Распознавание n-точечников

А. А. Муравьева

На практике реальные геометрические образы аппроксимируются конечным множеством точек (многоточечником), и «похожесть» этих образов можно изучать на основе этих аппроксимаций. В качестве характеристики многоточечников возьмем множество попарных расстояний между точками. Отличие такой характеризации фигур от подробной, но более емкой характеризации с помощью симплексов состоит в том, что здесь в качестве кодов фигур выступают их одномерные характеристики. В случае характеристики многоточечников симплексами и производными от них, возникает кодировка, восстанавливающая фигуры с точностью до аффинной эквивалентности ([1, 2]).

Пусть фигура A — конечное множество точек. Выпишем все попарные расстояния между точками фигуры в порядке возрастания. Получим упорядоченный набор $\Gamma(A) = \{d_1, \ldots, d_N : d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_N\}$, который назовем *графиком фигуры* A. Просто *графиком* назовем упорядоченный по возрастанию набор Γ положительных действительных чисел. *Моделью* для Γ будем называть любую фигуру A, для которой $\Gamma(A) = \Gamma$. *Корректным* назовем график, у которого есть модель. Автором были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Существует алгоритм построения по графику всех его моделей в пространстве размерности k.*

Теорема 2. *У графика не более одной одномерной модели.*

Замечание. Помимо одномерной у графика может быть и неодномерная модель.

Теорема 3. *Существует алгоритм, проверяющий наличие у графика одномерной модели и строящий ее.*

Найдены необходимые и достаточные условия существования модели.

Теорема 4. *Пусть дан график* $\Gamma = \{d_1, \dots, d_N : d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots \leqslant d_N\}$, $N = C_m^2$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *Существует фигура* $A \subset \mathbb{R}^{m-1}$, *такая, что* $\Gamma(A) = \Gamma$;
2) *Существует биективная функция*

$$NUM\colon PN = \{(1,2), \dots, (m-1,m)\} \to \{1, \dots, N\},$$

такая, что $\forall i,j,k\colon 1 \leqslant i,j,k \leqslant m$, $i \neq j \neq k$, $i \neq k$

$$d_{NUM(i,j)} \leqslant d_{NUM(i,k)} + d_{NUM(j,k)}.$$

Рассмотрим два способа продолжения графика до корректного путем добавления в него новых элементов. При первом способе элементы приписываются к графику, а при втором разрешено добавлять элементы «внутрь» графика. Введем величину J_Γ, равную минимальному числу элементов, которые необходимо приписать к Γ для продолжения его до корректного. Аналогично введем величину N_Γ, равную минимальному числу элементов, которые необходимо добавить в Γ для продолжения его до корректного. Положим

$$J(m) = \max_{|\Gamma|=m} J_\Gamma, \qquad N(m) = \max_{|\Gamma|=m} N_\Gamma.$$

Для этих величин найдены точные значения.

Теорема 5. $J(m) = C^2_{2(m-1)} - m$.

Теорема 6. $N(m) = C^2_{m+1} - m$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику Кудрявцеву В. Б., без помощи и поддержки которого результаты, составляющие содержание данной работы, не существовали бы.

Список литературы

[1] Козлов В. Н. Математическое моделирование зрительного восприятия // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 321–338.

[2] Козлов В. Н. О зрительном образе, математических подходах к определению этого понятия и о распознавании изображений // Журнал математической информатики и математической физики. 1999. Т. 39. № 11. С. 1929–1946.

[3] Асанов М. О. и др. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.