении к листьям) от ребра j уровня i до ребра j' уровня i' включительно, где $1 \leqslant i \leqslant i' \leqslant l$, такая что в ребре j уровня i существует ресничка с номером k, где $k \in \{1,2,\dots,n\}$, такая что $q_{ijk} = 0$ или $q_{ijk} > 2^{l-i}r$, и в случае $k < n$ имеет место $q_{ij(k+1)} = 0$, а в случае $k = n$ имеет место $q_{(i+1)j''1} = 0$, где ребро j'' уровня $i+1$ принадлежит этой цепочке и инцидентно ребру j уровня i, и при этом, начиная с реснички с номером либо $ij(k+2)$ при $k < n-1$, либо $(i+1)j''1$ при $k = n-1$, либо $(i+1)j''2$ при $k = n$, существует m, где $m \in \{0,1,2,\dots,[\frac{n(l-i+1)-k-2}{3}]\}$, подряд идущих μ-троек с соответствующими ребрам, которым они принадлежат, параметрами и при $i' = i +]\frac{3m+k+2-n}{n}[$ и $k' = 3m+k+2-n[\frac{3m+k+1}{n}]$ имеет место хотя бы одно из следующих условий:

а) $q_{i'j'k'} > 2^{l-i'}r$,

б) $q_{i'j'k'} = 2^{l-i'}r$ и

– при $k' < n$ выполнено $q_{i'j'(k'+1)} > 2^{l-i'}(b-r)$,

– при $k' = n$ и $i' < l$ выполнено $q_{(i'+1)j'_11} > 2^{l-(i'+1)}(b-r)$, где ребро j'_1 уровня $i'+1$ инцидентно ребру j' уровня i',

в) $0 < q_{i'j'k'} < 2^{l-i'}r$ и

– при $k' < n$ выполнено $q_{i'j'(k'+1)} > 0$,

– при $k' = n$ и $i' < l$ выполнено одно из следующих условий (ребра j'_1 и j'_2 уровня $i'+1$ инцидентны ребру j' уровня i'):

– если $q_{i'j'k'} \neq 2^{l-(i'+1)}r$, то $q_{(i'+1)j'_11} > 0$ и $q_{(i'+1)j'_21} > 0$,

– если $q_{i'j'k'} = 2^{l-(i'+1)}r$, то при $b \geqslant 2r$ справедливо $q_{(i'+1)j'_11} > 2^{l-(i'+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ справедливо либо $q_{(i'+1)j'_11} >$

$2^{l-(i'+1)}(b-r)$ и $q_{(i'+1)j'_2 1} > 2^{l-(i'+1)}(b-r)$, либо $q_{(i'+1)j'_1 1} > 2^{l-(i'+1)}r$, либо хотя бы одно из следующих условий:

– при $q_{(i'+1)j'_1 1} = 2^{l-(i'+1)}r$ имеет место $q_{(i'+1)j'_1 2} > 2^{l-(i'+1)}(b-r)$,

– при $2^{l-(i'+1)}(b-r) < q_{(i'+1)j'_1 1} < 2^{l-(i'+1)}r$ имеет место $q_{(i'+1)j'_1 2} > 0$;

– m_3-*свойством*, если $l > 1$ и при данном q существует ресничка с номером ijn, где $i = 1, 2, 3, \dots, l-1$ и $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, такая что $q_{ijn} = 1$ и при этом $q_{(i+1)j'1} = 0$ и $q_{(i+1)j''1} = 0$, где ребро j уровня i инцидентно ребрам j' и j'' уровня $i+1$, а также начиная с ресничек с номерами $(i+1)j'2$ и $(i+1)j''2$ существуют две цепочки из m и m', соответственно, где $m, m' \in \{0, 1, 2, \dots, [\frac{n(l-i)-2}{3}]\}$, подряд идущих (в направлении к листьям) μ-троек с соответствующими ребрам, которым они принадлежат, параметрами до ресничек с номерами $i_1 j_1 k_1$ и $i_2 j_2 k_2$ (не включая последние), и таких что при $i_1 = i +]\frac{3m+2}{n}[$, $i_2 = i +]\frac{3m'+2}{n}[$, $k_1 = 3m + 2 - n[\frac{3m+1}{n}]$ и $k_2 = 3m' + 2 - n[\frac{3m'+1}{n}]$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) $q_{i_1 j_1 k_1} > 2^{l-i_1}r$ и $q_{i_2 j_2 k_2} > 2^{l-i_2}r$,

б) $q_{i_1 j_1 k_1} > 2^{l-i_1}r$, $q_{i_2 j_2 k_2} = 2^{l-i_2}r$ и

– при $k_2 < n$ имеет место $q_{i_2 j_2 (k_2+1)} > 2^{l-i_2}(b-r)$,

– при $k_2 = n$ и $i_2 < l$ имеет место $q_{(i_2+1)j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, где ребро j'_2 уровня i_2+1 инцидентно ребру j_2 уровня i_2,

в) $q_{i_1 j_1 k_1} > 2^{l-i_1}r$, $0 < q_{i_2 j_2 k_2} < 2^{l-i_2}r$ и

– при $k_2 < n$ имеет место $q_{i_2 j_2 (k_2+1)} > 0$,

– при $k_2 = n$ и $i_2 < l$ имеет место одно из следующих условий (ребра j'_2 и j''_2 уровня i_2+1 инцидентны ребру j_2 уровня i_2):

– если $q_{i_2 j_2 k_2} \neq 2^{l-(i_2+1)}r$, то $q_{(i_2+1)j'_2 1} > 0$ и $q_{(i_2+1)j''_2 1} > 0$,

– если $q_{i_2 j_2 k_2} = 2^{l-(i_2+1)}r$, то при $b \geqslant 2r$ справедливо $q_{(i_2+1)j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ справедливо либо $q_{(i_2+1)j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$ и $q_{(i_2+1)j''_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_2+1)j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}r$, либо хотя бы одно из следующих условий:

– при $q_{(i_2+1)j'_2 1} = 2^{l-(i_2+1)}r$ имеет место $q_{(i_2+1)j'_2 2} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$,

– при $2^{l-(i_2+1)}(b-r) < q_{(i_2+1)j'_2 1} < 2^{l-(i_2+1)}r$ имеет место

$q_{(i_2+1)j'_2 2} > 0$,

г) $q_{i_1 j_1 k_1} = 2^{l-i_1} r$, $q_{i_2 j_2 k_2} = 2^{l-i_2} r$ и для каждого p из $\{1,2\}$

– при $k_p < n$, имеет место $q_{i_p j_p (k_p+1)} > 2^{l-i_p}(b-r)$,

– при $k_p = n$ и $i_p < l$ имеет место $q_{(i_p+1)j'_p 1} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$, где ребро j'_p уровня i_p+1 инцидентно ребру j_p уровня i_p,

д) $0 < q_{i_1 j_1 k_1} < 2^{l-i_1} r$, $0 < q_{i_2 j_2 k_2} < 2^{l-i_2} r$ и для каждого p из $\{1,2\}$

– при $k_p < n$ имеет место $q_{i_p j_p (k_p+1)} > 0$,

– при $k_p = n$ и $i_p < l$ имеет место одно из следующих условий (ребра j'_p и j''_p уровня i_p+1 инцидентны ребру j_p уровня i_p):

– если $q_{i_p j_p k_p} \neq 2^{l-(i_p+1)} r$, то $q_{(i_p+1)j'_p 1} > 0$ и $q_{(i_p+1)j''_p 1} > 0$,

– если $q_{i_p j_p k_p} = 2^{l-(i_p+1)} r$, то при $b \geqslant 2r$ справедливо $q_{(i_p+1)j'_p 1} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ справедливо либо $q_{(i_p+1)j'_p 1} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$ и $q_{(i_p+1)j''_p 1} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_p+1)j'_p 1} > 2^{l-(i_p+1)} r$, либо хотя бы одно из следующих условий:

– при $q_{(i_p+1)j'_p 1} = 2^{l-(i_p+1)} r$ имеет место $q_{(i_p+1)j'_p 2} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$,

– при $2^{l-(i_p+1)}(b-r) < q_{(i_p+1)j'_p 1} < 2^{l-(i_p+1)} r$ имеет место $q_{(i_p+1)j'_p 2} > 0$,

е) $q_{i_1 j_1 k_1} = 2^{l-i_1} r$, $0 < q_{i_2 j_2 k_2} < 2^{l-i_2} r$ и

– при $k_1 < n$ имеет место $q_{i_1 j_1 (k_1+1)} > 2^{l-i_1}(b-r)$,

– при $k_2 < n$ имеет место $q_{i_2 j_2 (k_2+1)} > 0$,

– при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ имеет место $q_{(i_1+1)j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, где ребро j'_1 уровня i_1+1 инцидентно ребру j_1 уровня i_1,

– при $k_2 = n$ и $i_2 < l$ имеет место одно из следующих условий (ребра j'_2 и j''_2 уровня i_2+1 инцидентны ребру j_2 уровня i_2):

– если $q_{i_2 j_2 k_2} \neq 2^{l-(i_2+1)} r$, то $q_{(i_2+1)j'_2 1} > 0$ и $q_{(i_2+1)j''_2 1} > 0$,

– если $q_{i_2 j_2 k_2} = 2^{l-(i_2+1)} r$, то при $b \geqslant 2r$ справедливо $q_{(i_2+1)j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ справедливо либо $q_{(i_2+1)j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$ и $q_{(i_2+1)j''_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_2+1)j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)} r$, либо хотя бы одно из следующих условий:

– при $q_{(i_2+1)j'_2 1} = 2^{l-(i_2+1)} r$ имеет место $q_{(i_2+1)j'_2 2} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$,

– при $2^{l-(i_2+1)}(b-r) < q_{(i_2+1)j'_2 1} < 2^{l-(i_2+1)}r$ имеет место $q_{(i_2+1)j'_2 2} > 0$;

– m_4-*свойством*, если $l > 1$ и при данном q существует ресничка с номером ijn, где $i = 1, 2, 3, \ldots, l-1$ и $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, такая что $2^{l-(i+1)}r < q_{ijn} \leqslant 2^{l-i}r$ и при этом $q_{(i+1)j'1} = 0$ и $q_{(i+1)j''1} > 2^{l-(i+1)}(b-r)$, где ребро j уровня i инцидентно ребрам j' и j'' уровня $i+1$, а также начиная с реснички с номером $(i+1)j'2$ существует цепочка из m, где $m \in \{0, 1, 2, \ldots, [\frac{n(l-i)-2}{3}]\}$, подряд идущих (в направлении к листьям) μ-троек с соответствующими ребрам, которым они принадлежат, параметрами до реснички с номером $i_1 j_1 k_1$ (не включая последнюю), и такая что при $i_1 = i +]\frac{3m+2}{n}[$ и $k_1 = 3m + 2 - n[\frac{3m+1}{n}]$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) $q_{i_1 j_1 k_1} > 2^{l-i_1}r$,

б) $q_{i_1 j_1 k_1} = 2^{l-i_1}r$ и

– при $k_1 < n$ имеет место $q_{i_1 j_1 (k_1+1)} > 2^{l-i_1}(b-r)$,

– при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ имеет место $q_{(i_1+1)j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, где ребро j'_1 уровня i_1+1 инцидентно ребру j_1 уровня i_1,

в) $0 < q_{i_1 j_1 k_1} < 2^{l-i_1}r$ и

– при $k_1 < n$ имеет место $q_{i_1 j_1 (k_1+1)} > 0$,

– при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ имеет место одно из следующих условий (ребра j'_1 и j''_1 уровня i_1+1 инцидентны ребру j_1 уровня i_1):

– если $q_{i_1 j_1 k_1} \neq 2^{l-(i_1+1)}r$, то $q_{(i_1+1)j'_1 1} > 0$ и $q_{(i_1+1)j''_1 1} > 0$,

– если $q_{i_1 j_1 k_1} = 2^{l-(i_1+1)}r$, то при $b \geqslant 2r$ справедливо $q_{(i_1+1)j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ справедливо либо $q_{(i_1+1)j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$ и $q_{(i_1+1)j''_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_1+1)j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}r$, либо хотя бы одно из следующих условий:

– при $q_{(i_1+1)j'_1 1} = 2^{l-(i_1+1)}r$ имеет место $q_{(i_1+1)j'_1 2} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$,

– при $2^{l-(i_1+1)}(b-r) < q_{(i_1+1)j'_1 1} < 2^{l-(i_1+1)}r$ имеет место $q_{(i_1+1)j'_1 2} > 0$;

– m_5-*свойством*, если $l > 1$ и при данном q существует ресничка с номером ijn, где $i = 1, 2, 3, \ldots, l-1$ и $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, такая что $0 < q_{ijn} \leqslant 2^{l-(i+1)}r$ и при этом $q_{(i+1)j'1} = 0$ и либо $q_{(i+1)j''1} > 2^{l-(i+1)}r$, либо $0 < q_{(i+1)j''1} < 2^{l-(i+1)}r$ и $q_{(i+1)j''2} > 0$, либо $q_{(i+1)j''1} = 2^{l-(i+1)}r$

и $q_{(i+1)j''2} > 2^{l-(i+1)}(b-r)$, где ребро j уровня i инцидентно ребрам j' и j'' уровня $i+1$, а также начиная с реснички с номером $(i+1)j'2$ существует цепочка из m, где $m \in \{0, 1, 2, \ldots, [\frac{n(l-i)-2}{3}]\}$, подряд идущих (в направлении к листьям) μ-троек с соответствующими ребрам, которым они принадлежат, параметрами до реснички с номером $i_1 j_1 k_1$ (не включая последнюю), и такая что при $i_1 = i +]\frac{3m+2}{n}[$ и $k_1 = 3m+2-n[\frac{3m+1}{n}]$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) $q_{i_1 j_1 k_1} > 2^{l-i_1} r$,

б) $q_{i_1 j_1 k_1} = 2^{l-i_1} r$ и

– при $k_1 < n$ имеет место $q_{i_1 j_1 (k_1+1)} > 2^{l-i_1}(b-r)$,

– при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ имеет место $q_{(i_1+1) j_1' 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, где ребро j_1' уровня i_1+1 инцидентно ребру j_1 уровня i_1,

в) $0 < q_{i_1 j_1 k_1} < 2^{l-i_1} r$ и

– при $k_1 < n$ имеет место $q_{i_1 j_1 (k_1+1)} > 0$,

– при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ имеет место одно из следующих условий (ребра j_1' и j_1'' уровня i_1+1 инцидентны ребру j_1 уровня i_1):

– если $q_{i_1 j_1 k_1} \neq 2^{l-(i_1+1)} r$, то $q_{(i_1+1) j_1' 1} > 0$ и $q_{(i_1+1) j_1'' 1} > 0$,

– если $q_{i_1 j_1 k_1} = 2^{l-(i_1+1)} r$, то при $b \geqslant 2r$ справедливо $q_{(i_1+1) j_1' 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ справедливо либо $q_{(i_1+1) j_1' 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$ и $q_{(i_1+1) j_1'' 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_1+1) j_1' 1} > 2^{l-(i_1+1)} r$, либо хотя бы одно из следующих условий:

– при $q_{(i_1+1) j_1' 1} = 2^{l-(i_1+1)} r$ имеет место $q_{(i_1+1) j_1' 2} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$,

– при $2^{l-(i_1+1)}(b-r) < q_{(i_1+1) j_1' 1} < 2^{l-(i_1+1)} r$ имеет место $q_{(i_1+1) j_1' 2} > 0$.

Пусть $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $S = \{s_v | v \in \mathbb{N}_3\}$, $M = \{m_v | v \in \mathbb{N}_5\}$ и класс всех состояний q из $Q(b, n, l)$ с s_v-свойством при $s_v \in S$ обозначим через K_{s_v}, а класс всех состояний q из $Q(b, n, l)$ с m_v-свойством при $m_v \in M$ обозначим через K_{m_v}.

Имеют место следующие утверждения [2].

Теорема 4. *При $b = r$ выполнено*

$$St(b, r, n, l) = \begin{cases} K_{s_1}, \ \textit{если } l = 1 \textit{ и } n = 2, & (1) \\ K_{s_1} \cup K_{s_2}, \ \textit{если } l = 1 \textit{ и } n > 2, & (2) \\ K_{s_1} \cup K_{s_2} \cup K_{s_3}, \ \textit{если } l \geqslant 2 \textit{ и } n \geqslant 2, & (3) \end{cases}$$

где $K_{s_v} \neq \varnothing$ при всех v из $\mathbb{N}_3$ и если $j \in \{(2),(3)\}$, то для элементов строки (j) при $v \neq u$ выполнено $K_{s_v} \nsubseteq K_{s_u}$.

Теорема 5. *При $b > r$ выполнено*

$$St(b,r,n,l) = \begin{cases} K_{m_1}, \text{ если } l = 1 \text{ и } n = 2, & (1) \\ K_{m_1} \cup K_{m_2}, \text{ если } l = 1 \text{ и } n > 2, & (2) \\ \bigcup_{v\in\mathbb{N}_5} K_{m_v}, \text{ если } l \geqslant 2 \text{ и } n \geqslant 2, & (3) \end{cases}$$

где $K_{m_v} \neq \varnothing$ при всех v из $\mathbb{N}_5$ и если $j \in \{(2),(3)\}$, то для элементов строки (j) при $v \neq u$ выполнено $K_{m_v} \nsubseteq K_{m_u}$.

Теорема 6. *Имеет место*

$$C \leqslant \frac{|St(b,r,n,l)|}{|Q(b,n,l)|} \leqslant 1,$$

$$\text{где } C = \left(\frac{2^{l-1}b}{2^{l-1}b+1}\right)^2 \text{ при } b = r, \;\; C = \frac{(2^{l-1})^2 \cdot r \cdot b}{(2^{l-1}b+1)^2} \text{ при } r < b < 2r$$

$$\text{и } C = \frac{2^{l-1}r}{2^{l-1}b+1} \text{ при } b \geqslant 2r.$$

Следствие. *Имеет место:*

а) $|St(b,r,n,l)| \sim |Q(b,n,l)|$, если $b = r$,

б) $|St(b,r,n,l)| \asymp |Q(b,n,l)|$, если $b > r$, при $l \to \infty$.

Перейдем к решению главной задачи этого параграфа, то есть описанию стартовых состояний автомата $A_a(b,r,n,l)$.

Входная буква a при заданных l и b представима в виде $a = k \cdot 2^{l-1}b + k'$, где $k' < 2^{l-1}b$. Если $a > 2^{l-1}r$, то $k \geqslant 0$ при $b > r$ и $k > 0$ при $b = r$.

Пусть $D_a^{-1}(b,r,n,l)$ — неполное поддерево I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, такое что оно имеет глубину $]\frac{k}{n}[$ в случае, когда либо n не делит k нацело, либо n делит k нацело и при этом $k' = 0$, или глубину $\frac{k}{n} + 1$, когда либо n делит k нацело и $k' > 0$, либо $k = 0$. При этом количество ресничек на последнем (нижнем) уровне этого поддерева равно либо $k - [\frac{k}{n}] \cdot n$, если $k' = 0$, либо $k - [\frac{k}{n}] \cdot n + 1$, если $k' > 0$.

Это неполное поддерево $D_a^{-1}(b,r,n,l)$ загружаем таким образом, как если бы к полностью пустому этому поддереву применился один шаг процесса транспортировки в стационарной загрязненной среде подачей на вход буквы a, где $a > 2^{l-1}r$. Поддерево $D_a^{-1}(b, r, n, l)$, загруженное таким образом, обозначается $\overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$.

Тогда при $a > 2^{l-1}r$ и $b = r$ для $\overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$ выполнено: ресничка с номером 111 имеет нулевую нагрузку, все остальные реснички кроме, быть может, самых нижних ресничек имеют нагрузки, равные своим емкостям, а суммарная нагрузка по всем нижним ресничкам равна k'.

При $a > 2^{l-1}r$ и $b > r$ для $\overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$ выполнено: если $k = 0$, то ресничка с номером 111 имеет нагрузку $a - 2^{l-1}r$, а если $k > 0$, то ресничка с номером 111 имеет нагрузку $2^{l-1}(b - r)$ и все остальные реснички кроме, быть может, самых нижних ресничек имеют нагрузки, равные своим емкостям, а суммарная нагрузка по всем нижним ресничкам равна k'.

Загруженное некоторым образом поддерево $D_a^{-1}(b, r, n, l)$ I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$, находящегося в некотором состоянии q, *поресничково меньше загружено*, чем $\overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$ (обозначение $D_a^{-1}(b, r, n, l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$), если нагрузка хотя бы одной реснички поддерева $D_a^{-1}(b, r, n, l)$ I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии q меньше соответствующей ей реснички поддерева $\overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$ этого I-дерева.

Состояние q из $Q(b, n, l)$ при $b = r$ обладает:

– s_a-*свойством*, если при данном q для поддерева $D_a^{-1}(b, r, n, l)$ I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ выполнено $D_a^{-1}(b, r, n, l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$;

– $\overline{s}_1$-*свойством*, если при данном q выполнено $q_{111} > 0$.

Состояние q из $Q(b, n, l)$ при $b > r$ обладает:

– m_a-*свойством*, если при данном q для поддерева $D_a^{-1}(b, r, n, l)$ I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ выполнено $D_a^{-1}(b, r, n, l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$.

Класс всех состояний из $Q(b, n, l)$ с s_a-свойством обозначен через K_{s_a}, класс всех состояний из $Q(b, n, l)$ с $\overline{s}_1$-свойством обозначен через $K_{\overline{s}_1}$, а класс всех состояний из $Q(b, n, l)$ с m_a-свойством — через K_{m_a}.

Пусть $St(b, r, n, l, a)$ — множество стартовых состояний I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в стационарной среде с входным алфавитом $\{a\}$, где $a \in \{1, 2, 3, \ldots, V\}$.

Лемма 1. *При $a > 2^{l-1}r$ имеет место:*

а) $St(b,r,n,l,a) = K_{s_a} \cup St(b,r,n,l)$ *при* $b = r$,

б) $St(b,r,n,l,a) = K_{m_a} \cup St(b,r,n,l)$ *при* $b > r$.

Здесь $K_{s_a} \neq \varnothing$, $K_{m_a} \neq \varnothing$, $K_{s_a} \not\subseteq St(b,r,n,l)$ *и* $K_{m_a} \not\subseteq St(b,r,n,l)$.

Доказательство. Докажем утверждение а). Нетрудно видеть, что, если q из $Q(b,n,l)$ принадлежит классу K_{s_a}, то при $a > 2^{l-1}r$ оно является стартовым. Действительно, при подаче в I-дерево вещества массой, превосходящей емкость реснички с номером 111, ниже лежащие реснички примут максимально возможные нагрузки от оставшейся массы вещества и в процессе дыхания нагрузки этих ресничек уменьшаться не могут. Поэтому, если в состоянии q выполнено $D_a^{-1}(b,r,n,l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$, то q является стартовым.

Покажем теперь, что, если q стартовое, то оно принадлежит хотя бы одному из множеств K_{s_a} или $St(b,r,n,l)$.

В каждый момент происходит как прием ресничками вещества, так и переброс с нижних ресничек соседним сверху.

Стартовость по перебросу ресничками вещества доставляется теоремой 4. Поэтому предположим, что q является стартовым и не принадлежит множеству $St(b,r,n,l)$. Так как заполнение I-дерева начинается с верхних ресничек, то для q возможны следующие два варианта: не выполнено условие $D_a^{-1}(b,r,n,l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$ и выполнено условие $D_a^{-1}(b,r,n,l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$.

В случае, когда не выполнено условие $D_a^{-1}(b,r,n,l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$, существует предшественник q' состояния q, так как $q \notin St(b,r,n,l)$, такой что либо все реснички поддерева $D_a^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии q' имеют нулевые нагрузки в случае поресничково равно загруженных соответствующих поддеревьев, либо все реснички, кроме самых нижних, поддерева $D_a^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии q' имеют нулевые нагрузки, а самые нижние реснички имеют соответствующие положительные нагрузки в случае поресничково больше загруженного поддерева чем $\overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$.

В случае, когда выполнено условие $D_a^{-1}(b,r,n,l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$, имеет место $q \in K_{s_a}$.

Следовательно, если $a > 2^{l-1}r$, то при $b = r$ имеет место $St(b,r,n,l,a) = K_{s_a} \cup St(b,r,n,l)$.

Класс K_{s_a} не пуст, так как ему принадлежит, например, такое состояние q^0, при котором все реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ имеют нулевые нагрузки.

Легко видеть, что $q^0 \notin St(b,r,n,l)$, а, следовательно, $K_{s_a} \nsubseteq St(b,r,n,l)$.

Докажем утверждение б). Нетрудно видеть, что, если q из $Q(b,n,l)$ принадлежит классу K_{m_a}, то при $a > 2^{l-1}r$ оно является стартовым. Действительно, при подаче в I-дерево вещества массой, превосходящей емкость реснички с номером 111, ниже лежащие реснички примут максимально возможные нагрузки от оставшейся массы вещества и в процессе транспортировки нагрузки этих ресничек уменьшаться не могут. При подаче в I-дерево вещества массой, не превосходящей емкость реснички с номером 111, ниже лежащие реснички (кроме, быть может, реснички с номером 112 в первый момент времени) примут нулевые нагрузки и процессе дыхания нагрузки этих ресничек уменьшаться не могут. Поэтому, если в состоянии q выполнено $D_a^{-1}(b,r,n,l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$, то q является стартовым.

Покажем теперь, что, если q стартовое, то оно принадлежит хотя бы одному из множеств K_{m_a} или $St(b,r,n,l)$.

В каждый момент происходит как прием ресничками вещества, так и переброс с нижних ресничек соседним сверху.

Стартовость по перебросу ресничками вещества доставляется теоремой 5. Поэтому предположим, что q является стартовым и не принадлежит множеству $St(b,r,n,l)$. Так как заполнение I-дерева начинается с верхних ресничек, то для q возможны следующие два варианта: не выполнено условие $D_a^{-1}(b,r,n,l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$ и выполнено условие $D_a^{-1}(b,r,n,l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$.

В случае, когда не выполнено условие $D_a^{-1}(b,r,n,l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b,r,n,l)$, существует предшественник q' состояния q, так как $q \notin St(b,r,n,l)$, такой что либо все реснички поддерева $D_a^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии q' имеют нулевые нагрузки в случае пореничково равно загруженных соответствующих поддеревьев, либо все реснички, кроме самых нижних, поддерева $D_a^{-1}(b,r,n,l)$ в состоянии q' имеют нулевые нагрузки, а самые нижние реснички имеют соответствующие положительные нагрузки в случае пореsничково больше загруженного поддерева чем $\overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$.

В случае, когда выполнено условие $D_a^{-1}(b, r, n, l) \lhd \overline{D_a^{-1}}(b, r, n, l)$, имеет место $q \in K_{m_a}$.

Следовательно, если $a > 2^{l-1}r$, то при $b > r$ имеет место $St(b, r, n, l, a) = K_{m_a} \cup St(b, r, n, l)$.

Класс K_{m_a} не пуст, так как ему принадлежит, например, такое состояние q^0, при котором все реснички I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ имеют нулевые нагрузки.

Легко видеть, что $q^0 \notin St(b, r, n, l)$, а следовательно $K_{m_a} \nsubseteq St(b, r, n, l)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *При $a \leqslant 2^{l-1}r$ имеет место:*

а) $St(b, r, n, l, a) = K_{\overline{s}_1} \cup St(b, r, n, l)$ при $b = r$,

б) $St(b, r, n, l, a) = St(b, r, n, l)$ при $b > r$.

Здесь $K_{\overline{s}_1} \neq \varnothing$ и $K_{\overline{s}_1} \nsubseteq St(b, r, n, l)$.

Доказательство. Докажем утверждение а). Нетрудно видеть, что, если q из $Q(b, n, l)$ принадлежит классу $K_{\overline{s}_1}$, то при $a \leqslant 2^{l-1}r$ оно является стартовым. Действительно, при подаче в I-дерево вещества массой, не превосходящей меры переброса реснички с номером 111, нагрузка, которую будет иметь эта ресничка, в этот же момент времени выбросится в среду и тем самым ее нагрузка станет нулевой. И так после каждого шага процесса транспортировки ресничка с номером 111 будет иметь нулевую нагрузку. Поэтому, если в состоянии q выполнено $q_{111} > 0$, то q является стартовым.

Покажем теперь, что, если q стартовое, то оно принадлежит хотя бы одному из множеств $K_{\overline{s}_1}$ или $St(b, r, n, l)$.

В каждый момент происходит как прием ресничками вещества, так и переброс с нижних ресничек соседним сверху.

Стартовость по перебросу ресничками вещества доставляется теоремой 4. Поэтому предположим, что q является стартовым и не принадлежит множеству $St(b, r, n, l)$. Так как заполнение I-дерева начинается с верхних ресничек, то для q возможны следующие два варианта: $q_{111} = 0$ и $q_{111} > 0$.

В случае, когда $q_{111} = 0$, имеется предшественник q' состояния q, так как $q \notin St(b, r, n, l)$, такой что $q'_{111} = 0$, так как $a \leqslant 2^{l-1}r$.

В случае, когда $q_{111} > 0$, имеем $q \in K_{\overline{s}_1}$.

Таким образом, если $a \leqslant 2^{l-1}r$, то при $b = r$ имеет место $St(b, r, n, l, a) = K_{\overline{s}_1} \cup St(b, r, n, l)$.

Класс $K_{\overline{s}_1}$ не пуст, так как ему принадлежит, например, такое состояние q^1, при котором все реснички I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$, кроме реснички с номером 111, имеют нулевые нагрузки, а ресничка с номером 111 имеет нагрузку 1.

Легко видеть, что $q^1 \notin St(b, r, n, l)$, а, следовательно, $K_{\overline{s}_1} \nsubseteq St(b, r, n, l)$.

Докажем утверждение б). Заметим, что при $a \leqslant 2^{l-1}r$ и $b > r$ множество $St(b, r, n, l, a)$ совпадает с множеством $St(b, r, n, l)$, так как в процессе транспортировки при указанных условиях в каждый момент нагрузку получает только ресничка с номером 111 и при этом она освобождается от всей своей нагрузки или ее части. Остальные реснички (кроме, быть может, реснички с номером 112 в первый момент времени) во время процесса транспортировки не участвуют в приеме вещества, а осуществляют только переброс своей нагрузки на соседние верхние реснички, если это возможно. Следовательно, используя теорему 5, получаем, что, если $a \leqslant 2^{l-1}r$, то при $b > r$ имеет место $St(b, r, n, l, a) = St(b, r, n, l)$. Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7. *Справедливы положения:*

1) Если $a > 2^{l-1}r$, то имеет место:

а) $St(b, r, n, l, a) = K_{s_a} \cup St(b, r, n, l)$ при $b = r$,

б) $St(b, r, n, l, a) = K_{m_a} \cup St(b, r, n, l)$ при $b > r$.

2) Если $a \leqslant 2^{l-1}r$, то имеет место:

а) $St(b, r, n, l, a) = K_{\overline{s}_1} \cup St(b, r, n, l)$ при $b = r$,

б) $St(b, r, n, l, a) = St(b, r, n, l)$ при $b > r$.

Здесь $K_{s_a} \neq \varnothing$, $K_{\overline{s}_1} \neq \varnothing$, $K_{m_a} \neq \varnothing$, $K_{s_a} \nsubseteq St(b, r, n, l)$, $K_{m_a} \nsubseteq St(b, r, n, l)$ и $K_{\overline{s}_1} \nsubseteq St(b, r, n, l)$.

Из следствия теоремы 6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 8. *Имеет место при $l \to \infty$:*

а) $St(b,r,n,l,a) \sim St(b,r,n,l)$, *если* $b = r$,

б) $St(b,r,n,l,a) \asymp St(b,r,n,l)$, *если* $b > r$.

4. О переводимости состояний АМТ в загрязненных стационарных средах и о глубине диаграммы Мура АМТ

Главной задачей здесь является установление по двум конфигурациям I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ наличие в диаграмме Мура автомата $A_a(b,r,n,l)$ ориентированного пути между соответствующими состояниями этого автомата. В этом случае говорим, что конфигурации или состояния переводимы друг в друга. Нашей главной здачей является установление критерия переводимости.

Пусть I-дерево $D^{-1}(b,r,n,l)$ находится в состоянии q. Тогда через $q(t)$ обозначено состояние этого I-дерева в момент t, полагая, что в первый момент оно находится в состоянии q, то есть $q(1) = q$.

Состояние q^1 I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ *переводимо* в состояние q^2 этого I-дерева, если для некоторого t, такого что $t > 1$, будет выполнено $q^1(t) = q^2$. Очевидно, такое t единственное.

По следствию из теоремы 3 при $a > 2^{l-1}r$ автомат $A_a(b,r,n,l)$ имеет только одно финальное состояние q_a^*. В этом случае решение проблемы переводимости доставляет следующее утверждение.

Теорема 9. *Если* $a > 2^{l-1}r$, $\{q^1, q^2\} \subseteq Q(b,n,l)$, $q^2 \neq q_a^*$ *и* $q^2 \notin St(b,r,n,l,a)$, *то* q^1 *переводимо в* q^2 *точно тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) $V_{q^2} > V_{q^1}$,

б) $q^1(]\frac{V_{q^2} - V_{q^1}}{a - 2^{l-1}r}[+1) = q^2$.

Доказательство. Докажем необходимость, то есть покажем, что если q^1 переводимо в q^2, то должны выполняться условия а) и б).

Начнем с условия а). Заметим, что в каждый момент времени объем I-дерева увеличивается на $a - 2^{l-1}r$. Если $V_{q^2} \leqslant V_{q^1}$, то в процессе дальнейшей транспортировки вещества объем этого I-дерева будет только увеличиваться, так как $q^2 \neq q_a^*$, а, значит, q^1 никогда не перейдет в q^2.

Из выше описанного следует выполнение условия а).

Рассмотрим условие б). Так как q^1 переводимо в q^2, то существует такой момент t, в который объемы состояний $q^1(t)$ и q^2 совпадут. Так как в каждый момент времени объем I-дерева увеличивается на $a-2^{l-1}r$, то легко видеть, что $t =]\frac{V_{q^2}-V_{q^1}}{a-2^{l-1}r}[+1$, где $q^1(1) = q^1$. При этом будет справедливо равенство $q^1(t) = q^2$. Таким образом, должно быть выполнено условие б).

Достаточность очевидна. Если выполнены условия а) и б), то легко видеть, что q^1 переводимо в q^2. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любое состояние q из $Q(b,n,l)$ автомата $A_a(b,r,n,l)$ в случае, когда $V_q \geqslant V_{q_a^*}$, переходит в q_a^* за время 1, в противном случае — за время* $\left]\frac{V_{q_a^*}-V_q}{a-2^{l-1}r}\right[$.

Следствие 2. *В диаграмме Мура автомата $A_a(b,r,n,l)$ все состояния из $Q(b,n,l)$, имеющие одинаковый объем, имеют путь до q_a^* одинаковой длины.*

По следствию из теоремы 3 диаграмма Мура автомата $A_a(b,r,n,l)$ при $a > 2^{l-1}r$ является деревом, глубина которого считается глубиной $G(A_a(b,r,n,l))$ этой диаграммы.

Следствие 3. *Если $a > 2^{l-1}r$, то* $G(A_a(b,r,n,l)) = \left]\frac{2^{l-1}(bnl-r)}{a-2^{l-1}r}\right[$.

Далее рассматривается случай, когда $0 < a \leqslant 2^{l-1}r$. По следствию из теоремы 3 в этом случае диаграмма Мура автомата $A_a(b,r,n,l)$ представляет собой лес, финальные состояния которого образуют множество $Fin(b,r,n,l,a)$. В связи с этим возникает задача о переводимости q из $Q(b,n,l)$ в q_a^* из $Fin(b,r,n,l,a)$.

Цепь с номером i (цепи I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, идущие от листа до корня, занумерованы слева направо) обозначается C_i, где $i \in \{1,2,\ldots,2^{l-1}\}$.

Рассматривается некоторое состояние q I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$. Конфигурация нагрузок цепи C_i (ее состояние) в этом состоянии обозначается q_{c_i}.

Цепь I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, функционирующая отдельно от этого I-дерева, называется *изолированной цепью.*

Финальным состоянием изолированной цепи C_i, находящейся в состоянии q_{c_i}, называется такое ее состояние $q_{c_i}(T)$, что для любого $t>0$ выполнено $q_{c_i}(T+t)=q_{c_i}(T)$.

Пусть $T^q_{C_i}$ — время перехода изолированной цепи C_i I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, находящегося в состоянии $q(2)$, в финальное состояние.

Рассмотрим некоторую изолированную цепь C_i, где $i \in [1,2,3,\ldots,2^{l-1}]$, I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, находящегося в состоянии $q(2)$. Для упрощения записи будем обозначать ее без индекса, а именно C.

Разобьем цепь C, идя по ней сверху вниз (начиная с реснички с номером 112), на блоки из подряд идущих ресничек с нулевой и положительной нагрузками следующим образом. Первый блок из ресничек с нулевыми нагрузками обозначим p_1, следующий за ним блок ресничек с положительными нагрузками обозначим z_1 и так далее до последнего блока с положительными нагрузками z_m, где $m \in \mathbb{N}$.

Блоки ресничек с пустыми и положительными нагрузками будем называть пустыми и заполненными блоками, соответственно.

Итак, z_i — число ресничек i-го заполненного блока, p_i — число ресничек i-го пустого блока.

Пусть q_{ij} — нагрузка j-ой реснички i-го заполненного блока, r_{ij} — мера переброса j-ой реснички i-го заполненного блока, где $j \in [1,2,\ldots,z_i]$ и $i \in [1,2,\ldots,m]$.

Введем следующие функции:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0,\end{cases} \quad \text{и} \quad \chi(x)=\begin{cases}x, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Пусть Δp_i — число ресничек, на которое переместится вверх вся нагрузка последней (z_i-ой) реснички i-го заполненного блока в процессе перехода цепи C в финальное состояние.

Лемма 3. *Имеет место* $\Delta p_i = \chi\left(\Delta p_{i-1} + p_i + z_i - \sum\limits_{j=1}^{z_i} \left]\frac{q_{ij}}{r_{ij}}\right[\right)$, *где* $\Delta p_0 = 0$.

Доказательство. Так как нагрузка последней реснички $(i-1)$-го заполненного блока переместится на Δp_{i-1} ресничек вверх, то число свободных (с нулевой нагрузкой) ресничек для нагрузки i-го заполненного блока увеличится на Δp_{i-1}. Таким образом, количество ресничек, которое может занять гипотетически нагрузка i-го заполненного блока, p_{i_h} складывается из следующий величин: число ресничек, освобожденных $(i-1)$-м заполненным блоком, Δp_{i-1} (оно учитывает все свободные реснички до $(i-1)$-го заполненного блока); число свободных ресничек между i-м и $(i-1)$-м заполненными блоками p_i; число ресничек, занимаемое нагрузкой i-го заполненного блока z_i.

Следовательно, $p_{i_h} = \Delta p_{i-1} + p_i + z_i$.

Посчитаем число ресничек z_{i_h}, которое может занять нагрузка i-го заполненного блока в процессе перехода цепи C в финальное состояние.

Так как нагрузка q_{ij} j-ой реснички i-го блока может занять $\left]\frac{q_{ij}}{r_{ij}}\right[$ свободных ресничек, а количество ресничек в i-м заполненном блоке равно z_i, то $z_{i_h} = \sum\limits_{j=1}^{z_i} \left]\frac{q_{ij}}{r_{ij}}\right[$.

Если $p_{i_h} \leqslant z_{i_h}$, то нагрузка последней реснички i-го заполненного блока не освобождается и $\Delta p_i = 0$.

Если $p_{i_h} > z_{i_h}$, то за все время движения нагрузки по цепи C нагрузка последней реснички i-го заполненного блока переместится вверх на $p_{i_h} - z_{i_h}$ ресничек.

Следовательно, $\Delta p_i = \chi\left(\Delta p_{i-1} + p_i + z_i - \sum\limits_{j=1}^{z_i} \left]\frac{q_{ij}}{r_{ij}}\right[\right)$. Лемма доказана.

Пусть

$$k_i = \begin{cases} 0, \text{ если } \Delta p_{i-1} + p_i + 1 \leqslant \left] \frac{q_{i1}}{r_{i1}} \right[, \\ \max\left\{ h \in \mathbb{N} | \left(\sum_{j=1}^{h} \left] \frac{q_{ij}}{r_{ij}} \right[< \Delta p_{i-1} + p_i + h \right) \& (h < z_i) \right\}, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$m_i = \begin{cases} \Delta p_{i-1} + p_i + k_i - \sum_{j=1}^{k_i} \left] \frac{q_{ij}}{r_{ij}} \right[, \text{ если } \Delta p_i = 0 \text{ и } k_i \neq 0, \\ \left] \frac{q_{iz_i}}{r_{iz_i}} \right[, \text{ если } \Delta p_i > 0, \\ \Delta p_{i-1} + p_i, \text{ если } \Delta p_i = 0 \text{ и } k_i = 0. \end{cases}$$

Пусть Δt_i — время простоя (количество шагов, когда нагрузка не передается соседней ресничке) последней движущейся нагрузки реснички i-го заполненного блока, а T_C^q — это время перехода изолированной цепи C I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$, находящегося в состоянии $q(2)$, в финальное состояние.

Лемма 4. *Имеет место*

$$T_C^q = \varphi(p_i) \cdot \max_{i \in \mathbb{N}_m} (\Delta t_i + \max(\Delta p_i, 1)),$$

где $\Delta t_i = \begin{cases} \chi(\Delta t_{i-1} \cdot \varphi(\Delta p_{i-1}) - (p_i - 1)) + \sum_{j=1}^{k} (2 \cdot \left] \frac{q_{ij}}{r_{ij}} \right[-1) + 2(m_i - 1), & \textit{если } k_i \neq 0, \\ \chi(\Delta t_{i-1} \cdot \varphi(\Delta p_{i-1}) - (p_i - 1)) + 2m_i - 2, & \textit{если } k_i = 0 \textit{ и } p_i > 0, \\ 0, & \textit{если } k_i = 0 \textit{ и } p_i = 0, \end{cases}$

$\Delta t_0 = 0$ *и* $\Delta p_0 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим величину $\Delta p_{i-1} + p_i + h - 1$, где $h < z_i$. Эта величина равна количеству ресничек, доступных для размещения нагрузки с первых h ресничек i-го блока. Тогда, если $\Delta p_{i-1} + p_i + 1 \leqslant \left] \frac{q_{i1}}{r_{i1}} \right[$, то переместится вверх может нагрузка (возможно не вся) только с первой реснички i-го заполненного блока. Если $\Delta p_i + p_i + h > \sum_{j=1}^{h} \left] \frac{q_{ij}}{r_{ij}} \right[$, то переместится вверх нагрузка с первых h ресничек i-го заполненного блока. Тогда,

$$k_i = \begin{cases} 0, \text{ если } \Delta p_{i-1} + p_i + 1 \leqslant \left] \frac{q_{i1}}{r_{i1}} \right[, \\ \max\left\{ h \in \mathbb{N} | \left(\sum_{j=1}^{h} \left] \frac{q_{ij}}{r_{ij}} \right[< \Delta p_{i-1} + p_i + h \right) \& (h < z_i) \right\}, \text{ иначе,} \end{cases}$$

— это число ресничек, которые освободятся от своей нагрузки полностью (не считая последней реснички), а

$$m_i = \begin{cases} \Delta p_{i-1} + p_i + k_i - \sum\limits_{j=1}^{k_i} \left] \frac{q_{ij}}{r_{ij}} \right[, \text{ если } \Delta p_i = 0 \text{ и } k_i \neq 0, \\ \left] \frac{q_{iz_i}}{r_{iz_i}} \right[, \text{ если } \Delta p_i > 0, \\ \Delta p_{i-1} + p_i, \text{ если } \Delta p_i = 0 \text{ и } k_i = 0, \end{cases}$$

— это число ресничек, которое требуется для передачи нагрузки с последней передающей свою нагрузку реснички i-го заполненного блока.

Заметим, что задержка движения i-го заполненого блока, полученная от $(i-1)$-го заполненного блока, одинакова для всех нагрузок i-го блока. В связи с этим можем рассматривать процесс движения нагрузок $(i-1)$-го заполненного блока следующим образом: начиная с первого шага нагрузка находится на месте все время ее задержки, по истечении этого времени она двигается вверх уже без задержек. То есть мы разбиваем процесс движения нагрузки на два этапа: когда нагрузка стоит и когда она передается вверх.

Если $\Delta p_{i-1} \neq 0$ и $\Delta t_{i-1} > p_i - 1$, то нагрузка первой реснички i-го заполненного блока задержится на $\Delta t_{i-1} - p_i + 1$. Действительно, за $p_i - 1$ шаг она поднимется на $p_i - 1$ ресничку, следующим шагом она будет на p_i ресничке, а дальше ей двигаться некуда и нужно ждать, пока освободятся верхние реснички, время $\Delta t_{i-1} - (p_i - 1)$. Если $k_i \geqslant 1$, то эта задержка передастся всем нагрузкам этого заполненного блока включая последнюю сдвинувшуюся нагрузку.

Задержка от j-й полностью освободившейся от нагрузки реснички будет, как легко видеть, $2\left] \frac{q_{ij}}{r_{ij}} \right[- 1$. Количество таких ресничек в i-м блоке k_i, после чего останется одна ресничка, которая передаст нагрузку вверх m_i раз. Следовательно, время задержки последней нагрузки равно $2m_i - 2$.

Отсюда получаем формулу задержки последней движущейся нагрузки i-го заполненного блока:

$$\Delta t_i = \begin{cases} \chi(\Delta t_{i-1} \cdot \varphi(\Delta p_{i-1}) - (p_i - 1)) + \sum\limits_{j=1}^{k} (2 \cdot \left] \frac{q_{ij}}{r_{ij}} \right[- 1) + 2(m_i - 1), \text{ если } k_i \neq 0, \\ \chi(\Delta t_{i-1} \cdot \varphi(\Delta p_{i-1}) - (p_i - 1)) + 2m_i - 2, \text{ если } k_i = 0 \text{ и } p_i > 0, \\ 0, \text{ если } k_i = 0 \text{ и } p_i = 0. \end{cases}$$

Таким образом, время движения нагрузок i-го блока равно $\varphi(p_i)(\Delta t_i + \max(\Delta p_i, 1))$, а время движения нагрузок всех m заполненных блоков по изолированной цепи C I-дерева находится по формуле:

$$T_C^q = \varphi(p_i) \cdot \max_{i \in \mathbb{N}_m} (\Delta t_i + \max(\Delta p_i, 1)).$$

Лемма доказана.

Теорема 10. *Если* $0 < a \leqslant 2^{l-1} r$, $q \in Q(b, n, l)$ *и* $q_a^* \in Fin(b, r, n, l, a)$, *то* q *переводимо в* q_a^* *точно тогда, когда* $q(T) = q_a^*$, *где* $T = \max\limits_{C_i, i \in \{1,2,\ldots,2^{l-1}\}} T_{C_i}^q + 2$.

Доказательство. Если $q(t) = q_a^*$, где $t = \max\limits_{C_i, i \in \{1,2,\ldots,2^{l-1}\}} T_{C_i}^q + 2$, то, очевидно, q переводимо в q_a^*. Таким образом, достаточность очевидна.

Докажем теперь необходимость, то есть, что если q переводимо в q_a^*, то $q(t) = q_a^*$, где $t = \max\limits_{C_i, i \in \{1,2,\ldots,2^{l-1}\}} T_{C_i}^q + 2$.

Заметим, что время перехода в финальное состояние изолированной цепи C_i не меньше времени перехода в финальное состояние такой же, но не изолированной цепи C_i I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$.

Действительно, при попадании нагрузки из инцидентных ребер (на местах стыков ребер) в неизолированную цепь возможны три следующих ситуации:

а) нагрузка попадает в C_i, не занимая свободных ресничек,

б) нагрузка попадает в C_i, занимая свободные реснички, но не препятствует движению имеющейся в цепи нагрузке,

в) нагрузка попадает в C_i, занимая свободную ресничку, и препятствует движению имеющейся в цепи нагрузке.

В случае а) время перехода в конечное состояние изолированной цепи C_i совпадает со временем перехода в конечное состояние той же неизолированной цепи.

В случае б) нагрузка, попадая в цепь, занимает ее свободные реснички и нагрузка, имеющаяся изначально в изолированной цепи, не поднимется на эти реснички. Таким образом, время перехода в финальное состояние изолированной цепи C_i больше времени перехода в финальное состояние той же неизолированной цепи.

В случае в) нагрузка, попадая в цепь и занимая свободную ресничку, создает задержку в движении нагрузки, имеющейся в цепи, поэтому время перехода в конечное состояние изолированной цепи C_i совпадает со временем перехода в конечное состояние той же неизолированной цепи.

При любых комбинациях случаев а), б) и в) время перехода в конечное состояние изолированной цепи C_i не больше времени перехода в конечное состояние той же неизолированной цепи.

Отсюда следует, что состояние q I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ переводимо в q_a^* за время, не превосходящее $\max\limits_{C_i, i\in\{1,2,\dots,2^{l-1}\}} T^q_{C_i} + 1$ ($T^q_{C_i}$ — это время перехода в финальное состояние изолированной цепи C_i I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии $q(2)$, поэтому прибавили к этому времени еще единицу, то есть переход от состояния $q(1)$ к $q(2)$).

Так как, перейдя в финальное состояние, I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l)$ на каждом последующем шаге будет переходить только в это же состояние, то должно выполняться $q(\max\limits_{C_i, i\in\{1,2,\dots,2^{l-1}\}} T^q_{C_i} + 2) = q_a^*$. Теорема доказана.

Теорема 10 для диаграммы Мура автомата $A_a(b, r, n, l)$ при $0 < a \leqslant 2^{l-1}r$ дает описание всех деревьев, корнями которых являются элементы множества $Fin(b, r, n, l, a)$.

Решение задачи о переводимости двух любых состояний q^1 и q^2 из $Q(b, n, l)$ автомата $A_a(b, r, n, l)$ при $0 < a \leqslant 2^{l-1}r$ доставляет следующее утверждение.

Теорема 11. *Если $0 < a \leqslant 2^{l-1}r$, $\{q^1, q^2\} \subseteq Q(b, n, l)$, то q^1 переводимо в q^2 точно тогда, когда существует T из отрезка $[1; \max\limits_{C_i, i\in\{1,2,\dots,2^{l-1}\}} T^{q^1}_{C_i} + 2]$, такое что $q^1(T) = q^2$.*

Доказательство. Если существует t из отрезка $[1; \max\limits_{C_i, i\in\{1,2,\dots,2^{l-1}\}} T^{q^1}_{C_i} + 2]$, такое что $q^1(t) = q^2$, то, очевидно, q^1 переводимо в q^2. Таким образом, достаточность очевидна.

Докажем теперь необходимость, то есть, что если q^1 переводимо в q^2, то существует t из отрезка $[1; \max\limits_{C_i, i\in\{1,2,\dots,2^{l-1}\}} T^{q^1}_{C_i} + 2]$, такое что $q^1(t) = q^2$.

Так как q^1 переводимо в q^2, то существует такой момент t, который не превосходит времени перехода q^1 в соответсвующее финальное состояние и такой, что $q^1(t) = q^2$. Пользуясь теоремой 10, получаем, что $t \leqslant \max\limits_{C_i, i \in \{1,2,\ldots,2^{l-1}\}} T_{C_i}^{q^1} + 2$.

Если же за это время q^1 не перешло в q^2, то q^1 не переводимо в q^2. Теорема доказана.

По следствию из теоремы 3 диаграмма Мура автомата $A_a(b,r,n,l)$ при $0 < a \leqslant 2^{l-1}r$ представляет собой лес. Наибольшая глубина дерева из всех деревьев леса называется глубиной этой диаграммы и обозначается $G(A_a(b,r,n,l))$.

Теорема 12. *Если* $0 < a \leqslant 2^{l-1}r$, *то* $G(A_a(b,r,n,l)) = 2ln - \left]\frac{ln-2}{\left]\frac{b}{r}\right[}\right[- 4$.

Доказательство. Найдем такое состояние I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, которое имеет самое долгое время перехода в финальное состояние.

Так как при попадании нагрузки в некоторую цепь I-дерева с инцидентных ребер время перехода ее в финальное состояние не увеличивается, то можно рассматривать такое состояние I-дерева, когда вся его нагрузка сосредоточена только в одной цепи этого I-дерева, а реснички остальных его ребер имеют нулевые нагрузки. Далее заметим, что расположение всей нагрузки цепи в нижних ребрах дает увеличение времени перехода этой цепи в финальное состояние. Нетрудно видеть, что для получения наибольшего времени движения нагрузки по цепи объем загрузки этой цепи должен быть таким, чтобы в финальном состоянии все реснички цепи, начиная с номера 112 до n-ой реснички l-го уровня, имели нагрузки, не превосходящие своей меры переброса, причем самая нижняя ресничка этой цепи должна передать соседней сверху ресничке хотя бы часть своей нагрузки.

Итак, получили состояние q I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$, которое имеет наибольшее время перехода в финальное и которое устроено следующим образом: самая нижняя ресничка цепи I-дерева имеет нагрузку q_{nl}, где $q_{nl} \leqslant b$, а s ресничек перед ней имеют нагрузки, равные максимальным.

Найдем время перехода описанного состояния q I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ в финальное q^*.

В состоянии q^* все реснички цепи, кроме самой нижней реснички (n-я ресничка ребра уровня l) и, быть может, реснички с номером 111, имеют положительные нагрузки (не превосходящие своих мер переброса), а самая нижняя ресничка имеет нулевую нагрузку.

Тогда получаем следующее равенство: $(ln-2) = s \cdot \left]\frac{b}{r}\right[+ q_0$, где $q_0 \leqslant \left]\frac{b}{r}\right[$. Отсюда, $s = \left]\frac{ln-2}{\left]\frac{b}{r}\right[}\right[- 1$ и $q_0 = ln - 2 - s \cdot \left]\frac{b}{r}\right[$.

По лемме 4 получаем, что время $T(q,q^*)$ перехода q в q^* вычисляется следующим образом:

$$T(q,q^*) = 1 + s\cdot(2\cdot\left]\frac{b}{r}\right[-1) + 2(q_0-1) = 2ln - 5 - s = 2ln - \left]\frac{ln-2}{\left]\frac{b}{r}\right[}\right[- 4.$$

Таким образом, $Gl(b,r,n,l,a) = 2ln - \left]\frac{ln-2}{\left]\frac{b}{r}\right[}\right[- 4$. Теорема доказана.

5. О свойствах диаграммы Мура АМТ в загрязненных нестационарных средах

Здесь рассматривается I-дерево $D^{-1}(b,r,n,l)$, функционирующее в переменной по загрязнению во времени среде.

Переменная среда кодируется словами $\alpha^m = a(1)a(2)\ldots a(t)\ldots a(m)$ из алфавита $\{0,1,2,\ldots,V\}$, где буква $a(t)$ — количество вещества, которое поступает в I-дерево в момент t.

Конфигурации I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ под воздействием входных букв будут меняться по правилам А_1–Д_2, описанным в разделе 1.

Таким образом, процесс транспортировки вещества по I-дереву $D^{-1}(b,r,n,l)$ в загрязненной нестационарной среде можно представить некоторым конечным уже неавтономным автоматом $\mathcal{A}(b,r,n,l)$, множество состояний которого совпадает с множеством $Q(b,n,l)$, с входным алфавитом $\{0,1,2,\ldots,V\}$ и следующей функцией перехода состояний: если в момент t автомат $\mathcal{A}(b,r,n,l)$ находится в состоянии q и на вход в этот момент подается буква $a(t)$, то в диаграмме Мура автомата $A_{a(t)}(b,r,n,l)$ то состояние q', в которое переходит q, является тем состоянием, в которое перейдет автомат $\mathcal{A}(b,r,n,l)$ из q под воздействием буквы $a(t)$, то есть $q(t+1) = q'$.

Таким образом, диаграмма Мура автомата $\mathcal{A}(b, r, n, l)$ является «склейкой» диаграмм Мура автоматов в стационарных средах.

Диаграмма Мура такого автомата $\mathcal{A}(b, r, n, l)$ представляет собой ориентированный, вообще говоря, не древовидный граф со следующими свойствами:

а) граф связный, так как из любого его состояния под воздействием слова, состоящего из нулей, нужной длины можно перейти в состояние, все реснички которого имеют нулевые нагрузки;

б) граф не сильно связный, так как стартовые состояния не переводимы друг в друга;

в) граф имеет циклы (под воздействием периодических сходных слов) и петли (в финальных состояниях стационарных сред);

г) множество стартовых состояний этой диаграммы совпадает с множеством стартовых состояний автомата $A(b, r, n, l)$ в чистой среде, то есть с множеством $St(b, r, n, l)$;

д) финальных состояний у этой диаграммы нет, так как из любого состояния q в этой диаграмме под воздействием сооответствующей входной буквы можно перейти в состояние, отличное от q.

В связи с описанным выше оказываются решенными такие задачи, как время наискорейшего перехода в стабилизацию I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ под воздействием входных слов и, более того, время наискорейшего перехода в стабилизацию I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ при произвольных словах при заданном подалфавите.

Диаметром диаграммы Мура автомата $\mathcal{A}(b, r, n, l)$ называется такое множество состояний этой диаграммы, любая пара которых не переводима друг в друга.

Учитывая свойство г) диаграммы Мура автомата $\mathcal{A}(b, r, n, l)$, получается, что ее диаметр совпадает с множеством $St(b, r, n, l)$, а, следовательно, почти все подмножества состояний диаграммы Мура этого автомата являются его диаметром.

Автор выражает глубокую благодарность академику Кудрявцеву Валерию Борисовичу за постановку задач и научное руководство и академику Чучалину Александру Григорьевичу за научные консультации и внимание к работе.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов // М.: Наука, 1985.

[2] Гераськина Ю. Г. О стартовых состояниях автоматной модели легких в чистой среде // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 119–135.

[3] Гераськина Ю. Г. О переводимости состояний автоматной модели легких в чистой среде // Научный вестник «Ломоносов». 2008. Вып. 1. С. 146–154.

[4] Гераськина Ю. Г. Об одной автоматной модели в биологии // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 122–139.

[5] Гераськина Ю. Г. Модель процесса дыхания живых организмов // Интеллектуальные системы. 2004. Т. 8, вып. 1–4. С. 429–456.

[6] Гераськина Ю. Г. Модель самоочищения легочных структур // Интеллектуальные системы. 2002–2003. Т. 7, вып. 1–4. С. 41–54.