Сплайновая интерполяция с плавающими узлами

О. В. Костюченко

1. Постановка задачи

Рассматривается $p(x) : [0,1] \to [0,1]$ такая, что $p \in D^{(2)}[0,1]$ и $|p''| < G$.

Цель — решить для $p(x)$ задачу интерполяции (то есть взяв n значений этой функции в некоторых n точках, построить интерполирующую функцию $q(x)$, причем интерполяция должна быть корректной — с растущей точностью, то есть $\|p - q\|_\infty$) должна стремиться к 0 при увеличении n). Но задачу будем решать с допущением, что можно строить условную интерполяцию — при построении $(i+1)$-ого узла использовать знания о построенных до этого i узлах (в отличие от стандартной задачи интерполяции, где все точки проверок указываются сразу).

2. Результаты работы

1) Для поставленной задачи построен алгоритм, верхняя оценка ошибки которого в равномерной норме асимптотически ведет себя как $\frac{G}{16n^2}$, где n — число проверок. (Для сравнения: стандартный кусочно-линейный алгоритм для всех допустимых функций имеет оценку $\frac{G}{8n^2}$).

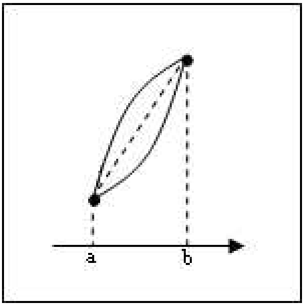
   Замечание 1. Эта оценка для самого худшего случая, на самом же деле данный алгоритм может, в зависимости от класса приближаемых функций, допускать оценку, где вместо $\frac{G}{16}$ стоит сколь угодно малая константа, вплоть до нулевой — например, на тех же сплайнах 1 порядка со второй производной кусочно равной $\pm G$ (в отличие от кусочно-линейного алгоритма, который ошибку 0 может допустить только на прямых).

Замечание 2. Получить верхнюю оценку, которая асимптотически сильнее $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, невозможно ни для какого алгоритма, работающего на функциях данного класса.

2) Написана программа spline.exe, реализующая этот алгоритм и демонстрирующая его на практике.

3. Сплайновый алгоритм аппроксимации

3.1. Как работает алгоритм



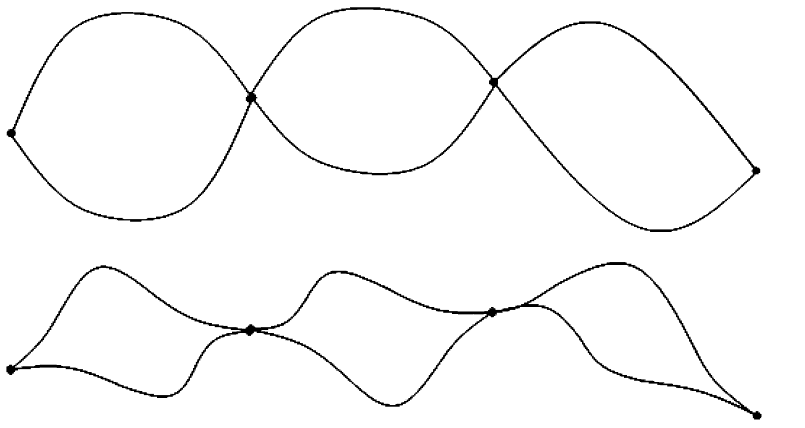
Лемма 1 (О граничных параболах). *Существует ровно одна парабола со второй производной G и одна с $-G$, проходящая через 2 заданные точки $(a, p(a))$ и $(b, p(b))$ (далее будем называть их* ***граничными параболами****). Никакая другая гладкая функция с $|p''| < G$, соединяющая эти 2 точки, не может лежать, соответственно, выше верхней или ниже нижней граничной параболы в какой-либо точке отрезка.*

Замечание. В дальнейшем подобные функции, за которые никто не может заходить, будем называть просто **экстремалями**.

Стандартный кусочно-линейный алгоритм, получив узлы, рисует по ним такие экстремали и говорит, что размер отрезка аппроксимации равен $\frac{1}{n}$, а значит, ошибка алгоритма не превосходит $\frac{G}{8n^2}$. Но на самом деле соединения парабол — не глобальные экстремали, так как они негладкие.

В работе приводится алгоритм более точный, чем стандартный, и при этом работающий в тех же ограничениях на приближаемую функцию. Он называется **алгоритмом сплайновой интерполяции с плавающими узлами**; сплайновой — потому что приближающая функция будет сплайном 1-го порядка, с плавающими узлами — потому что узлы алгоритм будет выбирать сам в зависимости от результатов проверок на предыдущих шагах.

Суть алгоритма: он выполняется в n шагов, и на каждом i-ом шаге, $i = 1, \dots, n$, известно i узлов интерполяции. Утверждается, что существует способ построить по ним гладкие экстремали, а также выбрать по ним следующий узел проверки оптимальным образом. В качестве аппроксимации на этом шаге берется полусумма экстремалей, что минимизирует возможную ошибку. Иллюстрация к уточнению стандартных экстремалей:



3.2. Теоремы о построении экстремалей и оптимальном узле

Теорема 1 (Об экстремалях). *Для данных i допустимых узлов обе экстремали по ним существуют и единственны.*

Теорема 2 (Об оптимальном узле). *Для данных i допустимых узлов существует и единственен узел, не совпадающий с ними, на котором достигается наименьшая ошибка при выборе его в качестве $(i+1)$-ого узла интерполяции.*

3.3. Предварительное разбиение для сплайнового алгоритма

Теорема 3 (О локальной ошибке алгоритма). *При «делении отрезка пополам» по сплайновому алгоритму, то есть переходе от сплайновой аппроксимации по (x_1, x_2) к сплайновой аппроксимации по (x_1, c, x_2), $x_1 < c < x_2$, c — оптимальный узел, локальная ошибка на $[x_1, x_2]$ получается асимптотически вдвое меньшей, чем ошибка кусочно-линейного алгоритма (при котором отрезок делится ровно пополам).*

> Переформулировка теоремы: верхняя оценка ошибки асимптотически ведет себя как $\frac{G}{16n^2}$ на таких n, что $n = 2^k + 1$, то есть она достигается только тогда, когда каждый отрезок предыдущего разбиения делится пополам.

Ограничение $n = 2^k + 1$ ослабляется до требования нечетности n следующей теоремой.

Теорема 4. *Если при $n = 2k+1$ вначале использовать $(k+1)$ точку на равномерное разбиение отрезка $[0, 1]$ узлами (как в стандартном алгоритме), а затем для оставшихся k точек применять сплайновый алгоритм, то для такого алгоритма (назовем его **алгоритмом с предварительным разбиением**) верхняя оценка $\frac{G}{16n^2}$ достигнется асимптотически.*

3.4. Оценки ошибки сплайнового алгоритма на различных классах функций

Здесь приводятся примеры различных классов функций внутри исходного ($D^{(2)}[0, 1]$ при $|p''| < G$), на которых константа $\frac{G}{16}$ в верхней оценке ошибки уменьшается сколь угодно, вплоть до 0.

4. Программа SPLINE.EXE

Описывается работа программы, прилагаемой к работе и реализующей сплайновый алгоритм на практике.

5. Заключение

Описываются области возможной применимости алгоритма и возможные направления дальнейших исследований.

6. Благодарности

Автор благодарит Э. Э. Гасанова за научное руководство и своевременный контроль за ошибками в ходе работы; П. А. Алисейчика — за рецензирование и снабжение несколькими ценными идеями в ходе создания алгоритма.

Список литературы

[1] Богачев К. Ю. Практикум на ЭВМ. Методы приближения функций.

[2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.

[3] Севастьянов Б. А. Теория вероятностей.

[4] Воинов В. Г., Никулин М. С. Несмещенные оценки и их применение.