Об автоматной модели преследования внутри квадрата*

Н. Ю. Волков

Изучается процесс преследования коллективом автоматов («хищников») нескольких независимых друг от друга автоматов («жертв»). Преследование происходит в квадрате со стороной l. Показано, что для произвольной конечной независимой системы жертв существует конечный коллектив хищников, который при любом натуральном l «ловит» данную систему жертв в квадрате со стороной l при любом начальном расположении в квадрате жертв и стартующих из одной точки хищников. В то же время показано, что для произвольного конечного коллектива хищников существует натуральное число l, такое, что для произольного начального расположения хищников в квадрате со стороной l существует независимая система жертв, таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, и их начальное расположение в квадрате со стороной l, при котором все жертвы «убегают» от хищников.

Введение

Рассматривается автоматный аналог ситуации преследования хищниками своих жертв. В работе [6] показано, что если преследование происходит на целочисленной плоскости, то существует конечный коллектив хищников, который ловит любую конечную независимую систему жертв с фиксированными скоростями и обзорами при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00240).

хищников. В данной работе установлено, что подобный результат не имеет места для семейства всех квадратов. При этом для семейства всех квадратов установлена возможность поимки коллективом хищников данной системы жертв.

В качестве пространства преследования рассматривается лабиринт, являющийся подмножеством плоскости, разбитой на квадраты целочисленной решеткой и представляющий собой квадрат со стороной l. Также, как и в работе [6], хищники и жертвы представляются в виде автоматов, которые, находясь в какой-либо клетке лабиринта, умеют обозревать некоторую ее окрестность, и, в зависимости от вида (конфигурации) этой окрестности (то есть от расположения границы лабиринта и других автоматов в этой окрестности) и своего состояния, способны перемещаться в другую клетку лабиринта. Автоматы-хищники и автоматы-жертвы в начале процесса образуют определенную диспозицию, находясь в своих начальных состояниях. После этого начинается процесс перемещения автоматов. Внутренние логики автоматов в совокупности определяют этот процесс. Жертва считается пойманной, если она оказалась в фиксированной окрестности одного из хищников.

Предполагается, что каждая жертва «не видит» других жертв, но видит хищников, попавших в ее зону обзора. Хищники «видят» и жертв и друг друга на расстоянии своего обзора. Таким образом, жертвы представляют собой независимую систему автоматов, а хищники — коллектив автоматов.

Фиксируются скорости и обзоры хищников и жертв так, чтобы обзор хищников был не меньше обзора жертв, а скорость хищников — больше скорости жертв.

Решается следующая задача. Существует ли коллектив хищников K, такой, что для любого натурального числа l найдется такое начальное расположение автоматов из K в квадрате со стороной l, что для любой независимой системы жертв S и любого начального расположениия жертв в этом квадрате, все жертвы, с течением времени, будут пойманы хищниками?

Показывается, что данная задача решается отрицательно. Строится в явном виде автомат-«жертва», убегающий от заданного коллектива хищников в квадрате определенного размера. Также строится коллектив хищников, ловящий в квадрате произвольного размера данную конечную независимую систему жертв.

Автор работы выражает признательность В. Б. Кудрявцеву за научное руководство, а также И. В. Кучеренко, высказавшему ряд ценных замечаний.

1. Постановка задачи и основные результаты

Будем использовать стандартные обозначения для множеств натуральных и целых чисел $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, соответственно. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество клеток, на которые плоскость разбивается целочисленной решеткой, обозначим через $\mathbb{Z}^2$, сопоставляя каждой клетке координаты ее нижнего левого угла.

Будем называть две клетки, принадлежащих $\mathbb{Z}^2$, *соседними*, если эти клетки имеют общую сторону. *Оболочкой* произвольного множества $\mathcal{Y} \subset \mathbb{Z}^2$ назовем множество, состоящее из клеток множества $\mathcal{Y}$, а также из всех клеток, которые являются соседними для какой-либо клетки $\mathcal{Y}$. Оболочку множества $\mathcal{Y}$ обозначаем $\overline{\mathcal{Y}}$.

Лабиринт, состоящий из клеток с обеими положительными координатами, не превосходящими l, назовем *l-квадратом* и будем обозначать как $L_5(l)$ ($L_5(l) = \{(x, y) \,|\, x \leqslant l,\, y \leqslant l,\; x, y \in \mathbb{N}\}$, где $l \in \mathbb{N}$). Назовем r-окрестностью клетки (x_0, y_0) множество

$$D_{(x_0,y_0),r} = \{(x, y) \,|\; (x, y) \in \mathbb{Z}^2\,,\, (\,|x - x_0| + |y - y_0|\,) \leqslant r\},$$

где $r \in \mathbb{N}_0$. Будем считать, что задана определенная нумерация клеток множества $D_{(x_0,y_0),r}$.

Под автоматом будем понимать инициальный конечный автомат (см. [2]) вида $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где A — входной, B — выходной, Q — внутренний алфавиты автомата $\mathcal{A}$, $\varphi : Q \times A \to Q$ и $\psi : Q \times A \to B$ — функции переходов и выходов $\mathcal{A}$, соответственно, $q_0 \in Q$ — его начальное состояние. Алфавит A определяет возможности $\mathcal{A}$ «видеть» происходящее вокруг, а алфавит B — его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции φ и ψ задают внутреннюю логику автомата $\mathcal{A}$.

Пусть дан лабиринт L, являющийся одним из лабиринтов $L_5(l)$. Рассмотрим автомат $\mathcal{A}$, перемещающийся в L. Выходным алфавитом $\mathcal{A}$ является множество $B = D_{(0,0),V}$, где параметр $V \in \mathbb{N}$ называется *скоростью автомата* $\mathcal{A}$. Входной алфавит $\mathcal{A}$ зависит от параметра $R \in \mathbb{N}$ $(R \geqslant V)$, называемого *обзором автомата* $\mathcal{A}$ и способа взаимодействия $\mathcal{A}$ с другими автоматами. Возможны два случая такого взаимодействия:

1) $\mathcal{A}$ является элементом независимой системы автоматов;
2) $\mathcal{A}$ является элементом коллектива автоматов.

Автомат со скоростью V и обзором R будем обозначать как $\mathcal{A}(R,V)$. Пусть $\mathcal{A}(R,V)$ находится в клетке (x_0, y_0). Множество $D_{(x_0,y_0),V} \cap L$ называется *окрестностью хода* $\mathcal{A}$, а множество $\overline{D_{(x_0,y_0),(R-1)} \cap L}$ — *зоной обзора* $\mathcal{A}$.

Рассмотрим две системы автоматов $K = (W_1, \ldots, W_m)(R,V)$ (хищники) и $S = (U_1, \ldots, U_n)(R', V')$ (жертвы), где R и R' — обзоры, а V и V' — скорости хищников и жертв, соответственно. Здесь S — независимая система автоматов, K — коллектив. Пусть каждая жертва U_i находится в клетке (x_i', y_i') лабиринта L, а каждый хищник W_j находится в клетке (x_j, y_j) лабиринта L в состоянии q_j.

Положим $N' = (R'+1)^2 + (R')^2$ — количество клеток множества $D_{(x_0,y_0),R'}$, то есть максимально возможный размер зоны обзора жертвы (это число одинаково для всех клеток (x_0, y_0)). Для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим строку $(a_1', \ldots, a_{N'}')$ следующим образом. Для любого $k = 1, \ldots, N'$

$$a_k' = \begin{cases} -1, & \text{если } k\text{-я клетка множества } D_{(x_i',y_i'),R'} \\ & \text{не принадлежит лабиринту } L; \\ 1, & \text{если в } k\text{-й клетке множества } D_{(x_i',y_i'),R'} \text{ находится} \\ & \text{хотя бы один хищник;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Строку $(a_1', \ldots, a_{N'}')$ назовем *U_i-конфигурацией*. Каждая U_i-конфигурация однозначно задает клетки зоны обзора U_i, не принадлежащие лабиринту, а также клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники.

Положим $N = (R+1)^2 + R^2$ — количество клеток множества $D_{(x_0,y_0),R}$, то есть максимально возможный размер зоны обзора хищника (это число также одинаково для всех клеток (x_0, y_0)). Для каждого $j = 1,\ldots,m$ определим строку $(a_1,\ldots,a_{N+m})$ следующим образом. Для любого $k = 1,\ldots,N$

$$a_k = \begin{cases} -1, & \text{если } k\text{-я клетка множества } D_{(x_j,y_j),R} \\ & \text{не принадлежит лабиринту } L; \\ 1, & \text{если в } k\text{-й клетке множества } D_{(x_j,y_j),R} \text{ находится} \\ & \text{хотя бы одна жертва;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим внутренний алфавит W_j как Q_j, а множество всех пар вида $((x,y),q)$, где $(x,y) \in D_{(0,0),R}$, $q \in \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$ — как M. Положим для любого $p = 1,\ldots,m$, $p \neq j$

$$a_{N+p} = \begin{cases} ((x_p - x_j,\, y_p - y_j),\, q_p), & \text{если } |x_p - x_j| + |y_p - y_j| \leqslant R; \\ \Lambda, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Положим

$$a_{N+j} = \Lambda. \quad (3)$$

Строку $(a_1,\ldots,a_{N+m})$, определенную равенствами (1) — —(3), назовем W_j-*конфигурацией.* Легко видеть, что $a_{N+p} \in (M \cup \{\Lambda\})$ при $p = 1\ldots m$. Каждая W_j-конфигурация однозначно задает клетки зоны обзора W_j, не принадлежащие лабиринту, клетки зоны обзора W_j, в которых находятся жертвы, а также расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_j.

Расположения в лабиринте L жертв и хищников и состояния хищников однозначно задают все U_i-конфигурации и все W_j-конфигурации. Множества всех U_i-конфигураций и всех W_j-конфигураций при всевозможных расположениях жертв и хищников и состояниях хищников конечны. Обозначим множество всех U_i-конфигураций как F'. Аналогично, множество всех W_j-конфигураций обозначим как F. Входным алфавитом каждой жертвы U_i является множество всех пар вида $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2)$, где $\mathcal{F}'_1 \in (\{\varnothing\} \cup F')$, а $\mathcal{F}'_2 \in F'$. Входным алфавитом каждого хищника W_j является множество всех пар вида $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in F$.

Момент времени 2τ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ называется *τ-моментом хода жертв.* Момент $(2\tau + 1)$ называется *τ-моментом хода хищников.* Промежуток времени $[2\tau, (2\tau + 1)]$ называется *тактом с номером τ.* Время взаимодействия автоматов будем измерять в тактах.

Преследование коллективом хищников независимой системы жертв происходит так. Фиксируются начальные (в нулевой момент времени) расположения всех хищников и жертв на плоскости. В нулевой момент каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\varnothing, \mathcal{F}'_2)$, где U_i-конфигурация $\mathcal{F}'_2$ задает клетки зоны обзора U_i, не принадлежащие лабиринту, и клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники. В момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N})$ каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2)$, задающую клетки зоны обзора U_i, не принадлежащие лабиринту, и клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники в момент $(2\tau - 1)$ и в момент 2τ. В каждый момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ жертва U_i, в соответствии со своими функциями переходов и выходов, определяет свое следующее состояние, выходной символ $\overline{b}$, и перемещается на вектор $\overline{b}$.

В момент $(2\tau + 1)$ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ хищник W_j воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, задающую клетки зоны обзора W_j, не принадлежащие лабиринту, расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_j, а также клетки зоны обзора W_j, в которых находятся жертвы в момент 2τ и в момент $(2\tau + 1)$, и, в соответствии со своими функциями переходов и выходов, определяет свое следующее состояние, выходной символ $\overline{b}$, и перемещается на вектор $\overline{b}$.

Будем рассматривать только такие автоматы (жертв и хищников), для которых перемещение на вектор, равный выходному символу $\overline{b}$ никогда не выводит за пределы лабиринта, в котором происходит преследование.

Система хищников K «ловит» жертву, если жертва в некоторый момент времени оказалась в окрестности хода одного из хищников. Пойманная жертва исчезает из лабиринта. Если система хищников не ловит некоторую жертву, будем говорить что эта жертва *убегает* от данной системы хищников. K «ловит» независимую систему жертв, если в процессе преследования K ловит каждую жертву.

Ставится вопрос: существует ли коллектив хищников $K(R, V)$, такой, что для любого $l \in \mathbb{N}$ существует такое начальное расположение хищников в $L_5(l)$, что для произвольной конечной независимой системы жертв $S(R', V')$ и любого их начального расположения в $L_5(l)$, коллектив K ловит S.

Расположение системы автоматов в лабиринте, при котором все эти автоматы находятся в одной клетке, назовем *каноническим.* Зафиксируем R, $V \in \mathbb{N}$, такие что $2 \leqslant V \leqslant R$. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для любой конечной независимой системы жертв $S(R, V-1)$ существует коллектив хищников $K_5(R, V)$, который, для любого натурального l, стартуя из любого канонического расположения в $L_5(l)$, ловит систему жертв $S(R, V-1)$ при любом их начальном расположении в $L_5(l)$.*

Теорема 2. *Для любого конечного коллектива хищников $K(R, V)$ существует натуральное число l, такое, что для любого начального расположения хищников в $L_5(l)$, существуют независимая система жертв $S(1, 1)$ и их начальное расположение в $L_5(l)$, при котором все они убегают от хищников.*

2. Вспомогательные утверждения

Множества $\{(x, y) \,|\, y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l+1\}$, $\{(x, y) \,|\, y = l+1,\ 0 \leqslant x \leqslant l+1\}$, $\{(x, y) \,|\, x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant l+1\}$ и $\{(x, y) \,|\, x = l+1,\ 0 \leqslant y \leqslant l+1\}$ назовем соответственно, *нижним*, *верхним*, *левым* и *правым бортами* лабиринта $L_5(l)$. Клетки $(0, 0)$, $(l+1, 0)$, $(0, l+1)$ и $(l+1, l+1)$ назовем, соответственно, *нижним левым углом*, *нижним правым*, *верхним левым* и *верхним правым углами* лабиринта $L_5(l)$.

Будем говорить, что *автомат $\mathcal{A}(R, V)$ видит некоторый борт лабиринта на расстоянии h* ($h \in \mathbb{N}$, $h \leqslant R$), если хотя бы одна клетка этого борта находится в h-окрестности клетки, в которой находится

$\mathcal{A}$, причем ни одна клетка этого борта не находится в $(h-1)$-окрестности клетки, в которой находится $\mathcal{A}$. Если существует $h \in \mathbb{N},\ h \leqslant R$, такое, что автомат $\mathcal{A}$ видит некоторый борт лабиринта на расстоянии h, будем говорить, что $\mathcal{A}$ *видит* этот борт.

Аналогично определяются ситуации, в которых будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_1$ видит автомат $\mathcal{A}_2$ на расстоянии h $(h \leqslant R)$, или $\mathcal{A}_1$ видит автомат $\mathcal{A}_2$.

Будем говорить, что *автомат $\mathcal{A}$ видит угол лабиринта*, если $\mathcal{A}$ видит оба борта, которым принадлежит данный угол.

Пусть автомат $\mathcal{A}$ перемещается в лабиринте $L_5(l)$ и его выходные символы в такты $\tau_1, \tau_1+1, \ldots, \tau_2$ равны $\overline{b}_{\tau_1}, \overline{b}_{\tau_1+1}, \ldots, \overline{b}_{\tau_2}$, соответственно. *Вектором перемещения* (или просто *перемещением*) *автомата $\mathcal{A}$ за промежуток времени* $[\tau_1, \tau_2]$ называется вектор $\vec{s} = \overline{b}_{\tau_1} + \overline{b}_{\tau_1+1} + \ldots + \overline{b}_{\tau_2}$. Пусть вектор $\vec{s}$ имеет координаты s_1 и s_2 $(\vec{s} = (s_1, s_2))$. Положим $|\vec{s}| = |s_1| + |s_2|$.

Если существует $d \in \mathbb{N}$, такое что, для любого $\tau_0 \in \mathbb{N}_0$, перемещение автомата $\mathcal{A}$ за промежуток времени $[\tau_0, \tau_0 + d]$ равно 0, будем говорить, что траектория автомата $\mathcal{A}$ — *периодическая.* Наименьшее d, удовлетворяющее этому условию, назовем *периодом* траектории автомата $\mathcal{A}$.

Определим схему функционирования системы автоматов так же, как в работе [6]. *Схема функционирования системы автоматов* это набор записей следующего вида. Первая запись содержит пары вида (наименование автомата, внутренний алфавит) для каждого автомата системы. Например,

1) $(U_1, \{q_1, q_2\})$, $(U_2, \{q\})$.

Остальные записи содержат наименование автомата (например, U_1), условия, в которых он может находиться, и его поведение в этих условиях (между условиями и поведением автомата ставится разделяющий символ $\to$). Условия — это некоторое подмножество декартова произведения внутреннего и входного алфавитов U_1. Поведение — это элемент декартова произведения внутреннего и выходного алфавитов U_1. Такая запись означает, что автомат U_1 в данном состоянии, получив данный входной символ, перейдет в соответствующее следующее состояние и выдаст соответствующий выходной символ. Если для какого-то автомата нет записи, соответствующей некоторым условиям, в которых он может находиться, подразумевается, что в этих условиях автомат не меняет состояние и стоит на месте. Например,

2) U_1, (q_1), $\to (q_2, (1, 0))$.

3) U_1, (q_2), $\to (q_1, (-1, 0))$.

Схема функционирования из строк 1)–3) задает систему автоматов (U_1, U_2), такую что U_1 в четные такты делает шаг вправо, а в нечетные — шаг влево, а U_2 стоит на месте. Как в этом примере, везде далее в случае, когда берется декартово произведение собственного подмножества внутреннего алфавита на входной алфавит, или декартово произведение собственного подмножества входного алфавита на внутренний алфавит, в схеме функционирования указывается только собственное подмножество. Схема функционирования системы автоматов корректна, если для каждого автомата каждый элемент декартова произведения его внутреннего и входного алфавитов встречается не более чем в одной записи. Корректно записанная схема функционирования однозначно задает систему автоматов. Если в первой строке схемы функционирования системы автоматов алфавиты автоматов заданы при помощи перечисления, то, если не оговорено противное, начальным состоянием каждого автомата является первый (в порядке перечисления) символ его внутреннего алфавита.

Пусть даны системы автоматов $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m) = (W_1, \ldots, W_m)(R, V)$ и $(\mathcal{A}_{m+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m+n}) = (U_1, \ldots, U_n)(R', V')$, и заданы расположения этих автоматов в лабиринте $L_5(l)$ и их состояния в текущий момент $(2\tau + 1)$ и предыдущий момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$. Введем следующие предикаты.

1) $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $(2\tau + 1)$ находится в h-окрестности $\mathcal{A}_i$, 0 — иначе.

2) $P'_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, q)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $(2\tau + 1)$ находится в h-окрестности $\mathcal{A}_i$, и $\mathcal{A}_j$ находится в состоянии q, и 0 — иначе.

3) $P''_h(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если существует натуральное число k, такое что $m + 1 \leqslant k \leqslant m + n$ и $\mathcal{A}_k$ находился в h-окрестности $\mathcal{A}_i$ хотя бы в один из моментов $\{\, 2\tau,\ (2\tau + 1)\,\}$, и $P''_h(\mathcal{A}_i) = 0$ — иначе.

4) $P^1_{bort}(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если $\mathcal{A}_i$ в момент $(2\tau+1)$ видит нижний борт на расстоянии 1 от себя, и 0 — иначе.

5) $P^2_{bort}(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если $\mathcal{A}_i$ в момент $(2\tau+1)$ видит левый борт на расстоянии 1 от себя, и 0 — иначе.

6) $P^3_{bort}(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если $\mathcal{A}_i$ в момент $(2\tau+1)$ видит верхний борт на расстоянии 1 от себя, и 0 — иначе.

7) $P^4_{bort}(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если $\mathcal{A}_i$ в момент $(2\tau+1)$ видит правый борт на расстоянии 1 от себя, и 0 — иначе.

При любых $h = 0, \ldots, R$, $i, j = 1, \ldots, m$, $q \in Q_j$ (Q_j — внутренний алфавит $\mathcal{A}_j$), входной символ автомата $\mathcal{A}_i$ однозначно определяет значение предикатов $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$, $P'_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, q)$, $P''_h(\mathcal{A}_i)$, $P^1_{bort}(\mathcal{A}_i)$, $P^2_{bort}(\mathcal{A}_i)$, $P^3_{bort}(\mathcal{A}_i)$ и $P^4_{bort}(\mathcal{A}_i)$. То есть каждый хищник $\mathcal{A}_i$ в каждый момент хода «знает» значение этих предикатов.

Если $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = 1$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит* $\mathcal{A}_j$ *в своей h-окрестности* (при $h = R$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит* $\mathcal{A}_j$). Если $P''_h(\mathcal{A}_i) = 1$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит жертв в своей h-окрестности* (при $h = R$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит жертв*).

Будем говорить, что клетка (x, y) *расположена правее* клетки (x', y'), если $x - x' > 0$, и будем говорить, что клетка (x, y) *расположена левее* клетки (x', y'), если $x - x' < 0$. Аналогично, будем говорить, что клетка (x, y) *расположена выше* клетки (x', y'), если $y - y' > 0$, и будем говорить, что клетка (x, y) *расположена ниже* клетки (x', y'), если $y - y' < 0$.

Клетка (x_2, y_2) называется *ближайшей к клетке* (x_1, y_1) *клеткой V-окрестности* (x_0, y_0), если $(x_2, y_2) \in D_{(x_0,y_0),V}$, и для любой клетки (x_3, y_3) из $D_{(x_0,y_0),V}$ выполнено $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leqslant |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1|$, причем (x_2, y_2) является самой верхней среди самых правых клеток, удовлетворяющих данному набору неравенств. Легко видеть, что для любого лабиринта $L = L_5(l)$ верно, что если клетки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) принадлежат L, то и клетка (x_2, y_2) принадлежит L. Будем говорить, что автомат $\mathcal{A}(R, V)$, находящийся в клетке (x_0, y_0), сделал *ход к клетке* (x_1, y_1), если он за один такт переместился в клетку (x_2, y_2) — ближайшую к клетке (x_1, y_1) клетку V-окрестности (x_0, y_0).

Если τ_j — наименьший такт, начиная с которого автомат $\mathcal{A}_j$ не меняет состояния и его выходная последовательность (с такта τ_j) состоит из нулевых векторов, будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_j$ остановился в такт τ_j.

Состояние автомата назовем *финальным*, если, попав в это состояние, автомат останавливается (при любых входных символах). Пусть дан автомат $\mathcal{A}_1$ с начальными состояниями $q_0^1, \ldots, q_0^k$ и автомат $\mathcal{A}_2$. В данной работе будем рассматривать только автоматы с одним начальным состоянием. *Композицией автоматов* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ называется автомат с начальными состояниями $q_0^1, \ldots, q_0^k$, диаграмма Мура которого получена из объединения диаграмм Мура автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ отождествлением (склеиванием) каждого финального состояния автомата $\mathcal{A}_1$ с начальным состоянием $\mathcal{A}_2$.

Запись $\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}$ означает, что строится автомат $\mathcal{A}$, равный композиции автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Пусть коллектив или независимая система автоматов $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)(R, V)$ перемещается в l-квадрате $L_5(l)$ так, что никакие другие автоматы не попадают в зону обзора ни одного из автоматов $\mathcal{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Пусть автомат $\mathcal{A}_i$ имеет n_i состояний. Верно следущее утверждение.

Лемма 1. *Каждый автомат* $\mathcal{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *имеет периодическую траекторию с периодом* d *и предпериодом* d_0*, такими, что* $d_0 + d \leqslant n_1 \cdot \ldots \cdot n_m \cdot l^{2m}$.

Доказательство. Поскольку автоматы $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ не видят других автоматов (возможно, перемещающихся в этом l-квадрате), расположение и поведение других автоматов не влияет на автоматы $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$. Не позднее чем через $n_1 \cdot \ldots \cdot n_m \cdot l^{2m}$ тактов после начала функционирования наступит такт τ_1, когда каждый из автоматов $\mathcal{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ окажется в том же состоянии и в той же клетке лабиринта, в которой он уже находился в некоторый такт τ_0, $\tau_0 < \tau_1$. Причем такт τ_0 — один и тот же, для всех автоматов $\mathcal{A}_i$. После этого, перемещения и смена состояний автоматов $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ будут периодически повторяться. Очевидно, $d_0 + d \leqslant n_1 \cdot \ldots \cdot n_m \cdot l^{2m}$. Лемма доказана.

Пусть коллектив хищников $(W_1, \ldots, W_m)(R, V)$ преследует автомат-жертву в l-квадрате $L_5(l)$, разбитом на k^2 квадратов со стороной s клеток каждый, где $s = 3 \cdot c_R \cdot m$, $c_R = (R+1)^2 + R^2$. То есть $l = k \cdot s$. Квадрат, самая нижняя левая клетка которого имеет координаты $(1 + i_1 \cdot s, 1 + i_2 \cdot s)$, будем нумеровать как (i_1, i_2). Пусть (i_1, i_2) и (i_3, i_4) — разные квадраты. Положим, по определению

$$\Delta\tau = \Delta\tau(i_1, i_2, i_3, i_4) = (|i_3 - i_1| + |i_4 - i_2|) \cdot s,$$
$$\tau_1 = \tau_1(i_1, i_2, i_3, i_4) = \tau_0 + 2 \cdot (\Delta\tau + s).$$

Если жертва U в некоторый момент оказалась в r-окрестности W_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$, будем говорить, что коллектив хищников *обнаружил* ее. Будем также говорить, что W_j обнаружил U. Наименьший момент, в который это произошло, будем называть моментом обнаружения.

Лемма 2. *Для любого натурального τ_0, для любых различных квадратов (i_1, i_2) и (i_3, i_4), таких что в такты с τ_0 по τ_1 хищники не увидят ни одной клетки, принадлежащей квадрату (i_1, i_2) или квадрату (i_3, i_4), для любой клетки (x_0, y_0) на границе квадрата (i_1, i_2) существует автомат-жертва $U(1,1) = U^{\tau_0,(x_0,y_0)}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$, который, стартуя в такт τ_0 из клетки (x_0, y_0), не позднее такта τ_1 остановится в одной из граничных клеток квадрата (i_3, i_4), причем за время с такта τ_0 до такта τ_1 его не обнаружит ни один хищник.*

Доказательство. В зависимости от взаимного расположения квадратов (i_1, i_2) и (i_3, i_4) определим для каждого из этих квадратов сторону, ближайшую к другому квадрату. Положим по определению так.

1) $i_1 = i_3$, $i_2 > i_4$, — нижняя сторона (i_1, i_2) — ближайшая к квадрату (i_3, i_4);
   верхняя сторона (i_3, i_4) — ближайшая к квадрату (i_1, i_2).
2) $i_1 = i_3$, $i_2 < i_4$, — верхняя сторона (i_1, i_2) — ближайшая к квадрату (i_3, i_4);
   нижняя сторона (i_3, i_4) — ближайшая к квадрату (i_1, i_2).
3) $i_2 = i_4$, $i_1 > i_3$, — левая сторона (i_1, i_2) — ближайшая к квадрату (i_3, i_4);
   правая сторона (i_3, i_4) — ближайшая к квадрату (i_1, i_2).

4) $i_2 = i_4$, $i_1 < i_3$, — правая сторона (i_1, i_2) — ближайшая к квадрату (i_3, i_4);
левая сторона (i_3, i_4) — ближайшая к квадрату (i_1, i_2).

5) $i_1 > i_3$, $i_2 > i_4$, — нижняя сторона (i_1, i_2) — ближайшая к квадрату (i_3, i_4);
правая сторона (i_3, i_4) — ближайшая к квадрату (i_1, i_2).

6) $i_1 > i_3$, $i_2 < i_4$, — верхняя сторона (i_1, i_2) — ближайшая к квадрату (i_3, i_4);
правая сторона (i_3, i_4) — ближайшая к квадрату (i_1, i_2).

7) $i_1 < i_3$, $i_2 > i_4$, — нижняя сторона (i_1, i_2) — ближайшая к квадрату (i_3, i_4);
левая сторона (i_3, i_4) — ближайшая к квадрату (i_1, i_2).

8) $i_1 < i_3$, $i_2 < i_4$, — верхняя сторона (i_1, i_2) — ближайшая к квадрату (i_3, i_4);
левая сторона (i_3, i_4) — ближайшая к квадрату (i_1, i_2).

Для различных клеток (x, y) и (x', y'), принадлежащих квадрату (i_1, i_2), определим автомат $U_{(x,y)}^{(x',y')}(1, 1)$, который, стартуя из клетки (x, y), перемещается в клетку (x', y') за $|x-x'|+|y-y'|$ тактов, затем, стоя на месте, отсчитывает еще $(2 \cdot s - (\,|x - x'| + |y - y'|\,))$ тактов и переходит в финальное состояние. Этот автомат сначала смещается в нужную сторону на $|y-y'|$ клеток по вертикали, а затем — на $|x-x'|$ клеток по горизонтали. Легко видеть, что этот автомат не выходит за пределы квадрата (i_1, i_2).

Для любого $j = 0 \ldots, (\Delta\tau - 1)$ и произвольной клетки (x', y'), лежащей на стороне квадрата (i_1, i_2), ближайшей к квадрату (i_3, i_4) определим автомат $\mathcal{A}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}^{j,(x',y')}(1, 1)$. Рассмотрим возможные 8 возможных случаев взаимного расположения квадратов (i_1, i_2) и (i_3, i_4), описанные выше. Положим по определению так.

1) $i_1 = i_3$, $i_2 > i_4$, — $(x', y') = (1 + i_1 \cdot s + p,\ 1 + i_2 \cdot s)$,
$(x'', y'') = (1 + i_1 \cdot s + p,\ (i_4 + 1) \cdot s)$.

2) $i_1 = i_3$, $i_2 < i_4$, — $(x', y') = (1 + i_1 \cdot s + p,\ (i_2 + 1) \cdot s)$,
$(x'', y'') = (1 + i_1 \cdot s + p,\ 1 + i_4 \cdot s)$.

3) $i_2 = i_4$, $i_1 > i_3$, — $(x', y') = (1 + i_1 \cdot s,\ 1 + i_2 \cdot s + p)$,

$(x'', y'') = ((i_3 + 1) \cdot s,\ 1 + i_2 \cdot s + p)$.

4) $i_2 = i_4$, $i_1 < i_3$, — $(x', y') = ((i_1 + 1) \cdot s,\ 1 + i_2 \cdot s + p)$, $(x'', y'') = (1 + i_3 \cdot s,\ 1 + i_2 \cdot s + p)$.
5) $i_1 > i_3$, $i_2 > i_4$, — $(x', y') = (1 + i_1 \cdot s + p,\ 1 + i_2 \cdot s)$, $(x'', y'') = ((i_3 + 1) \cdot s,\ 1 + i_4 \cdot s + p)$.
6) $i_1 > i_3$, $i_2 < i_4$, — $(x', y') = (1 + i_1 \cdot s + p,\ (i_2 + 1) \cdot s)$, $(x'', y'') = ((i_3 + 1) \cdot s,\ 1 + i_4 \cdot s + p)$.
7) $i_1 < i_3$, $i_2 > i_4$, — $(x', y') = (1 + i_1 \cdot s + p,\ 1 + i_2 \cdot s)$, $(x'', y'') = (1 + i_3 \cdot s,\ 1 + i_4 \cdot s + p)$.
8) $i_1 < i_3$, $i_2 < i_4$, — $(x', y') = (1 + i_1 \cdot s + p,\ (i_2 + 1) \cdot s)$, $(x'', y'') = (1 + i_3 \cdot s,\ 1 + i_4 \cdot s + p)$.

Здесь $p \in \mathbb{N}_0$ — произвольное число от 0 до $(s - 1)$. Таким образом клетка (x'', y'') лежит на стороне квадрата (i_3, i_4), ближайшей к квадрату (i_1, i_2).

Автомат $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$, стартуя из клетки (x', y'), сначала стоит на месте j тактов, затем двигается в клетку (x'', y'') следующим образом, зависящим от взаимного расположения квадратов (i_1, i_2) и (i_3, i_4).

1) $i_1 = i_3$, $i_2 > i_4$, — $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ идет на $((i_2 - i_4) \cdot (s - 1) + 1)$ клеток вниз, затем останавливается.
2) $i_1 = i_3$, $i_2 < i_4$, — $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ идет на $((i_4 - i_2) \cdot (s - 1) + 1)$ клеток вверх, затем останавливается.
3) $i_2 = i_4$, $i_1 > i_3$, — $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ идет на $((i_1 - i_3) \cdot (s - 1) + 1)$ клеток влево, затем останавливается.
4) $i_2 = i_4$, $i_1 < i_3$, — $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ идет на $((i_3 - i_1) \cdot (s - 1) + 1)$ клеток вправо, затем останавливается.
5) $i_1 > i_3$, $i_2 > i_4$, — $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ идет на $((i_2 - i_4) \cdot (s - 1) + p + 1)$ клеток вниз, затем на $((i_1 - i_3) \cdot (s - 1) + p + 1)$ клеток влево, затем останавливается.
6) $i_1 > i_3$, $i_2 < i_4$, — $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ идет на $((i_4 - i_2) \cdot (s - 1) + p + 1)$ клеток вверх, затем на $((i_1 - i_3) \cdot (s - 1) + p + 1)$ клеток влево, затем останавливается.

7) $i_1 < i_3$, $i_2 > i_4$, — $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ идет на $((i_2 - i_4) \cdot (s-1) + p + 1)$ клеток вниз, затем на $((i_3 - i_1) \cdot (s-1) + p + 1)$ клеток вправо, затем останавливается.
8) $i_1 < i_3$, $i_2 < i_4$, — $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ идет на $((i_4 - i_2) \cdot (s-1) + p + 1)$ клеток вверх, затем на $((i_3 - i_1) \cdot (s-1) + p + 1)$ клеток вправо, затем останавливается.

Таким образом определен автомат $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$, который, стартуя из клетки (x', y'), не позднее чем за $(\Delta\tau + (|i_1 - i_3| + |i_2 - i_4|) \cdot s) = 2 \cdot \Delta\tau$ тактов перемещается в клетку, находящуюся на границе квадрата (i_3, i_4), и останавливается. Легко видеть, что эти перемещения осуществимы в пределах l-квадрата. Поскольку при фиксированных квадратах (i_1, i_2) и (i_3, i_4) клетка (x', y') однозначно определяется введенным выше параметром p (будем обозначать эту клетку как $(x', y')(p)$), будем далее обозначать автомат $\mathcal{A}^{j,(x',y')}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ как $\mathcal{A}^{j,p}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$.

Положим $U^{(x',y')(p)}_{(x_0,y_0)} \circ \mathcal{A}^{j,p}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)} \to U^{(x_0,y_0),j,p}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}(1,1)$. Этот автомат, стартуя из клетки (x_0, y_0), не позднее чем за $2 \cdot (\Delta\tau + s)$ тактов перемещается в клетку, находящуюся на границе квадрата (i_3, i_4), и останавливается.

Рассмотрим множество (независимую систему) автоматов-жертв $\mathcal{M} = \{U^{(x_0,y_0),j,p}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)} \,|\, j = 0 \ldots, \Delta\tau - 1,\ p = 0, \ldots, (s-1)\}$. Пусть в такт τ_0 каждый автомат $U^{(x_0,y_0),j,p}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ стартовал из клетки $(x', y')(p)$. Легко видеть, что за пределами квадратов (i_1, i_2) и (i_3, i_4) все автоматы из рассматриваемого множества в любой такт времени находятся в попарно различных клетках. По условию леммы, за интервал времени $[\tau_0, \tau_1]$ хищники не видят ни одной клетки внутри квадратов (i_1, i_2) и (i_3, i_4). Из построения автоматов $U^{(x',y')(p)}_{(x_0,y_0)}$ видно, что автоматы из множества $\mathcal{M}$ не покидают квадрат (i_1, i_2) раньше чем в такт $(\tau_0 + 2 \cdot s)$. Так как размер зоны обзора каждого хищника равен $c_R = (R+1)^2 + R^2$, количество клеток, которое способны увидеть хищники за оставшиеся $(\tau_1 - \tau_0 - 2 \cdot s)$ тактов не превосходит $c_R \cdot m \cdot (\tau_1 - \tau_0 - 2 \cdot s) = c_R \cdot m \cdot 2 \cdot \Delta\tau = \frac{2}{3} s \cdot \Delta\tau$. При этом вне квадратов (i_1, i_2) и (i_3, i_4) в каждой клетке находится не более одного автомата из $\mathcal{M}$. Следовательно, количество автоматов из $\mathcal{M}$, которое способны обнаружить хищники за интервал времени $[\tau_0, \tau_1]$ не превосходит $\frac{2}{3}s \cdot \Delta\tau < \Delta\tau \cdot s$. То есть хищниками будут обнаружены не все автоматы из $\mathcal{M}$. Произвольный автомат из $\mathcal{M}$, который не будет обнаружен хищниками обозначим $U^{\tau_0,(x_0,y_0)}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$. Он удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть дана конечная независимая система жертв $S(R, V-1)$. Среди всех автоматов системы S рассмотрим автомат с наибольшим числом состояний. Обозначим его число состояний как M. Приведем схему функционирования коллектива $K_5 = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$.

1) $(\mathcal{A}_1, \{q_1^1, q_2^1, q_3^1\} \times \{1, \dots, M\} \times \{0, 1\}), (\mathcal{A}_2, \{q_1^2, q_2^2, q_3^2\})$

Каждый из автоматов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, увидев какую-либо жертву, преследует ближайшую к нему жертву (то есть находящуюся от него на минимальном расстоянии, если таких жертв несколько, выбирается самая нижняя среди самых правых).

2) $\mathcal{A}_1$, $(\,(q_i^1, j, k), (P''_R(\mathcal{A}_1) = 1)\,)$, $\to$ $(\,(q_i^1, j, k), (v_1, v_2)\,)$, где $i = 1, 2, 3$, $k = 0, 1$, $j = 1, \dots, M$, (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}_1$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

3) $\mathcal{A}_2$, $(\,q_i^2, (P''_R(\mathcal{A}_2) = 1)\,)$, $\to$ $(\,q_i^2, (v_1, v_2)\,)$, где $i = 1, 2, 3$, (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}_1$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

Легко видеть, что если некоторая жертва была обнаружена, то не позднее, чем через $R - V$ тактов некоторая жертва будет поймана.

Не видя жертв, автомат $\mathcal{A}_1$ перемещается один раз в M тактов, многократно обходя l-квадрат (каждый обход совершается за $M \cdot (l^2 + l - 2)$ тактов). При этом, если автомат $\mathcal{A}_1$ встретил $\mathcal{A}_2$ в момент, когда первая компонента состояния $\mathcal{A}_1$ равна q_1^1 или q_2^1, а последняя компонента равна 1, то последняя компонента состояния $\mathcal{A}_1$ обнуляется. Когда обход квадрата завершен, последняя компонента состояния $\mathcal{A}_1$ снова устанавливается равной 1 (случай, когда $\mathcal{A}_2$ находится в верхнем левом или верхнем правом углу обрабатывается отдельно, см. схему функционирования).

4) $\mathcal{A}_1, (\,(q_i^1, j, k), (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0)\,), \to (\,(q_i^1,\ j{+}1,\ k), (0,0)\,)$, где $i = 1,2,3$, $j = 1, \ldots, (M-1)$, $k = 0,1$.

5) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_1^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 0))\,), \to (\,(q_1^1,\ 1,\ k), (0,-1)\,)$, где $k = 0,1$.

6) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_1^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 0))\,), \to (\,(q_1^1,\ 1,\ 0), (0,-1)\,)$, где $k = 0,1$.

7) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_1^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^4(\mathcal{A}_1) = 0))\,), \to (\,(q_2^1,\ 1,\ k),\ (1,0)\,)$, где $k = 0,1$.

8) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_1^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^4(\mathcal{A}_1) = 0))\,), \to (\,(q_2^1,\ 1,\ 0),\ (1,0)\,)$, где $k = 0,1$.

9) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_2^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^3(\mathcal{A}_1) = 0))\,), \to (\,(q_2^1,\ 1,\ k),\ (0,1)\,)$, где $k = 0,1$.

10) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_2^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^3(\mathcal{A}_1) = 0))\,), \to (\,(q_2^1,\ 1,\ 0),\ (0,1)\,)$, где $k = 0,1$.

11) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_2^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^3(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^4(\mathcal{A}_1) = 0))\,), \to (\,(q_1^1,\ 1,\ k),\ (1,0)\,)$, где $k = 0,1$.

12) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_2^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^3(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^4(\mathcal{A}_1) = 0))\,), \to (\,(q_1^1,\ 1,\ 0),\ (1,0)\,)$, где $k = 0,1$.

13) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_1^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^4(\mathcal{A}_1) = 1))\,), \to (\,(q_3^1,\ 1,\ k),\ (0,0)\,)$, где $k = 0,1$.

14) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_1^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^4(\mathcal{A}_1) = 1))\,), \to (\,(q_3^1,\ 1,\ 0),\ (0,0)\,)$, где $k = 0,1$.

15) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_2^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^3(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^4(\mathcal{A}_1) = 1))\,), \to (\,(q_3^1,\ 1,\ k), (0,0)\,)$, где $k = 0,1$.

16) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_2^1, M, k), ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^3(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^4(\mathcal{A}_1) = 1))\,), \to (\,(q_3^1,\ 1,\ 0), (0,0)\,)$, где $k = 0,1$.

17) $\mathcal{A}_1,\ (\,(q_3^1, M, k), (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^2(\mathcal{A}_1) = 0)\,),\ \to (\,(q_3^1,\ 1,\ k), (-1,0)\,)$, где $k = 0,1$.

18) $\mathcal{A}_1, (\,(q_3^1, M, k), ((P_0'(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, q_3^2) = 0) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^2(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1))\,), \to (\,(q_2^1,\ 1,\ 1), (0,0)\,)$, где $k = 0,1$.

19) $\mathcal{A}_1, (\,(q_3^1, M, k), ((P_0'(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, q_3^2) = 1) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_{bort}^2(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1))\,), \to (\,(q_2^1,\ 1,\ 0), (0,0)\,)$, где $k = 0,1$.

20) $\mathcal{A}_1$, $(\,(q_3^1, M, k), ((P_0'(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, q_3^2) = 0) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P^2_{bort}(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P^3_{bort}(\mathcal{A}_1) = 1))\,), \to (\,(q_1^1,\, 1,\, 1), (0,0)\,)$, где $k = 0, 1$.

21) $\mathcal{A}_1$, $(\,(q_3^1, M, k), ((P_0'(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, q_3^2) = 1) \wedge (P_R''(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P^2_{bort}(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P^3_{bort}(\mathcal{A}_1) = 1))\,), \to (\,(q_1^1,\, 1,\, 0), (0,0)\,)$, где $k = 0, 1$.

Автомат $\mathcal{A}_2$ в состоянии q_3^2 перемещается так же, как автомат $\mathcal{A}_1$ в состоянии q_3^1, то есть справа налево. Если $\mathcal{A}_2$ в других состояниях не видит жертв, он перемещается только тогда, когда в одной клетке с ним находится автомат $\mathcal{A}_1$ в состоянии $(q_i^1, M, 1)$ или $(q_2^1, M, 1)$. При этом $\mathcal{A}_2$ перемещается также многократно обходя l-квадрат (каждый обход совершается за $M \cdot (l^2 + l - 2) \cdot (l^2 - 1) + (l - 1)$ тактов).

22) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_i^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, (q_1^1, M, 1)) = 0)\,), \to (\, q_i^2, (0,0)\,)$, где $i = 1, 2$.

23) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_1^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, (q_1^1, M, 1)) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0)\,), \to (\, q_1^2, (0, -1)\,)$.

24) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_1^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, (q_1^1, M, 1)) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P^4_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0)\,), \to (\, q_2^2, (1, 0)\,)$.

25) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_2^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, (q_1^1, M, 1)) = 1) \wedge (P^3_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0)\,), \to (\, q_2^2, (0, 1)\,)$.

26) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_2^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, (q_1^1, M, 1)) = 1) \wedge (P^3_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P^4_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0)\,), \to (\, q_1^2, (1, 0)\,)$.

27) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_1^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, (q_1^1, M, 1)) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P^4_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1)\,), \to (\, q_3^2, (0, 0)\,)$.

28) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_2^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, (q_1^1, M, 1)) = 1) \wedge (P^3_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P^4_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1)\,), \to (\, q_3^2, (0, 0)\,)$.

29) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_3^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P^2_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0)\,), \to (\, q_3^2, (-1, 0)\,)$.

30) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_3^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P^2_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1)\,), \to (\, q_2^2, (0, 0)\,)$.

31) $\mathcal{A}_2$, $(\, q_3^2, (P_R''(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P^2_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P^3_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1)\,), \to (\, q_1^2, (0, 0)\,)$.

Покажем, что определенный таким образом коллектив удовлетворяет условию теоремы. По лемме 1, каждый автомат-«жертва» из системы S до того, как он будет обнаружен каким либо хищником, имеет в l-квадрате периодическую траекторию с периодом не более

$M \cdot l^2$. Так как $R \geqslant 2$, при $l \leqslant 2$ утверждение леммы тривиально. При $l > 2$ выполнено неравенство $M \cdot l^2 \leqslant M \cdot (l^2 + l - 3)$. По построению коллектива K_5, если автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не видят ни одну из жертв, то $\mathcal{A}_2$ будет обходить l-квадрат, причем $\mathcal{A}_2$ побывает в каждой клетке в одном из состояний q_1^2, q_2^2, стоя в этой клетке в течении как минимум $M \cdot (l^2 + l - 3) - 1$ тактов. Величина $(l^2 + l - 3)$ возникает из-за того, что $\mathcal{A}_2$ может сместиться не в ту клетку, куда смещается $\mathcal{A}_1$, а выше, ниже, либо правее. Если автомат $\mathcal{A}_2$ окажется на траектории одной из жертв (а это обязательно произойдет, так как $\mathcal{A}_2$ обходит весь l-квадрат), то он обнаружит эту жертву, если не обнаружит ни какой жертвы ранее, поскольку период этой жертвы не превосходит $M \cdot (l^2 + l - 3)$. Следовательно, пока пойманы не все жертвы, обнаружение жертв будет происходить не реже одного раза за обход автоматом $\mathcal{A}_2$ всего l-квадрата. Не позднее, чем через $(R - V)$ тактов после обнаружения какой-либо жертвы некоторая жертва будет поймана. Таким образом будут пойманы все жертвы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть дан коллектив хищников $K(R, V) = (W_1, \ldots, W_m)$. Пусть размер внутреннего алфавита W_i равен n_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Положим $c_R = (R+1)^2 + R^2$, $s = 3 \cdot c_R \cdot m$, $b = 288 \cdot s^2 \cdot c_R$, $a = 150 \cdot s^2 \cdot c_R$, $k = \left]\sqrt{2 \cdot (b+1) \cdot c_R + 4}\right[$, $l = k \cdot s$, $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m \cdot l^{2m}$. Заметим, что $c_R > 1$, $s > 1$, $\sqrt{b \cdot c_R} > 17$, $k < 2 \cdot \left]\sqrt{(b+1) \cdot c_R}\right[$, $(k+1) < 2 \cdot \sqrt{(b+1) \cdot c_R} + 3 < 4 \cdot \sqrt{(b+1) \cdot c_R} \leqslant 68 \cdot s \cdot c_R$. Откуда выводим

$$2 \cdot s \cdot (k+1) < 136 \cdot s^2 \cdot c_R < a < b - 2 \cdot s \cdot (k+1). \qquad (4)$$

Рассмотрим преследование данным коллективом хищников жертв в l-квадрате. Будем представлять себе l-квадрат, разбитым на k^2 квадратов со стороной s клеток каждый. Квадрат, самая нижняя левая клетка которого имеет координаты $(1 + i_1 \cdot s, 1 + i_2 \cdot s)$, будем нумеровать как (i_1, i_2).

Рассмотрим произвольный такт τ_0 и произвольную расстановку хищников в l-квадрате в такт τ_0. Так как размер зоны обзора каждого хищника равен c_R, количество клеток, которое способны увидеть хищники за интервал времени $[\tau_0, \tau_0 + b]$ не превосходит $(b+1) \cdot c_R$.

Значит, и количество квадратов, клетки из которых хищники увидят за промежуток времени $[\tau_0, \tau_0 + b]$ не превосходит $(b+1) \cdot c_R$.

Легко видеть, что для любого квадрата (i_1, i_2) количество квадратов (i_3, i_4), таких что $|i_3 - i_1| + |i_4 - i_2| \leqslant (k-1)$ не меньше $\left]\frac{k^2}{2}\right[\geqslant (b+1) \cdot c_R + 2$. Таким образом, для любого квадрата (i_1, i_2) существует квадрат (i_3, i_4), отличный от (i_1, i_2), такой что $|i_3 - i_1| + |i_4 - i_2| \leqslant (k-1)$, и ни одну клетку квадрата (i_3, i_4) хищники не увидят за промежуток времени $[\tau_0, \tau_0 + b]$.

Так как $(a+1) \cdot c_R < k^2$, существует квадрат (i_1, i_2), клетки из которого хищники не увидят за промежуток времени $[\tau_0, \tau_0 + a]$. Выберем для этого квадрата (i_1, i_2) квадрат (i_3, i_4) так, как указано в предыдущем абзаце. Фиксируем произвольную клетку (x_0, y_0) на границе квадрата (i_1, i_2). Рассмотрим автомат-жертву $U^{\tau_0,(x_0,y_0)}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}(1,1)$, построенный в лемме 2, который, стартуя в такт τ_0 из клетки (x_0, y_0), в некоторый такт τ_1 остановится в клетке (x'', y'') — граничной клетке квадрата (i_3, i_4). При этом, $2 \leqslant (\tau_1 - \tau_0) \leqslant 2 \cdot ((|i_3 - i_1| + |i_4 - i_2|) \cdot s + s) \leqslant 2 \cdot s \cdot (k+1)$. Учитывая (4), получаем

$$(\tau_1 - \tau_0) < a < b - (\tau_1 - \tau_0). \tag{5}$$

Это означает, во-первых, что автомат-жертва $U^{\tau_0,(x_0,y_0)}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ переместится в из квадрата (i_1, i_2) в квадрат (i_3, i_4) раньше, чем хищники увидят какую-либо из клеток квадратов (i_1, i_2) или (i_3, i_4), то есть лемма 2 здесь применима, и по этой лемме автомат-жертва $U^{\tau_0,(x_0,y_0)}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ за время с такта τ_0 до такта τ_1 не будет обнаружен хищниками. И, во вторых, неравенство (5) означает, что ни одну клетку квадрата (i_3, i_4) хищники не увидят за промежуток времени $[\tau_1, \tau_1 + a]$.

Обозначим автомат-жертву $U^{\tau_0,(x_0,y_0)}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$ как U_1. Переобозначим квадрат (i_3, i_4) как (i_1, i_2), клетку (x'', y'') — как (x_0, y_0), τ_1 — как τ_0. Снова выберем для нового (i_1, i_2) квадрат (i_3, i_4) и применим лемму 2. Получим автомат $U^{\tau_0,(x_0,y_0)}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$. Положим $U_1 \circ U^{\tau_0,(x_0,y_0)}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)} \to U_2$. Повторим это построение n раз. Так как на каждом шаге $(\tau_1 - \tau_0) \geqslant 2$, полученный автомат-жертва $U_n(1,1)$ будет перемещаться в l-квадрате в течение не менее чем n тактов, не будучи пойманым. Из доказательства леммы 1, видно, что коллектив хищников K перемещается в l-квадрате периодически, с периодом, не превосходящим n. Продолжим построение, строя $U_n, U_{n+1}, \dots$ до тех пор, пока клетка (x_0, y_0), полученная при построении с номером i, не окажется той клеткой, которая уже выступала в роли (x_0, y_0) при некотором предыдущем построении с номером j ($j \leqslant i$), причем все хищники в такт τ_0 находятся в тех же клетках и в тех же состояниях, что и при построении с номером j. Полученный автомат-жертву обозначим как $U' = U_i$, где $i \leqslant n \cdot l^2$. Склеим финальное состояние U' с его состоянием, которое является начальным состоянием автомата $U^{\tau_0,(x_0,y_0)}_{(i_1,i_2),(i_3,i_4)}$, полученного при построении с номером j. Полученный автомат обозначим как $U(1,1)$. По лемме 1, система из m хищников и автомата-жертвы U перемещается в l-квадрате периодически. Автомат U, стартуя из клетки (x_0, y_0), соответствующей автомату U_1, по построению, не будет обнаружен хищниками в течение периода всей системы из $m+1$ автомата. Следовательно, U не будет обнаружен хищниками никогда, и, следовательно, он не будет ими пойман, то есть U убегает от K. Очевидно, что независимая система жертв $S(1,1)$, состоящая из произвольного конечного числа копий автомата $U(1,1)$, при начальном расположении всех автоматов в клетке (x_0, y_0), соответствующей автомату U_1, убегает от K. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М., Ижевск, 2004.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. Т. 15, вып. 2. 2003.

[4] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. Т. 15, вып. 3. 2003.

[5] Грунская В. И. О динамическом взаимодействии автоматов // в кн.: Математическая кибернетика и ее приложения к биологии. М.: МГУ, 1987. С. 8–18.

[6] Волков Н. Ю. Об автоматной модели преследования // Дискретная математика. Т. 19, вып. 2. 2007. С. 131–160.

[7] Волков Н. Ю. Об автоматной модели преследования в базовых плоских областях // Интеллектуальные системы. Т. 11, вып. 1–4. 2007. С. 361–402.