Восстановление движения тела по частичной информации

М. П. Волченков

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ — целочисленная решетка на плоскости. Пусть $\mathcal{A}$ — группа ее аффинных преобразований, Γ — группа изометрических преобразований целочисленной плоскости $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Преобразования из Γ записываются в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad x, y \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Пусть G — некоторая подгруппа преобразований в Γ, имеющих фиксированную неподвижную точку, а $S \subset \Gamma$ — подгруппа сдвигов (то есть случай $A = E$). Заметим, что S — коммутативная группа.

Утверждение 1. $\Gamma = G \circ S$.

Доказательство. Рассмотрим сдвиги $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ и преобразование, имеющее неподвижную точку $(0,0)$ $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Композиция этих преобразований запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что полученное преобразование вида (1).

Утверждение 2. $S \circ G = G \circ S$.

Доказательство. Заметим, что у изометрического преобразования $|A| \neq 0$. Имеем $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = A\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + A^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right)$.

То есть на первом этапе — сдвиг на $A^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, а затем преобразование, имеющее неподвижную точку. Преобразование же в исходном виде представляет собой композицию преобразования, имеющего неподвижную точку, а затем — сдвига.

К тому же,

$$A\left(A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\forall g \in G \;\; g^{-1} \circ S \circ g \in S$, то есть $S \triangleleft G$ (является нормальным делителем в G). Получаем, что $G = \Gamma/S$. Получили

Утверждение 3. *$S \triangleleft G$, $G = \Gamma/S$.*

Утверждение 4. *$|G| = 8$; G состоит из следующих преобразований g_i, $i = \overline{1,8}$:*

1) *g_1 — тождественное преобразование;*
2) *g_2 — поворот на $90°$;*
3) *g_3 — поворот на $180°$;*
4) *g_4 — поворот на $270°$;*
5) *g_5 — симметрия относительно оси X;*
6) *g_6 — симметрия относительно оси Y;*
7) *g_7 — симметрия относительно $45°$;*
8) *g_8 — симметрия относительно $135°$.*

Доказательство. Каждую точку $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ дискретной плоскости можно представить в следующем виде: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. К тому же, $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\cdot A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Таким образом, достаточно потребовать, чтобы расстояния между образами точек $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ сохранялись. То есть $\left|A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2}$. Выберем в качестве неподвижной точки точку $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Поскольку расстояния в результате преобразования должны сохраняться, $\left|A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right| = 1$ и $\left|A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right| = 1$. Таким образом, $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Составим таблицу, которая учитывает все варианты перехода точек $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ согласно указанным выше условиям, и проверим, какие преобразования принадлежат F.

$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \backslash A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$		симметрия относительно 45°		поворот на 270°
$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	тождественное преобразование		симметрия относительно оси Y	
$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$		поворот на 90°		симметрия относительно 135°
$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$	симметрия относительно оси X		поворот на 180°	

Как мы видим, допустимо ровно 8 преобразований, причём это как раз g_i, $i = \overline{1,8}$ из утверждения. Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Для любых двух точек целочисленной плоскости* (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\forall g_i \in G$ *существует и единственный сдвиг* $z_i \in Z$ *такой, что* $g_i z_i \begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$.

Доказательство. Преобразование g_i^{-1}, $i = \overline{1,8}$ переводит точку

(a_2, b_2) в какую-то конкретную точку, которая зависит от преобразования, причём такая точка единственна исходя из определения g_i. Положим, что это точка (a_3, b_3). Ясно, что существует единственный сдвиг, который бы переводил (a_1, b_1) в (a_3, b_3). Обозначим его z_i.

Тогда $g_i z_i \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = g_i \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = g_i \left(g_i^{-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим K_1 и K_2, конечные подмножества целочисленной плоскости. K_1 назовем первым кадром, K_2 — вторым. Для $d \in \Gamma$ $|d(K_1) \cap K_2| = r(d)$ назовем рангом отображения d. Ясно, что $|r(\Gamma)| \leqslant \min(|K_1|, |K_2|)$.

Поставим задачу нахождения оптимального преобразования.

Задача 1. По заданным кадрам K_1 и K_2 найти единственное d максимального ранга $r(d)$.

Прямое решение задачи невозможно ввиду того, что $|\Gamma| = \infty$, предлагается алгоритм перебора элементов $K_1 \times K_2$.

Алгоритм 1.

1) Для $i = \overline{1,8}$, $(a_1, b_1) \in K_1$, $(a_2, b_2) \in K_2$ записать $z_i(a_1, b_1, a_2, b_2)$ в список R_i.
2) В списке R_i найти наиболее часто встречающийся элемент r_i.
3) Взять $r = \max\limits_{i=\overline{1,8}} r_i$.
4) Выдать все (i, z_i), встречающиеся r раз.

Утверждение 6. *Сложность алгоритма 1 есть* $C \cdot |K_1| \cdot |K_2|$.

Пусть $d \in \Gamma$ — отображение максимального ранга для кадров K_1 и K_2. Обозначим через $k_1 = |K_1| - r(d)$ — число пропавших точек при переходе от кадра K_1, через $k^2 = |K_2| - r(d)$ — число возникших точек кадра K_2.

Рассмотрим последовательность кадров $K_1, K_2, \ldots, K_l$, $l > 2$ («фильм»). Будем считать, что $|K_1| = |K_2| = \ldots = |K_l| = n$. Аналогично понятиям k_1 и k^2 обозначим число пропавших точек s-го кадра и возникших точек t-го кадра соответственно через k_s, k^t, где

$s = \overline{2, l-1}$, $t = \overline{3, l}$. Будем считать, что $k_1 = k^2 = k_2 = k^3 = \ldots = k^l = k$. Число k назовем шумом фильма.

Рассмотрим случай $K_2 = K_1$ и d, не являющееся тождественным отображением. Максимальный ранг m_1 при таких условиях назовем максимальным автодвижением кадра K_1. Будем считать, что $m_1 = m_2 = \ldots = m_l = m$, где m_j, где $j = \overline{2, l}$ определяются аналогично m_1. Назовем число m коэффициентом автосимметрии фильма. Скажем, что точки кадра K_i находятся в общем положении, если $m_i = 1$.

Теорема 1. *Пусть $k < \frac{n-1}{2}$, $m < n - 2k$. Если для кадров K_1 и K_2 существует отображение $d \in \Gamma$, $r(d) \geqslant n - k$, то d — единственное отображение максимального ранга из Γ.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что существует $h \in \Gamma$ из K_1 в K_2, что $r(h) \geqslant r(d)$.

Тогда $|\operatorname{Dom}(d)| \geqslant n - k$, а значит и $|\operatorname{Dom}(h)| \geqslant |\operatorname{Dom}(d)| \geqslant n - k$. Следовательно, $|\operatorname{Dom}(d) \cap \operatorname{Dom}(h)| \geqslant n - 2k$. К тому же, $|\operatorname{Im}(d)| \geqslant n-k$, $|\operatorname{Im}(h)| \geqslant n-k$, а также $|\operatorname{Im}(d) \cap \operatorname{Im}(h)| \geqslant n-2k$. d и h действуют на $\operatorname{Dom}(d) \cap \operatorname{Dom}(h)$:

$$
\begin{aligned}
d &: \operatorname{Dom}(d) \cap \operatorname{Dom}(h) \to \operatorname{Im}(d) \cap \operatorname{Im}(h), \\
h &: \operatorname{Dom}(d) \cap \operatorname{Dom}(h) \to \operatorname{Im}(d) \cap \operatorname{Im}(h).
\end{aligned}
$$

Определено отображение $dh^{-1} : \operatorname{Dom}(d) \cap \operatorname{Dom}(h) \to \operatorname{Dom}(d) \cap \operatorname{Dom}(h)$. $r(dh^{-1}) \geqslant n-2k$. По условию теоремы $r(dh^{-1}) < m \leqslant n-2k$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $m = 1$, то теорема выполняется для $k = \frac{n-1}{2} - m$. Алгоритм работает для коэффициента шума, сравнимого, но не превосходящего половины числа точек в кадрах.*

Следствие 2. *Если движения от кадра к кадру непрерывны, то есть $d_{i,i+1} \sim d_{i+1,i+2} \sim \ldots$, то для нахождения $d_{i+1,i+2}$ нет необходимости применять алгоритм 1. Достаточно проверить близкие к $d_{i,i+1}$ отображения. Сложность такой проверки будет $Cn \cdot \ln n$.*

Действительно, задача сводится к нахождению $|d_{i,i+1}(K_i) \cap K_{i+1}|$, которую можно решить после сортировки точек множеств $d_{i,i+1}(K_i)$ и K_{i+1} по первым координатам.

Задача может быть обобщена на трехмерный случай, а также случай, когда $k_1 \sim k^2 \sim k_2 \sim k^3 \sim \ldots \sim k^l \sim k$, $m_1 \sim m_2 \sim \ldots \sim m_l \sim m$.

Автор выражает благодарность профессору Бабину Д. Н. и научному сотруднику Мазуренко И. Л. за постановку задачи и ценные указания.