Моделирование плоского прямолинейного движения в однородной структуре

А. В. Розанов

В работе рассматривается задача моделирования равномерного прямолинейного движения с отражением от препятствий с помощью однородных структур. Вводится понятие дискретной траектории, устанавливается взаимно однозначное соответствие дискретных и непрерывных траекторий. Строится однородная структура, универсальная для широкого класса препятствий, и показывается, что для остальных препятствий существует бесконечное множество начальных условий движения, не допускающих моделирования.

Введение

Задача моделирования движения часто встречается в физике и механике, и решается с помощью непрерывной и континуальной математики, заданием скорости или координаты тела функцией, зависящей от аргумента t, имеющего физический смысл времени. Причем в общем случае параметр пробегает значения положительной вещественной оси.

В данной работе рассматривается новый способ решения данной задачи — моделирование равномерного и прямолинейного движения точки на плоскости при помощи клеточных автоматов. Выделяется особое возбужденное состояние клетки, которое соответствует движению: это состояние определенным образом наследуется другими клетками, то есть перемещается с течением времени от одной клетки к другой. При этом время в данной модели является дискретным, а не непрерывным.

В работе определяется пространство, в котором происходит движение, и явно предъявляется однородная структура, моделирующая некоторое движение. Изучаются свойства этой структуры, класс движений, которые она моделирует, некоторые свойства этого движения. Результатом изучения свойств этой структуры является утверждение о возможности моделирования широкого класса прямолинейных движений с простыми отражениями от вертикальных и горизонтальных препятствий с одной стороны, и утверждение о невозможности расширить класс движений.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю — научному сотруднику Галатенко А. В. за постановку задачи и помощь в работе.

1. Основные понятия и результаты

Формально клеточным автоматом([1, 2]) называется четверка $\sigma = (\mathbb{Z}^k,\ E_n,\ V, \varphi)$, где $\mathbb{Z}^k$ — множество всех k-мерных векторов с целочисленными координатами, E_n — конечное множество из n элементов. Без ограничения общности можно считать, что оно состоит из чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ — упорядоченный набор из m k-мерных ненулевых векторов из $\mathbb{Z}^k$. Функция $\varphi : (E_n)^{m+1} \mapsto E_n$, $\varphi(0, 0, \ldots, 0) = 0$, называется локальной функцией переходов. Элементы множества $\mathbb{Z}^k$ называются ячейками. Элементы множества E_n называются состояниями. При помощи шаблона соседства V каждой ячейке ставится в соответствие ее окрестность $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha + v_1, \alpha + v_2, \ldots, \alpha + v_m\}$.

Функции $g\colon \mathbb{Z}^k \mapsto E_n$ называются состояниями клеточного автомата, множество всех состояний обозначается через ${E_n}^{\mathbb{Z}^k}$. Основная функция переходов Φ задается как отображение множества всех состояний клеточного автомата $g \in {E_n}^{\mathbb{Z}^k}$ в себя, причем $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^k$, $g = \Phi(g')\colon g(\alpha) = \varphi(g'(\alpha), g'(\alpha + v_1), g'(\alpha + v_2), \ldots, g'(\alpha + v_m))$.

Функционирование клеточного автомата определяется как последовательность его состояний $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_i \in {E_n}^{\mathbb{Z}^k}$, получающаяся в результате применения основной функции переходов к некоторому его состоянию g_0, то есть $g_t = \Phi(g_{t-1}) = \Phi^t(g_0)$, $\forall t \in \mathbb{N}$.

Состояние клеточного автомата, в котором только конечное число ячеек находится в ненулевом состоянии, называется конфигурацией.

Далее будем рассматривать целочисленную плоскость $\mathbb{Z}^2$ и клеточные автоматы над $\mathbb{Z}^2$. Ячейкам однородной структуры естественным образом сопоставим клетки координатной решетки, а именно, каждой точке $v = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ сопоставим единственный квадрат, левый нижний угол которого имеет координаты (x, y). Фигурой назовем любое множество точек плоскости, составленное из единичных квадратов, соответствующих точкам $\mathbb{Z}^2$.

Фигура L называется *обобщенной дискретной прямой*, если выполнено одно из следующих условий:

1) существует обычная прямая l, проходящая через две целые точки, не лежащие на одной горизонтальной или вертикальной прямой, содержащаяся целиком в L ($l \subset L$), и такая, что для каждого единичного квадрата фигуры L верно, что он содержит бесконечное число точек l. Такую прямую будем называть определяющей для L;
2) если она составлена из клеток, имеющих координаты (x, y), $x, y \in \mathbb{Z}$, где координата x (y) фиксирована, а другая пробегает все возможные значения. В этом случае обобщенная дискретная прямая называется вертикальной (горизонтальной) полосой. Определяющими для вертикальных и горизонтальных обобщенных дискретных прямых будем считать обычные прямые, являющиеся их левой и нижней границами соответственно.

Обозначим символом ZL множество всех прямых, проходящих через две целые точки, а символом DL — множество всех обобщенных дискретных прямых.

Теорема 1. *Соответствие между обобщенными дискретными прямыми из DL и их определяющими прямыми из ZL биективно.*

Набором начальных данных назовем пятерку $<P, x_0, y_0, v_x, v_y>$, где P — произвольная фигура, называемая препятствием, (x_0, y_0) — начальное положение точки, (v_x, v_y) — вектор скоростей точки.

Набор начальных данных $<P, x_0, y_0, v_x, v_y>$ называется *допустимым с параметром* ρ, если $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$, и либо $\frac{v_x}{v_y} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\colon p, q \leqslant \rho$, либо $v_x = 0$, либо $v_y = 0$; и точка (x_0, y_0) не лежит на границе фигуры P.

Требование того, чтобы точка не лежала на границе с препятствием, вызвано тем, что при таком расположении могут возникнуть два нежелательных случая:

1) Точка находится на границе препятствия и вектор ее скорости направлен в сторону границы. Это невозможно, потому что это означало бы, что точка, встретив препятствие, продолжает двигаться, не изменив направления движения.
2) Точка находится, например, на верхней границе горизонтальной полосы и движется вдоль оси абсцисс. Тогда ее траектории, горизонтальной прямой, соответствует обобщенная дискретная прямая, полоса, которая по определению должна залезать на препятствие, что необходимо исключить.

Моментам дискретного времени t_i, $i \in \mathbb{N}$, поставим в соответствие моменты времени на непрерывной шкале $t \in \mathbb{R}$ так, что $t_0 = 0$ и $t_i - t_{i-1} = const, \forall i \in \mathbb{N}$.

Моделированием движения в однородной структуре будем называть такой процесс изменения конфигурации в системе, что точка конфигурации, имеющая выделенное состояние движения, перемещается в конфигурациях с течением дискретного времени,и при этом ведет себя, как индикатор некоторой точки, движущейся прямолинейно и равномерно, то есть в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}$, если для $i \in \mathbb{N}$ выполнено, что $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, то возбужденное состояние конфигурации в момент времени t_i соответствует той клетке, в которой находится движущаяся точка (или одной из клеток, если точка находится на границе нескольких клеток).

Фигура H называется *обобщенным дискретным отрезком*, если существует обычный отрезок, которому соответствует прямая, проходящая через две целые точки, этот отрезок содержится целиком в H $(l \subset H)$, и для каждого единичного квадрата фигуры H верно, что он содержит бесконечное число точек отрезка l.

Фигура H называется *обобщенным дискретным лучом*, если существует обычный луч, проходящий через две целые точки, содержащийся целиком в H ($l \subset H$), и такой, что для каждого единичного квадрата фигуры H верно, что он содержит бесконечное число точек l.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *1) Если набор начальных данных, является допустимым с параметром ρ, то существует клеточный автомат, моделирующий прямолинейное движение данной точки. Причем этот клеточный автомат является общим для всех допустимых наборов начальных данных с параметром ρ. 2) Траекториями точек при движении являются части обобщенных дискретных прямых (лучи и отрезки), и только они.*

Рассматривая возможность введения отражений от более сложных препятствий с сохранением модуля скорости, получим следующую теорему, практически утверждающую, что сделать это невозможно:

Теорема 3. *Пусть дан целочисленный вектор (p, q), описывающий движение точки в однородной структуре, где p и q — простые числа, $p > q > 2$. Тогда не существует другого такого целочисленного вектора (u, v), $u > v > 2$ и $p \neq u, q \neq v$, что модуль скорости для двух этих векторов одинаков.*

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть фигура L является обобщенной дискретной прямой, тогда ее определяющая прямая l, единственна.*

Доказательство. Действительно, пусть существует другая прямая l', удовлетворяющая условиям определения, и $l \neq l'$. Пусть сначала $l \parallel l'$. Рассмотрим точку с целочисленными координатами, через которую проходит l, такая существует по определению. Без ограничения общности считаем, что l имеет положительный коэффициент наклона. Тогда, если обозначить k_1, k_2, k_3, k_4 единичные квадраты, касающиеся этой точки(нумерация, как у четвертей плоскости), то по определению получаем, что $k_1 \in L, k_2 \notin L, k_3 \in L, k_4 \notin L$, и эти отношения возможны для прямой l' только в том случае, если l' проходит через эту же целую точку, но по предположению $l \neq l'$ и $l \parallel l'$, следовательно, получили противоречие, и указанный случай невозможен.

Пусть теперь прямые имеют одну общую точку, но $l \neq l'$, тогда, как и выше, они должны проходить через целую точку, однако в данных условиях они не смогут проходить через вторую целую точку, указанную в определении, но это должно быть выполнено по той же причине.

В случае горизонтальных и вертикальных обобщенных дискретных прямых определяющая прямая единственна по определению. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь обратный процесс. Прямым l, проходящим через две целые точки, будем ставить в соответствие обобщенную дискретную прямую следующим образом. Пусть l — не вертикальная и не горизонтальная прямая. Будем приписывать единичный квадрат k_l к фигуре L тогда и только тогда, когда он содержит бесконечное число точек прямой l. Построенная таким образом фигура по определению является обобщенной дискретной прямой. Если прямая l вертикальна, то будем считать, что ей соответствует полоса, примыкающая к ней справа. Если l горизонтальна, то аналогично считаем, что ей соответствует полоса, примыкающая к ней сверху.

Лемма 2. *При указанном выше соответствии двум различным прямым, проходящим через две целые точки, соответствуют различные обобщенные дискретные прямые.*

Доказательство. Пусть l и l' — две различные прямые, каждая из которых проходит через две целые точки. Допустим, что соответствующие им обобщенные дискретные прямые L и L' равны. Прямые l и l', как и в прошлой лемме, должны иметь общую целую точку. Так как $l \neq l'$, то прямые имеют различные коэффициенты наклона, следовательно, на бесконечности они расходятся, и не могут заметать одни и те же единичные квадраты, значит $L \neq L'$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Взаимно простые целые положительные решения $x^2 + y^2 = z^2$ суть*

$$x = mn, \quad y = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad z = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

при взаимно простых нечетных m и n, $m > n > 0$, а также

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

при взаимно простых m и n, $m > n > 0$, одно из которых четно. Любые целые положительные решения получаются умножением одного из уравнений на натурально число.

Доказательство этого утверждения можно найти в [3].

Лемма 4. *Пусть p, q — простые числа, $p > q > 2$, тогда уравнение $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$ относительно $u, v \in \mathbb{Z}$, $u > v > 2$ разрешимо единственным образом, а именно: $u = p, v = q$.*

Доказательство. Пусть $c_0 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$ — квадрат модуля скорости. Так как p, q простые, то дробь $c_0 = \frac{p^2+q^2}{p^2q^2}$ несократима. Действительно, предположим, что у числителя и знаменателя есть общий делитель, тогда так как p, q простые, то этот делитель делится на одно из этих чисел, например, на q, тогда q должно делить p^2+q^2, что невозможно, так как q не может делить p.

Значит $c_0 = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{u^2+v^2}{u^2v^2} = \frac{k(p^2+q^2)}{kp^2q^2}$, где $k \in \mathbb{N}$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = k(p^2 + q^2) \\ u^2v^2 = kp^2q^2 \end{cases}$$

Из этой системы получаем по теореме Виета квадратное уравнение на u^2 и v^2.

$$x^2 - (p^2 + q^2)kx + kp^2q^2 = 0;$$

при $k = 1$ решением будет $u^2 = p^2, v^2 = q^2$, и с учетом ограничений на u и v получаем решение $u = p, v = q$.

В общем случае решения выглядят следующим образом:

$$x_{12} = \frac{(p^2+q^2)k \pm \sqrt{((p^2+q^2)k)^2 - 4kp^2q^2}}{2} = \\ = \frac{(p^2+q^2)k \pm \sqrt{(p^4+q^4)k^2 + 2k^2p^2q^2 - 4kp^2q^2}}{2} = \\ = \frac{(p^2+q^2)k \pm \sqrt{(p^4+q^4)k^2 + (2k^2-4k)p^2q^2}}{2}.$$

Из второго уравнения системы следует, что k должно быть квадратом целого числа. Действительно, слева стоит квадрат целого, значит, справа тоже должен быть квадрат.

Обозначим $k = s^2$, $s \in \mathbb{N}$. Имеем:

$$x_{12} = \frac{(p^2+q^2)s^2 \pm \sqrt{(p^4+q^4)s^4 + (2s^4-4s^2)p^2q^2}}{2}.$$

Вынесем s^2 из-под корня.

$$x_{12} = \frac{(p^2+q^2)s^2 \pm s\sqrt{(p^4+q^4)s^2 + (2s^2-4)p^2q^2}}{2}.$$

Рассмотрим подкоренное выражение. Для разрешимости исходной системы в целых числах необходимо, чтобы оно являлось квадратом натурального числа. Попробуем понять, когда это возможно:

$$(p^4+q^4)s^2 + (2s^2-4)p^2q^2 = (p^4+q^4+2p^2q^2)s^2 - 4p^2q^2.$$

Вынесем 4 за знак корня:

$$\left(\frac{s(p^2+q^2)}{2}\right)^2 - (pq)^2.$$

Итого получим следующую формулу для x_{12}:

$$x_{12} = \frac{(p^2+q^2)s^2 \pm 2s\sqrt{(p^4+q^4+2p^2q^2)s^2 - 4p^2q^2}}{2}.$$

Замечаем, что оставшиеся под корнем два слагаемых являются целыми числами, поскольку сумма квадратов двух нечетных чисел является четным. Когда подкоренное выражение является квадратом натурального числа?

Несложно видеть, что при $s = 1$, что соответствует $k = 1$, это выражение действительно является квадратом числа $\frac{(p^2-q^2)}{2}$.

Могут ли существовать решения при других s? Предположим, что да. Обратимся к описанию всех решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, что эквивалентно $z^2 - x^2 = y^2$. Существует утверждение описывающее их, а именно Лемма 3.

Если положить $x = pq$, то получим две возможные пифагоровы тройки, дающие взаимно простые целые решения:

a) $x = pq,\ y = \frac{(p^2-q^2)}{2},\ z = \frac{(p^2+q^2)}{2}$;

b) $x = 1 * pq,\ y = \frac{(p^2q^2-1)}{2},\ z = \frac{(p^2q^2+1)}{2}$.

a) Первая тройка соответствует решению, которое мы уже нашли.

b) если реализуется эта тройка, то

$$\frac{s(p^2+q^2)}{2} = \frac{p^2q^2+1}{2}$$

и

$$x_{12} = \frac{k(p^2+q^2) \pm 2s\frac{(p^2q^2-1)}{2}}{2} = \frac{s(p^2q^2+1) \pm s(p^2q^2-1)}{2}.$$

То есть $x_1 = sp^2q^2$, $x_2 = s$.

Так как x_1 и x_2 должны быть квадратами, то $s = t^2$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда из $\frac{s(p^2+q^2)}{2} = \frac{p^2q^2+1}{2}$ получаем уравнение $t^2(p^2+q^2) = p^2q^2+1$.

Преобразуем это выражение к следующему виду:

$$t^2q^2 - 1 = p^2(q^2 - t^2).$$

Левая часть равенства больше нуля, следовательно правая тоже. Значит, $t < q$.

Далее, p^2 делит правую часть, значит делит и левую. То есть, $p^2|(tq-1)(tq+1)$. Заметим, что $tq+1 = (tq-1)+2$, из алгоритма Евклида для нахождения НОД следует, что НОД$(tq+1, tq-1)|2$. Следовательно, p не может одновременно делить оба слагаемых. Значит $p^2|(tq+1)$ или $p^2|(tq+1)$.

Пусть $p^2|(tq+1)$. Из этого следует, что $p^2 < (tq+1)$. Учтем, что $t < q$. Получим, что $p^2 < q^2+1$, но это противоречит тому, что $p > q$.

Пусть теперь $p^2|(tq-1)$, тогда $p^2 < tq-1 < tq+1$ — приходим к уже рассмотренному неравенству.

Случай b) невозможен.

Рассмотрим теперь возможность не взаимно простых решений. То есть, допустим, что числа pq и $(s(\frac{p^2+q^2}{2}))$ имеют общий делитель. Общим делителем может быть

c) одно из чисел p, q;

d) pq.

c) Пусть делителем является q. Вынесем его из под корня.

$$x_{12} = \frac{(p^2+q^2)s^2 \pm sq\sqrt{(\frac{s}{q}\frac{(p^2+q^2)}{2})^2 - (p)^2}}{2}.$$

Тогда пифагорова тройка будет выглядеть таким образом:

$$x = p, \quad y = \frac{(p^2-1)}{2}, \quad z = \frac{(p^2+1)}{2}.$$

При этом получим $\frac{p^2+1}{2} = \frac{s}{q}\frac{(p^2+q^2)}{2}$, откуда $(p^2+1)q = s(p^2+q^2)$. Подставляя это в формулу для x_{12}, получаем:

$$x_{12} = \frac{s(qp^2+q) \pm s(qp^2-q)}{2}.$$

Следовательно $x_1 = sqp^2$, $x_2 = qs$.

Вспомним, что x_2 должно быть квадратом. Значит, в s множитель q входит в нечетной степени. Следовательно, $\frac{s}{q}$ является полным квадратом. Обозначим его t^2. Тогда из уравнения $(p^2+1)q = s(p^2+q^2)$ получим: $p^2+1 = t^2(p^2+q^2)$, но это равенство выполняться не может, потому что левая часть меньше правой.

Случай, когда можно вынести p, рассматривается абсолютно аналогично.

Случай c) невозможен.

d) В этом случае под корнем останется

$$\left(\frac{s}{pq}\frac{(p^2+q^2)}{2}\right)^2 - 1.$$

Имеем уравнение $z^2 - 1 = y^2$. Это эквивалентно тому, что $(z-y)(z+y) = 1$ при $z, y > 0$, $z, y \in \mathbb{Z}$ это выполняется, когда $z - y = 1$ и $z + y = 1$, что эквивалентно $z = 1, y = 0$.

Значит, в нашем случае подкоренное выражение равно 0. Получаем

$$x_{12} = \frac{k(p^2+q^2)}{2}.$$

Из того что $s^2 = k$ и $pq|s$, получаем, что $k > 2$ и, следовательно, $x_{12} = \frac{k(p^2+q^2)}{2} > p^2$. Выполнение этого неравенства невозможно, ибо в таком случае $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} < c_0 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$

Случай d) невозможен. Лемма 4 доказана.

3. Доказательства теорем

Теорема 1 по сути даст нам возможность заменять обобщенные дискретные прямые обычными прямыми, проходящими через две целые точки.

Теорема 1 является следствием леммы 1 и леммы 2.

Доказательство теоремы 2. Определим теперь однородную структуру, моделирующую прямолинейное движение объекта на плоскости. Для этого зададим четверку $(\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$.

$\mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}^2$. Формально объект может двигаться во всей плоскости.

У клетки три общих состояния: движение, вакуум, преграда. Движение характеризуется целым вектором (τ_x, τ_y), где τ_x — время, за которое объект переместится на одну клетку по оси x. Знак числа указывает направление движения. τ_y — соответствующий параметр для оси y. Пусть ρ — некоторая натуральная константа и пусть $\tau_y, \tau_x \in (-\rho, \ldots, \rho)$. Далее клетка должна уметь вести счетчик времени по модулю τ_x, чтобы знать, когда ей перепрыгивать в следующую клетку, это значит, что вектору (τ_x, τ_y) необходимо сопоставить еще и всевозможные вектора (θ_x, θ_y), где $\theta_x \in (0, \ldots, \tau_x - 1)$, $\theta_y \in (0, \ldots, \tau_y - 1)$. Итак, состояние клетки описывается вектором $(\theta_x, \theta_y, \tau_x, \tau_y)$. Посчитаем общее количество состояний одной клетки. Каждой паре векторов $(\tau_x \neq 0, \tau_y \neq 0)$ соответствует $|\tau_x||\tau_y|$ векторов (θ_x, θ_y), а когда, например, $\tau_x = 0$, вектору (τ_x, τ_y) соответствует $|\tau_y|$

векторов $(0,\theta_y)$. Состоянию вакуума соответствует набор $(0,0,0,0)$. Учтем также состояние преграды. Итого, учитывая вариацию знаков, получим, что общее число состояний равно

$$4\sum_{i=1}^{\rho}\sum_{j=1}^{\rho} ij + 4\sum_{i=1}^{\rho} i + 1 + 1 =$$
$$= 4\left(\sum_{i=1}^{\rho} i\right)\left(\sum_{i=1}^{\rho} i\right) + 4\left(\sum_{i=1}^{\rho} i\right) + 2 =$$
$$= 4\frac{\rho(\rho+1)}{2}\frac{\rho(\rho+1)}{2} + 4\frac{\rho(\rho+1)}{2} + 2 =$$
$$= (\rho^2(\rho+1)^2 + 2\rho(\rho+1) + 1) + 1 =$$
$$= (\rho^2+\rho+1)^2 + 1 = O(\rho^4).$$

То есть в качестве n следует выбрать $(\rho^2+\rho+1)^2+1$.

В качестве шаблона соседства возьмем квадратик. То есть $V = \{(1,0),\ (0,1),(1,1),\ (-1,-1),(1,-1),(-1,1),(-1,0),(0,-1)\}$

Опишем функцию переходов φ. Как уже отмечалось, у клетки три общих состояния: вакуум, преграда, движение. Функция φ устроена таким образом, что состояние преграда является изолированным. Это означает, что в процессе функционирования автомата препятствия не могут пропадать или появляться. Состояние движение разбивается на несколько подсостояний, соответствующих счетчикам (θ_x,θ_y). Рассмотрим более подробно движение вдоль положительного направления оси x. Пусть в начальный момент времени клетка в возбужденном состоянии находится в квадрате с координатами (x_0,y_0). В каждый момент функционирования структуры происходит следующее: если значение параметра τ_x не нулевое, точка совершает движение по оси абсцисс. Если значение счетчика $\theta_x < \tau - 1$, то точка задержалась на своем месте недостаточно долго, счетчик θ_x увеличивается на 1, точка остается на месте (по оси x).

Если же значение $\theta_x = \tau - 1$, точке пора перемещаться. При этом данная клетка переходит в состояние вакуум, а состояние движения наследуется одной из клеток, находящихся в шаблоне соседства данной. Ясно, что каждая клетка из шаблона соседства видит движущуюся точку и по значениям счетчиков задержек определяет, должна ли точка переместиться в нее и в зависимости от этого наследует или нет состояние движения. Например, если $\theta_x = \tau - 1$, а $\theta_y < \tau_y - 1$, то перемещение должно произойти только вдоль оси x и состояние движения перейдет в точку с координатами (x_0+1, y_0). Если же $\theta_x = \tau - 1$ и $\theta_y = \tau_y - 1$, Значит, точка должна переместиться по диагонали в клетку $(x_0 + 1, y_0 + 1)$. При этом счетчик, соответствующий оси, по которой происходит перемещение, обнуляется. Если клетка, в которую должно произойти перемещение (клетка-реципиент), не является препятствием, то параметры (τ_x, τ_y) наследуются без изменения.

Если же клетка-реципиент является препятствием, то перемещения в эту клетку не происходит. Рассмотрим три типа соударений: с плоским препятствием, в угол и об угол. Например, пусть та же точка движется по оси x и встречается с вертикальной стенкой. Само отражение по сути произойдет, когда движущаяся клетка граничит с препятствием и в следующий момент должна в него перейти. В этот момент перемещения по данной оси не произойдет, клетка останется там же, где и была, но ее состояние изменится. Во-первых, счетчик θ_x обнулится, как и должен был. Во-вторых, в этот момент изменится знак у параметра τ_x.

В двух других случаях соударений отражения происходят с изменением знаков у обоих параметров.

Таким образом состояние движение может переходить в состояние вакуум и наоборот. Эти переходы формируют движение. Возбужденное состояние переползает от одной клетки автомата к другой, происходит его перемещение в пространстве с течением времени.

Из условия теоремы 2 следует, что для компонент скорости точки верно, что $\frac{v_x}{v_y} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$, $p, q < \rho$, если ни одна из компонент не равна 0. Положим $\tau_x = q, \tau_y = p$. если одна из компонент равна нулю, то положим равным нулю соответствующий τ, другое τ положим равным 1.

Определим начальную конфигурацию однородной структуры в зависимости от начальной конфигурации.

Из того что набор препятствий является допустимым, следует, что все препятствия могут быть составлены из квадратов решетки. Всем клеткам однородной структуры, которым соответствуют квадраты препятствий, припишем состояние «препятствие».

Так как начальный набор данных согласован, то точка, движение которой моделируется, в начальный момент времени находится в одном из узлов целочисленной решетки с координатами (X_0, Y_0). Выберем клетку, которой присвоим возбужденное состояние следующим образом. Если обе компоненты скорости не равны 0, то выберем квадрат, в сторону которого происходит движение. Если $v_x = 0$, то выберем левый верхний квадрат, если скорость по оси y положительна и нижний в другом случае. В случае $v_y = 0$ выберем нижний правый квадрат, если скорость по оси x положительна и нижний левый в другом случае. Это можно сделать в силу того, что точка не граничит с препятствием. Состоянии точки положим равным $(\tau_x, \tau_y, 0, 0)$.

Рассмотрим траекторию движения исходной точки точки. Ее траектория совпадает с траекторией точки, имеющей скорость $(\frac{1}{\tau_x}, \frac{1}{\tau_y}) = (\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$, так траектория зависит от отношения скоростей по осям. Более того, если сделать подходящую замену времени вида $t' = \alpha t$, $t \in \mathbb{R}$, можно добиться того, чтобы скорость заданной точки равнялась $(\frac{1}{\tau_x}, \frac{1}{\tau_y})$.

Без ограничение общности можно считать, что в начальный момент времени точка находится в начале координат. Закон движения для точки будет выглядеть следующим образом: $(x(t), y(t)) = (\frac{1}{\tau_x}t, \frac{1}{\tau_y}t)$, $t \in \mathbb{R}$ — это прямая, проходящая через целые точки, t — время.

Установим соответствие между непрерывным временем $t \in \mathbb{R}$ и дискретным временем $\{t_i\}, i \in \mathbb{Z}_+$. Соответствие следующее: $t_i = i$, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть движение происходит в направлении первой четверти.

Рассмотрим начало движения вдоль оси x. В момент $t = 0$, $N_x = 0$ — координата непрерывной точки, $D_x = 0$ координата дискретной точки. Пока $t < \tau_x$ $D_x = 0, 0 < N_x < 1$, далее, когда $\tau_x \leqslant t < 2\tau_x$, $D_x = 1, 1 < N_x < 2$. Аналогично по оси y. Получим, что дискретная траектория ведет себя, как индикатор непрерывной, то есть квадрат на плоскости загорается тогда и только тогда, когда в него попадает непрерывная точка. Заметим, что $\tau_x \in \mathbb{Z}_+$, что означает, что $\tau_x = t_{\tau_x}$ — это означает правильное в смысле данного определения моделирования соответствие времени. Отсюда также следует, что траектория клетки — это часть обобщенной дискретной прямой, то есть дискретный отрезок или луч.

Осталось показать корректность обработки отражений от препятствий. Рассмотрим движение вдоль оси x. Точка, доходя до вертикального препятствия, должна на его границе менять знак v_x. Как показано выше, без соударений однородная структура функционирует как индикатор точки, а переход возбужденного состояния от одной клетки в другую происходит в момент, когда точка находится на границе клеток. Отражение в однородной структуре определено так, что соответствующее изменение параметров происходит в момент, когда возбужденное состояние готово перейти в препятствие, то есть как раз тогда, когда точка находится на границе. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь задачу усовершенствования нашей модели путем введения более сложных отражений, не только плоских и угловых. Рассмотрим один частный случай. Пусть точка движется с параметрами (p, q), где p, q — простые числа. Пусть при отражении параметры изменились и перешли в вектор (u, v), при этом естественным было бы сохранение модуля скорости. Требуется понять, сколько в нашем случае существует таких векторов.

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся леммой 3. Действительно, сохранение модуля скорости означает, что $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$, если u и v отличны от нуля, но по предыдущей лемме это уравнение разрешимо лишь тривиальным образом.

В случае, если, например, $v = 0$, условие теоремы превращается в $\frac{1}{u^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$, что означает $\frac{1}{u^2} = \frac{p^2+q^2}{p^2q^2}$, что в свою очередь, в силу того, что справа стоит несократимая дробь, означает, что $1 = p^2 + q^2$, что невозможно. Теорема 3 доказана.

Эта теорема по существу говорит, что в выбранном определении моделирования для некоторого довольно широкого класса скоростей при условии сохранения модуля скорости можно моделировать лишь тривиальные отражения от горизонтальных, вертикальных и угловых препятствий.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Острик В. В., Цфасман М. А. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые. М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2005.