О проблеме полноты в классе автоматов без обратной связи

Д. Н. Жук, Ю. Н. Присмотров

В работе рассматривается проблема полноты для автоматов без обратной связи, имеющих в качестве входного и выходного алфавитов множество $E_2 = \{0, 1\}$. Исследуются системы автоматных функций вида $P_2 \cup \nu$. Доказывается, что в этом случае проблема полноты алгоритмически разрешима, и для каждого конечного ν строится критериальная система.

Введение

Задача о полноте (относительно различных операторов замыкания) для систем автоматов имеет важное прикладное значение. На практике, прежде чем приступить к проектированию конкретной схемы, необходимо убедиться, что набор элементов, из которых будет вестись синтез, является достаточным. При этом условия, в которых предстоит работать синтезируемому устройству, могут накладывать различного рода ограничения на сложность реализации, надежность и т. д. Эти условия, по существу, и определяют тот оператор замыкания, относительно которого необходимо решать задачу полноты.

В работе [2] установлена алгоритмическая неразрешимость задачи о полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для конечных систем автоматных функций. Вместе с тем, для систем автоматов, содержащих все булевы функции, указанная задача алгоритмически разрешима [3]. В.А.Буевич показал, что в классе автоматов без обратной связи задача о полноте алгоритмически неразрешима.

В данной работе исследуется задача о полноте относительно операции суперпозиции для систем автоматов без обратной связи вида $P_2 \cup \nu$; найдены два конечных и три счетных семейства предполных классов. Построен алгоритм проверки на полноту таких систем автоматов. Для каждого конечного ν он заключается в проверке непринадлежности ν конечному числу предполных классов. Авторы выражают благодарность своему научному руководителю Кудрявцеву В. Б. за оказанную помощь и поддержку в исследовании задачи и написании данной работы.

1. Основные понятия и результаты

P_2 — множество всех булевых функций. Рассмотрим конечные автоматы, имеющие ровно один выход и получающиеся при помощи операции суперпозиции из элементов, являющихся функциями из P_2 или единичной задержкой с начальным состоянием 0 или 1. Автоматы такого вида не содержат циклов, то есть операция обратной связи в них не реализуется.

Будем использовать обозначения из [1]. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, ${E_2}^l$ — множество слов длины l, E — множество всех сверхслов в алфавите E_2. Множество E^n состоит из элементов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E$. Будем говорить, что слово $\gamma \in {E_2}^d$ имеет период e, если e делит d и $\gamma(i+1) = \gamma(i \pmod e) + 1)$ для $i = 0, 1, \ldots, d-1$. Пусть $\alpha \in {E_2}^l$, то есть $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(l)$ и $|\alpha| = l$. Обозначим $\circlearrowleft_r \alpha = \alpha(r+1) \ldots \alpha(|\alpha|)\alpha(1)\ldots\alpha(r)$, $inv(\alpha) = \alpha(|\alpha|)\alpha(|\alpha|-1)\ldots\alpha(2)\alpha(1)$, $[_k\alpha = \alpha(|\alpha|-k+1)\ldots\alpha(|\alpha|-1)\alpha(|\alpha|)$. Аналогично для $\alpha \in E$ сверхслово $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\alpha(3)\ldots$ и $|\alpha| = \infty$. Для слова или сверхслова α, а также для $k \leqslant |\alpha|$ обозначим $]_k\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(k)$. Для конечного слова α слово $\alpha^s = \underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{s}$, а сверхслово $\alpha^\infty = \alpha\alpha\alpha\ldots$.

Элемент множества E^n мы будем представлять двумя способами. С одной стороны, это $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in E$, $j = 1, 2, \ldots, n$, с другой — это бесконечная последовательность $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots)$, где $\vec{a}_i \in {E_2}^n$. Аналогично, элемент множества $({E_2}^n)^p$ — это с одной стороны p векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p \in {E_2}^n$; с другой стороны — это n слов длины p.

Автомат без обратной связи можно интерпретировать как функцию $T : E^n \longrightarrow E$, переводящую входную последовательность $(\vec{x}(1), \vec{x}(2), \ldots) \in E^n$ в выходную последовательность $(y(1), y(2), \ldots) \in E$ следующим образом:

$$\begin{aligned} y(1) &= f_1(\vec{x}(1)), \\ y(2) &= f_2(\vec{x}(1), \vec{x}(2)), \\ &\ldots \\ y(h) &= f_h(\vec{x}(1), \vec{x}(2), \ldots, \vec{x}(h)), \\ y(h+1) &= f_h(\vec{x}(2), \vec{x}(3), \ldots, \vec{x}(h+1)), \\ &\ldots \\ y(h+i) &= f_h(\vec{x}(1+i), \vec{x}(2+i), \ldots, \vec{x}(h+i)), \\ &\ldots \end{aligned}$$

где $f_j : ({E_2}^n)^j \longrightarrow E_2$ для $j = 1, 2, \ldots, h$, причём, если $h \geqslant 2$, то существует набор векторов

$$\vec{a}(1), \vec{a}(2), \ldots, \vec{a}(h) \in {E_2}^n,$$

такой, что

$$f_h(\vec{a}(1), \vec{a}(2), \ldots, \vec{a}(h)) \neq f_{h-1}(\vec{a}(2), \ldots, \vec{a}(h)).$$

Тогда T будем называть автоматом без обратной связи высоты h. Функции f_j для $j = 1, \ldots, h-1$ определяют выход автомата в моменты времени от 1 до $h-1$, а функция f_h определяет выход автомата, начиная с момента времени h. Множество всех автоматов без обратной связи обозначим $\mathcal{P}_a$, а множество всех автоматов без обратной связи высоты не более h обозначим ${\mathcal{P}_a}^h$. Для $p > h$ определим

$$f_p(\vec{x}(1), \vec{x}(2), \ldots, \vec{x}(p)) = f_h(\vec{x}(p-h+1), \vec{x}(p-h+2), \ldots, \vec{x}(p)).$$

Таким образом, для любого s функция f_s определяет выход автомата в момент времени s.

Пусть $M \subset \mathcal{P}_a$, обозначим через $[M]$ множество всех автоматов без обратной связи, получающихся из M с помощью операции суперпозиции. Множество M называется полным, если $[M] = \mathcal{P}_a$.

Выход автомата в моменты времени $t \geqslant h$ зависит только от функции f_h и не зависит от функций $f_1, f_2, \ldots, f_{h-1}$, поэтому для изучения свойств автомата при $t \geqslant h$ введем искусственное отображение. Для произвольного автомата T высоты h с n входами определим отображение $G_T : E^n \longrightarrow E$. Для $\vec{a}(1), \vec{a}(2), \vec{a}(3), \ldots \in {E_2}^n$

$$G_T(\vec{a}(1), \vec{a}(2), \vec{a}(3), \ldots) = \beta, \text{ где}$$

$$\beta(i) = f_h(\vec{a}(i+h-1), \vec{a}(i+h-2), \ldots, \vec{a}(i+1), \vec{a}(i)) \text{ для любого } i.$$

В этом случае автомат преобразует сверхслова не сначала, а как бы с конца.

Так как G_T имитирует поведение автомата T только в обратную сторону, то G сохраняет суперпозицию, то есть для любых автоматов $T(x_1, \ldots, x_n)$, $T_1(x_1, \ldots, x_{m_1})$, $T_2(x_1, \ldots, x_{m_2})$, $\ldots$, $T_n(x_1, \ldots, x_{m_n}) \in \mathcal{P}_a$, автомата

$$\begin{aligned} &T_0(x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}, \ldots, x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n}) = \\ &\qquad = T(T_1(x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}), \ldots, T_n(x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n})), \end{aligned}$$

а также для любых $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,m_1}, \ldots, \alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,m_n} \in E$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} &G_{T_0}(\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,m_1}, \ldots, \alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,m_n}) = \\ &\qquad = G_T(G_{T_1}(\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,m_1}), \ldots, G_{T_n}(\alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,m_n})). \end{aligned}$$

Каждую булевскую функцию можно считать автоматом высоты 1. Пусть $P_2 \subset M \subset \mathcal{P}_a$, $M \backslash P_2$ — конечное множество. В работе рассматривается проблема полноты для систем M указанного вида.

Теперь опишем 5 семейств классов автоматов в $\mathcal{P}_a$. Обозначим через $h(T)$ высоту автомата T, а через $n(T)$ число входов автомата T.

Семейство $\mathfrak{A}$. Это семейство состоит из классов M_{pq}, где $1 \leqslant p < q$. M_{pq} — множество автоматов T таких, что из равенства $\vec{x}(p) = \vec{x}(q)$ следует равенство $y(p) = y(q)$.

Семейство $\mathfrak{B}$. Это семейство состоит из одного класса $M_{1\infty}$. $M_{1\infty}$ — множество автоматов T таких, что для любого $\vec{a} \in {E_2}^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}) = f_1(\vec{a}).$$

Семейство $\mathfrak{C}$. Это семейство состоит из классов $S_p, p \geqslant 2$. S_p — множество автоматов T таких, что для любых $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p, \vec{b} \in {E_2}^{n(T)}$

$$f_p(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{p-2}, \vec{a}_{p-1}, \vec{a}_p) = f_p(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{p-2}, \vec{b}, \vec{a}_p).$$

Другими словами, выход автоматов из S_p в момент времени p не зависит от входа в момент времени $p-1$.

Семейство $\mathfrak{D}$. Это семейство состоит из 4 классов L_1, L_2, L_3, L_4. L_1 — множество автоматов T таких, что для любых $\vec{a}, \vec{b} \in {E_2}^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}).$$

L_2 — множество автоматов T таких, что для любых $\vec{a}, \vec{b} \in {E_2}^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}).$$

L_3 — множество автоматов T таких, что для любых $\vec{a}, \vec{b} \in {E_2}^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\ldots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\ldots, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}).$$

L_4 — множество автоматов T таких, что для любых $\vec{a}, \vec{b} \in {E_2}^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\vec{b}, \vec{b}, \ldots, \vec{b}, \vec{b}, \vec{b}).$$

Семейство $\mathfrak{E}$. Пусть $d \geqslant 3$, $C \subset {E_2}^d$ и для любых $\gamma, \delta \in C$ слова $\overline{\gamma}$, $\gamma \vee \delta$, $\gamma \wedge \delta$ принадлежат C (где все операции выполняются поэлементно). Пусть также для какого-то e в C есть слово с наименьшим периодом e, но C содержит не все слова периода e; C содержит слова 0^d и 1^d. Тогда пара (d, C) определяет класс R_d^C : автомат T с n входами принадлежит R_d^C тогда и только тогда, когда для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in C$ выполняется $G_T({\alpha_1}^\infty, {\alpha_2}^\infty, \ldots, {\alpha_n}^\infty) = \delta^\infty$, где $\delta \in C$. Семейство $\mathfrak{E}$ состоит из всех таких классов R_d^C.

Теорема 1. *Верны следующие утверждения:*

1) M_{pq} *— предполный класс в* $\mathcal{P}_a$ *для любых натуральных* p *и* q *таких, что* $p < q$.
2) $M_{1\infty}$ *— предполный класс в* $\mathcal{P}_a$.
3) S_p *— предполный класс в* $\mathcal{P}_a$ *для любого натурального* $p \geqslant 2$.
4) L_1, L_2, L_3, L_4 *— предполные классы в* $\mathcal{P}_a$.
5) R_d^C *— замкнутый класс в* $\mathcal{P}_a$*, не совпадающий с* $\mathcal{P}_a$*. Пусть к тому же выполнены следующие условия:*
   а) *если* $\alpha \in C$ *имеет наименьший период* d *и* $(\circlearrowleft_r \alpha) \in C$*, тогда для любого* $\beta \in C$ $(\circlearrowleft_r \beta) \in C$.
   б) *если* C *содержит слово с наименьшим периодом* e*,* $1 < e < d$*, то* C *содержит все слова периода* e.

   Тогда R_d^C *— предполный класс в* $\mathcal{P}_a$.
6) *Если* R_d^C *— не предполный класс, то существует* d'*,делящее* d*, и* $C' \subset {E_2}^{d'}$ *такое, что* $R_d^C \subset R_{d'}^{C'}$ *и* $R_{d'}^{C'}$ *— предполный класс.*

Теорема 2. *Пусть* B *— система автоматов из* ${\mathcal{P}_a}^h$*,* $P_2 \subset B$*. Система* B *полна тогда и только тогда, когда* B *не является подмножеством* M_{pq} *для* $1 \leqslant p < q \leqslant 2h$*,* $M_{1\infty}$*,* S_p *для* $2 \leqslant p \leqslant h$*,* L_1, L_2, L_3, L_4*,* R_d^C *для* $d < (2h^2)^{4h}$.

2. Доказательства утверждений

Следующие определения нужны для доказательства теорем.

Определение 1. Автомат с n входами $T \in \mathcal{P}_a$ сохраняет $A \subset {E_2}^k$, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$ выполняется $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A$. Класс всех автоматов из $\mathcal{P}_a$, сохраняющих A, обозначим $\mathcal{U}(A)$.

Определение 2. Автомат с n входами $T \in \mathcal{P}_a$ сохраняет $A \subset E$, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$ выполняется $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A$. Класс всех автоматов из $\mathcal{P}_a$, сохраняющих A, обозначим $\mathcal{U}(A)$.

Определение 3. Автомат с n входами $T \in \mathcal{P}_a$ G-сохраняет $A \subset {E_2}^k$, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$ выполняется

$G_T(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_n^\infty) = \beta^\infty$ для какого-то $\beta \in A$. Класс всех автоматов из $\mathcal{P}_a$, G-сохраняющих A, обозначим $\mathcal{U}_G(A)$.

Определение 4. Автомат с n входами $T \in \mathcal{P}_a$ G-сохраняет $A \subset E$, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A$ выполняется $G_T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A$. Класс всех автоматов из $\mathcal{P}_a$, G-сохраняющих A, обозначим $\mathcal{U}_G(A)$.

Легко проверить, что верна следующая лемма.

Лемма 1. *Для произвольных $A \subset {E_2}^k$, $B \subset E$, классы сохранения $\mathcal{U}(A), \mathcal{U}_G(A), \mathcal{U}(B), \mathcal{U}_G(B)$ замкнуты.*

Автомат с одним входом такой, что в любой момент времени $y(t) = x(t)$, будем называть тождественным автоматом. Перейдём к доказательству теоремы 1. Она состоит из следующих утверждений.

Утверждение 1. *M_{pq} — предполный класс в $\mathcal{P}_a$ для любых натуральных p и q таких, что $p < q$.*

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим множество D слов $\alpha \in {E_2}^q$ таких, что $\alpha(p) = \alpha(q)$. Легко проверить, что M_{pq} совпадает с $\mathcal{U}(D)$, следовательно, M_{pq} — замкнутый класс. При этом очевидно, что он не полный, так как единичная задержка не сохраняет D.

Теперь пусть есть автомат с n входами $T \notin M_{pq}$, докажем, что $[M_{pq} \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$. Так как $T \notin M_{pq}$, то для каких-то слов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in D$ выполняется $T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \notin D$. Для каждого α_i рассмотрим автомат без входов R_i высоты $\leqslant q+1$, возвращающий выходную последовательность $\alpha_i 0^\infty$. Очевидно, что все они принадлежат $\mathcal{P}_a$ и M_{pq}. Тогда автомат $T_0 = T(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ — автомат без входов, возвращающий в моменты времени p и q различные значения. Теперь определим автомат Q с двумя входами высоты $\leqslant q+1$. Во все моменты времени кроме q он работает как единичная задержка того, что подаётся на первый вход. Определим функцию $f_q(\gamma_1, \gamma_2)$ этого автомата. Если $\gamma_1, \gamma_2 \in D$, то $f_q(\gamma_1, \gamma_2) = f_p(]_p\gamma_1,]_p\gamma_2)$, иначе $f_q(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1(q-1)$. Тогда нетрудно убедиться, что $Q \in M_{pq}$, а также $Q(x, T_0)$ во все моменты времени работает как единичная задержка. Но $P_2 \subset M_{pq}$, значит, $[M_{pq} \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ и утверждение доказано.

Утверждение 2. *$M_{1\infty}$ — предполный класс в $\mathcal{P}_a$.*

Доказательство утверждения 2. Очевидно, что $P_2 \subset M_{1\infty}$. Рассмотрим множество D сверхслов, представимых в виде $a\gamma a^\infty$ для какого-то $a \in E_2$ и какого-то слова γ. Легко проверить, что $M_{1\infty}$ совпадает с $\mathcal{U}(D)$, следовательно, $M_{1\infty}$ — замкнутый класс. При этом очевидно, что он не полный, так как единичная задержка не сохраняет D.

Докажем, что он предполный. Пусть есть автомат с n входами $T \notin M_{1\infty}$, докажем, что $[M_{1\infty} \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$. Так как $T \notin M_{1\infty}$, то существуют $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in E_2$ и слово γ такие, что $T({a_1}^\infty, {a_2}^\infty, \ldots, {a_n}^\infty) = b\gamma c^\infty$, причём $b \neq c$. Пусть автомат T имеет высоту h, тогда слово γ имеет длину не больше h.

Для $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим $T_i \in M_{1\infty}$ — автомат без входов, возвращающий во все моменты времени константу a_i. Тогда автомат $T_0 = T(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ — автомат без входов такой, что $T_0() = b\gamma c^\infty$. Так как $b \neq c$ и в $M_{1\infty}$ есть отрицание, то можно считать, что $b = 0$, $c = 1$. Также в $M_{1\infty}$, очевидно, есть автомат R без входов такой, что $R() = 01^h0^\infty$. Теперь рассмотрим автомат $Q \in M_{1\infty}$ с одним входом и высотой 2, который во все моменты времени кроме первого работает как единичная задержка, а в первый момент времени как тождественный автомат. Нетрудно убедиться, что автомат $Q(x) \wedge (R \vee T_0)$ является единичной задержкой. Таким образом, $[M_{1\infty} \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ и утверждение доказано.

Утверждение 3. *S_p — предполный класс в $\mathcal{P}_a$ для любого натурального $p \geqslant 2$.*

Доказательство. Покажем, что класс S_p замкнут. Пусть у нас есть автоматы $T_1, T_2, \ldots, T_n \in S_p$, а также автомат с n входами $T \in S_p$. Обозначим $T_0 = T(T_1, T_2, \ldots, T_n)$. Пусть T_0 имеет n_0 входов. Рассмотрим произвольные слова $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0} \in {E_2}^p$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_0} \in {E_2}^p$ такие, что для любого i слово α_i может отличаться от слова β_i только по $(p-1)$-ому элементу. Подадим на входы во все автоматы T_j сначала $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0}$, а потом $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_0}$. На выходе получим слова $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in {E_2}^p$ и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in {E_2}^p$ соответственно. Для любого j автомат $T_j \in S_p$, поэтому слово γ_j может отличаться от δ_j только по $(p-1)$-ому элементу. Теперь подадим на вход в T сначала слова $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, а потом $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Получим слова α и β соответственно, которые опять же могут отличаться только по $(p-1)$-ому элементу. А отсюда и следует, что $T_0 \in S_p$. То есть S_p — замкнутый класс. При этом очевидно, что он не полный, так как не содержит единичную задержку.

Докажем, что S_p — предполный класс. Очевидно $P_2 \subset S_p$. Пусть есть автомат $T \notin S_p$ с n входами, докажем, что $[S_p \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$. Так как $T \notin S_p$, то существуют $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in {E_2}^p$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in {E_2}^p$ такие, что α_i может отличаться от β_i только по $(p-1)$-ому элементу, а слова $T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $T(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ отличаются по p-ому элементу. Для каждого α_i рассмотрим автомат $R_i \in S_p$ без входов высоты $\leqslant p+1$, возвращающий выходную последовательность $\alpha_i 0^\infty$. Пусть I — тождественный автомат, а $T_{p-1} \in S_p$ — автомат без входов, возвращающий выходную последовательность $0^{p-2}10^\infty$. Для $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим автомат с одним входом $Q_i(x) = R_i \oplus (I(x) \wedge T_{p-1}) \in S_p$, если $\alpha_i \neq \beta_i$, и $Q_i = R_i$ иначе(где $\oplus$ — сложение по модулю 2). Тогда автомат $T_0(x) = T(Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x))$ в момент времени p на выходе даёт $x(p-1)$ или $\overline{x(p-1)}$. Так как в S_p есть отрицание, то можно считать, что на выходе мы имеем $x(p-1)$. То есть в момент времени p этот автомат работает как единичная задержка.

Теперь рассмотрим автомат $Q \in S_p$ с двумя входами высоты $\leqslant p+1$. Во все моменты кроме p он работает как единичная задержка того, что подаётся на первый вход, а в момент времени p он выдаёт то, что подавалось на второй вход в момент времени p. Тогда нетрудно убедиться, что $Q(x, T_0(x))$ во все моменты времени работает как единичная задержка. Следовательно, $[S_p \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ и утверждение доказано.

Утверждение 4. *L_1, L_2, L_3, L_4 — предполные классы в $\mathcal{P}_a$.*

Доказательство утверждения 4. Сначала докажем для L_1, L_2 и L_3.

Рассмотрим $D_1, D_2, D_3 \subset E$. D_1 — множество сверхслов вида aba^∞, D_2 — множество сверхслов вида bba^∞, D_3 — множество сверхслов вида $b(ba)^\infty$.

Нетрудно убедиться, что L_i — класс G-сохранения D_i для $i = 1, 2, 3$. Значит, L_1, L_2 и L_3 — замкнутые классы. При этом они не совпадают с $\mathcal{P}_a$, так как единичная задержка не G-сохраняет D_i.

Докажем, что L_1, L_2 и L_3 — предполные классы. Пусть автомат T с n входами не принадлежит L_i. Докажем, что $[L_i \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$. Пусть высота автомата T равна h, а F — множество слов γ длины $h+2$ таких, что для какого-то $\delta \in E$ сверхслово $inv(\gamma)\delta \in D_i$. Так как T не G-сохраняет D_i, то существуют $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in D_i$ такие, что $G_T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \beta \notin D_i$. Для $j = 1, 2, \ldots, n$ рассмотрим автоматы высоты 1 с одним входом R_j. Если $\alpha_j(2) = 0$, $\alpha_j(3) = 0$, то R_j выдаёт константу 0 в любой момент времени, если $\alpha_j(2) = 1$, $\alpha_j(3) = 1$, то R_j выдаёт константу 1 в любой момент времени, если $\alpha_j(2) = 0$, $\alpha_j(3) = 1$, то R_j тождественный автомат, если $\alpha_j(2) = 1$, $\alpha_j(3) = 0$, то R_j отрицание тождественного автомата. Тогда нетрудно убедиться, что $T_0(x) = T(R_1(x), R_2(x), \ldots, R_n(x)) \notin L_i$. Рассмотрим автомат $Q \in L_i$ с 3 входами высоты $\leqslant h+2$. В моменты времени с 1 по $h+1$ автомат работает как единичная задержка того, что подаётся на первый вход. Определим функцию f_{h+2} этого автомата. $f_{h+2}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ равно $\gamma_1(h)$, если $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in F$, и равно $\gamma_1(h+1)$ иначе. Нетрудно убедиться, что $Q \in L_i$. Покажем, что автомат $Q_0(x) = Q(x, T_0(x), T_0(\overline{x}))$ является единичной задержкой.

Рассмотрим произвольное слово γ длины $t \geqslant h+2$ и докажем, что слово $\epsilon = Q_0(\gamma)$ заканчивается на $\gamma(t-1)$. Пусть $\alpha_1 = [_{h+2}\gamma$, $\alpha_2 = [_{h+2}T_0(\gamma)$, и $\alpha_3 = [_{h+2}T_0(\overline{\gamma})$. Если $\alpha_1 \notin F$, $\alpha_2 \notin F$ или $\alpha_3 \notin F$, то утверждение очевидно. Предположим, что это не так. Если α_1 равно 0^{h+2} или 1^{h+2}, то $\epsilon(t) = \alpha_1(h) = \alpha_1(h+1) = \gamma(t-1)$. Пусть $\alpha_1 \in F$, $\alpha_1 \neq 0^{h+2}$, $\alpha_1 \neq 1^{h+2}$. Так как $T_0 \notin L_i$, то α_2 или α_3 не принадлежит F, а мы предположили, что это не так. Значит, в $[L_i \cup \{T\}]$ есть единичная задержка и $[L_i \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$.

Теперь докажем, что L_4 замкнут. Рассмотрим автоматы $T_1, T_2, \ldots, T_n \in L_4$, а также автомат с n входами $T \in L_4$. Обозначим $T_0 = T(T_1, T_2, \ldots, T_n)$. Докажем, что $T_0 \in L_4$. Для простоты изложения будем считать, что автоматы $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — автоматы с одним входом. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in E_2$, тогда для для любого i найдутся такие $c_i, d_i \in E_2$, что $G_{T_i}(b_i a_i{}^\infty) = c_i d_i{}^\infty$, $G_{T_i}(b_i{}^\infty) = c_i{}^\infty$. Так как $T \in L_4$, то найдутся такие $e, f \in E_2$, что $G_T(c_1 d_1{}^\infty, c_2 d_2{}^\infty, \ldots, c_n d_n{}^\infty) = e f^\infty$, $G_{T_i}(c_1{}^\infty, c_2{}^\infty, \ldots, c_n{}^\infty) = e^\infty$. То есть мы доказали, что для произвольных a_i, b_i сверхслово $G_{T_0}(a_1 b_1{}^\infty, a_2 b_2{}^\infty, \ldots, a_n b_n{}^\infty) = e f^\infty$, а сверхслво $G_{T_0}(a_1{}^\infty, a_2{}^\infty, \ldots, a_n{}^\infty) = e^\infty$. Значит, $T_0 \in L_4$ и класс L_4 замкнутый. При этом очевидно, что он не полный, так как не содержит единичную задержку.

Докажем, что L_4 — предполный класс. Пусть автомат T с n входами не принадлежит L_4. Докажем, что $[L_4 \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$. Пусть высота автомата T равна h. Так как $T \notin L_4$, то существуют такие $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in E_2$, что $G_T(b_1a_1{}^\infty, b_2a_2{}^\infty, \ldots, b_na_n{}^\infty) = cd^\infty$, $G_T(b_1{}^\infty, b_2{}^\infty, \ldots, b_n{}^\infty) = e^\infty$, причём $c \neq e$. Для $j = 1, 2, \ldots, n$ рассмотрим автоматы высоты 1 с одним входом R_j. Если $a_j = 0$, $b_j = 0$, то R_j выдаёт константу 0 в любой момент времени, если $a_j = 1$, $b_j = 1$, то R_j выдаёт константу 1 в любой момент времени, если $a_j = 0$, $b_j = 1$, то R_j тождественный автомат, если $a_j = 1$, $b_j = 0$, то R_j отрицание тождественного автомата. Тогда нетрудно убедиться, что автомат $T_0(x) = T(R_1(x), R_2(x), \ldots, R_n(x)) \notin L_4$. Пусть $T_0(01^\infty) = c_1d_1^\infty$, а $T_0(10^\infty) = c_2d_2^\infty$. Так как $T_0 \notin L_4$, то $c_1 \neq d_2$ или $c_2 \neq d_1$. Поэтому найдётся булева функция $f(x_1, x_2, x_3)$ такая, что $f(0, c_1, c_2) = 1$, $f(1, d_1, d_2) = 1$, $f(1, c_2, c_1) = 0$, $f(0, d_2, d_1) = 0$. Рассмотрим автомат $S(x) = f(x, T_0(x), T_0(\overline{x}))$. Нетрудно убедиться, что $G_S(01^\infty) = 1^\infty$, а $G_S(10^\infty) = 0^\infty$. Заметим, что высота автомата S меньше либо равна высоте автомата T, то есть меньше либо равна h.

Пусть F — множество слов γ длины $h+1$ вида a^hb, где $a, b \in E_2$. Рассмотрим автомат $Q \in L_4$ с 2 входами высоты $\leqslant h+1$. В моменты времени с 1 по h автомат работает как единичная задержка того, что подаётся на первый вход. Определим функцию f_{h+1} этого автомата. $f_{h+1}(\gamma_1, \gamma_2)$ равно $\gamma_2(h{+}1)$, если $\gamma_1 \in F$, и равно $\gamma_1(h)$ иначе. Нетрудно убедиться, что $Q \in L_4$. Покажем, что автомат $Q_0(x) = Q(x, S(x))$ является единичной задержкой. Рассмотрим произвольное слово γ длины $t \geqslant h+1$ и докажем, что слово $\epsilon = Q_0(\gamma)$ заканчивается на $\gamma(t-1)$. Если $[_{h+1}\gamma \notin F$, то это очевидно. Если $[_{h+1}\gamma = a^hb \in F$, то $S(\gamma)$ заканчивается на $a = \gamma(t{-}1)$, значит, автомат Q_0 во все моменты времени работает как единичная задержка. То есть в $[L_4 \cup \{T\}]$ есть единичная задержка и $[L_4 \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$. Утверждение доказано.

Утверждение 5. R_d^C *— замкнутый класс в* $\mathcal{P}_a$*, не совпадающий с* $\mathcal{P}_a$*. Пусть к тому же выполнены следующие условия:*

1) *если* $\alpha \in C$ *имеет наименьший период* d *и* $(\circlearrowright_r \alpha) \in C$, *тогда для любого* $\beta \in C$ $(\circlearrowright_r \beta) \in C$.
2) *если* C *содержит слово с наименьшим периодом* e, $1 < e < d$, *то* C *содержит все слова периода* e.

Тогда R_d^C *— предполный класс в* $\mathcal{P}_a$.

Доказательство утверждения 5. Класс R_d^C совпадает с $\mathcal{U}_G(C)$, а значит, из леммы 1 следует, что R_d^C замкнутый класс. Также очевидно, что $P_2 \subset R_d^C$. Покажем, что он не совпадает с $\mathcal{P}_a$. По определению существует $\alpha \in C$ с наименьшим периодом e и слово $\beta \notin C$ с периодом e. Построим автомат $T \notin R_d^C$ с одним входом высоты $\leqslant d$. Определим функцию f_d соответствующую автомату T. $f_d(a(1), a(2), \ldots, a(d)) = 1$, тогда и только тогда, когда $a(d)a(d-1)\ldots a(1) = \circlearrowright_{r-1} \alpha$ и $\beta(r) = 1$ для какого-то $1 \leqslant r \leqslant d$. Тогда очевидно, что $G_T(\alpha^\infty) = \beta^\infty$, а значит, $T \notin R_d^C$ и $R_d^C \neq \mathcal{P}_a$.

Теперь докажем вторую часть утверждения. Будем считать, что если $\alpha \in C$ имеет наименьший период d и $(\circlearrowright_r \alpha) \in C$, тогда для любого $\beta \in C$ $(\circlearrowright_r \beta) \in C$. А также если C содержит слово с наименьшим периодом e, $1 < e < d$, то C содержит все слова периода e. Докажем, что R_d^C — предполный класс в $\mathcal{P}_a$. По определению найдется такое e, что в C есть слово α с наименьшим периодом e, но C содержит не все слова периода e. Отсюда, а также из условия 2 очевидно следует, что $e = d$, то есть в C есть слово с наименьшим периодом d.

Докажем, что для любого слова $\alpha \in C$ с наименьшим периодом d и любого слова $\beta \in C$ существует автомат $T_{\alpha\beta} \in R_d^C$ с одним входом высоты $\leqslant d$ такой, что $G_{T_{\alpha\beta}}(\alpha^\infty) = \beta^\infty$. Определим функцию f_d, соответствующую автомату $T_{\alpha\beta}$. $f_d(a(1), a(2), \ldots, a(d)) = 1$ тогда и только тогда, когда $a(d)a(d-1)\ldots a(1) = \circlearrowright_{r-1} \alpha$ и $\beta(r) = 1$ для какого-то $1 \leqslant r \leqslant d$. Покажем, что автомат $T_{\alpha\beta}$ G-сохраняет C. Пусть $\delta \in C$, $\delta \neq \circlearrowright_r \alpha$ для любого $0 \leqslant r \leqslant d-1$. Нетрудно убедиться, что $G_{T_{\alpha\beta}}(\delta^\infty) = 0^\infty$. Если же $\delta \in C$, $\delta = \circlearrowright_r \alpha$, то $G_{T_{\alpha\beta}}(\delta^\infty) = (\circlearrowright_r \beta)^\infty$, а $(\circlearrowright_r \beta) \in C$. То есть автомат $T_{\alpha\beta} \in R_d^C$ построен.

Пусть автомат T с n входами высоты h не принадлежит R_d^C. Тогда существуют такие $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in C$, что $G_T({\alpha_1}^\infty, {\alpha_2}^\infty, \ldots, {\alpha_n}^\infty) = \delta^\infty$, $\delta \notin C$. Для любого $\alpha \in C$ с наименьшим периодом d построим автомат $Q_\alpha(x) = T(T_{\alpha\alpha_1}(x), T_{\alpha\alpha_2}(x), \ldots, T_{\alpha\alpha_n}(x))$. Нетрудно убедиться, что $G_{Q_\alpha}((\alpha)^\infty) = \delta^\infty$. Для $\alpha \notin C$ и α с наименьшим периодом меньше d будем считать, что автомат Q_α — тождественная константа 0.

Пусть F_r — множество слов γ длины $h+2d$ таких, что для каких-то $\delta \in E$, $\zeta \in C$ сверхслово $(inv(\gamma))\delta = (\circlearrowleft_r \zeta)^\infty$. Другими словами, если слово γ перевернуть, то оно является куском какого-то сверхслова ζ^∞, причём $\zeta \in C$, а сдвиг равен r. Если в определении F_r потребовать, чтобы наименьший период ζ был равен d, то мы определим множество F'_r.

Определим автомат $R \in R_d^C$ с 2^d+1 входом высоты $\leqslant h+2d$. В моменты времени с 1 по $h+2d-1$ автомат работает как единичная задержка того, что подаётся на вход номер 2^d+1. Определим функцию f_{h+2d} этого автомата на произвольных словах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^d+1} \in {E_2}^{h+2d}$. $f_{h+2d}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^d+1})$ равно 0, если существует такое $0 \leqslant r \leqslant d-1$, что для любого $1 \leqslant j \leqslant 2^d$ слово $\alpha_j \in F_r$, а $\alpha_{2^d+1} \in F'_r$, и равно $\alpha_{2^d+1}(h+2d-1)$ иначе. Нетрудно убедиться, что $R \in R_d^C$.

Пронумеруем элементы ${E_2}^d$ числами от 1 до 2^d. Построим автомат W с помощью операции суперпозиции из вышеперечисленных автоматов. На i-ый вход автомата R подадим выход из автомата Q_α, где α соответствует числу i. На вход в каждый автомат Q_α, а также на 2^d+1 вход автомата R будем подавать выход с тождественного автомата.

Покажем, что W работает как единичная задержка. Рассмотрим произвольное слово γ длины $t \geqslant h+2d$ и подадим его на вход автомата W. Пусть на i-ый вход автомата R поступает в этом случае слово α_i. Докажем, что слово $W(\gamma)$ заканчивается на $\gamma(t-1)$.

Это очевидно, если не существует такого $0 \leqslant r \leqslant d-1$, что для любого $1 \leqslant j \leqslant 2^d$ слово $[_{h+2d}\alpha_j \in F_r$, а $[_{h+2d}\alpha_{2^d+1} \in F'_r$. Значит, такое r существует. Для какого-то $\alpha \in C$ с наименьшим периодом d верно равенство $]_d inv(\gamma) = \circlearrowleft_r \alpha$. Рассмотрим $1 \leqslant j \leqslant 2^d$, соответствующее этому α. Так как высота автомата $Q_\alpha \leqslant h+d$, то легко убедиться, что $[_{h+2d}Q_\alpha(\gamma) \notin F_r$. Следовательно, $[_{h+2d}\alpha_j \notin F_r$, получили противоречие. Значит, $W(\gamma)$ заканчивается на $\gamma(t-1)$ и автомат W во все моменты времени работает как единичная задержка. То есть $[R_d^C \cup \{T\}] = \mathcal{P}_a$ и утверждение доказано.

Утверждение 6. *Если R_d^C — не предполный класс, то существует d',делящее d, и $C' \subset {E_2}^{d'}$ такое, что $R_d^C \subset R_{d'}^{C'}$ и $R_{d'}^{C'}$ — предполный класс.*

Доказательство утверждения 6. Обозначим $d_0 = d$, $C_0 = C$. Будем строить последовательность $R_{d_0}^{C_0} \subset R_{d_1}^{C_1} \subset R_{d_2}^{C_2} \subset \ldots$, где d_1 делит d_0, d_2 делит d_1, и так далее.

Пусть мы уже построили d_i и C_i, причём $R_{d_i}^{C_i}$ — не предполный класс. Построим d_{i+1} и C_{i+1}. Возможны два варианта:

1) Для какого-то $\alpha \in C_i$ с наименьшим периодом d_i слово $\circlearrowright_r \alpha \in C_i$, но для $\beta \in C_i$ слово $\circlearrowright_r \beta \notin C_i$. Тогда $d_{i+1} = d_i$. Рассмотрим множество $C_{i+1} \subset C_i$, состоящее из всех таких $\gamma \in {E_2}^{d_i}$, что для какого-то автомата с одним входом $T \in R_{d_i}^{C_i}$ выполняется $G_T(\alpha^\infty) = \gamma^\infty$. Покажем, что $C_{i+1} \neq C_i$. Предположим, что это не так, тогда α, $(\circlearrowright_r \alpha)$, $\beta \in C_{i+1}$, $(\circlearrowright_r \beta) \notin C_{i+1}$. Так как $\beta \in C_{i+1}$, то для какого-то автомата с одним входом $T \in R_{d_i}^{C_i}$ выполняется $G_T(\alpha^\infty) = \beta^\infty$. Аналогично, так как $\circlearrowright_r \alpha \in C_{i+1}$, то для какого-то автомата $R \in R_{d_i}^{C_i}$ выполняется $G_R((\alpha)^\infty) = (\circlearrowright_r \alpha)^\infty$. Значит, для автомата с одним входом $T_0(x) = T(R(x))$ верно равенство $G_{T_0}((\alpha)^\infty) = (\circlearrowright_r \beta)^\infty$. Но $(\circlearrowright_r \beta) \notin C_{i+1}$, получили противоречие, значит, $C_{i+1} \neq C_i$. Так как $C_{i+1} \subset C_i$ и $P_2 \subset R_{d_i}^{C_i}$, то нетрудно убедиться, что d_{i+1} и C_{i+1} определяют замкнутый класс $R_{d_{i+1}}^{C_{i+1}}$, причём $R_{d_i}^{C_i} \subset R_{d_{i+1}}^{C_{i+1}}$.
2) C_i содержит слово с наименьшим периодом e, $1 < e < d_i$, но C_i содержит не все слова периода e, тогда $d_{i+1} = e$. Рассмотрим множество $C_{i+1} \subset {E_2}^{d_{i+1}}$, состоящее из всех таких $\gamma \in {E_2}^{d_{i+1}}$, что $\gamma^{d_i/d_{i+1}} \in C_i$. Так как для любого автомата T отображение G_T переводит сверхслова с периодом d_{i+1} в сверхслова с периодом d_{i+1}, то нетрудно убедиться, что d_{i+1} и C_{i+1} определяют замкнутый класс $R_{d_{i+1}}^{C_{i+1}}$, причём $R_{d_i}^{C_i} \subset R_{d_{i+1}}^{C_{i+1}}$.

То есть возможны два варианта: $d_{i+1} < d_i$ или $C_{i+1} \subset C_i$ и $d_{i+1} = d_i$. Это значит, что в последовательности $R_{d_0}^{C_0} \subset R_{d_1}^{C_1} \subset R_{d_2}^{C_2} \subset \ldots$ ни один элемент не повторяется и эта последовательность конечная, потому что различный классов $R_{\widetilde{d}}^{\widetilde{C}}$ с $\widetilde{d} \leqslant d$ конечное число. Осталось в качестве d' и C' взять последний элемент этой последовательности. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 2 основывается на следующих леммах.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{Z}$ — система подмножеств множества всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ такая, что если $N_1, N_2 \in \mathfrak{Z}$, то $\mathbb{N} \setminus N_1, N_1 \cap N_2, N_1 \cup N_2 \in \mathfrak{Z}$. Тогда $\mathbb{N}$ можно разбить на непересекающиеся множества $\mathbb{N} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \ldots$ так, что для любого $C \in \mathfrak{Z}$ и любого конечного множества $S \subset \mathbb{N}$ существует такое $D = M_{i_1} \cup \ldots \cup M_{i_t}$, что $D \cap S = C \cap S$. И наоборот, для любого $D = M_{i_1} \cup \ldots \cup M_{i_t}$ и любого конечного множества $S \subset \mathbb{N}$ существует такое $C \in \mathfrak{Z}$, что $D \cap S = C \cap S$.*

Доказательство. Построим в явном виде последовательность множеств M_i.

$$M_1 = \{a | \forall K \in \mathfrak{Z} \quad (1 \in K \Longleftrightarrow a \in K)\}.$$

Пусть мы уже построили множества $M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}$. Построим M_i. Пусть c — наименьшее число в $\mathbb{N} \setminus M_1 \ldots \setminus M_{i-1}$. Если это множество пусто и такого c не найдётся, то в последовательности M_i больше нет элементов и она конечна. Иначе

$$M_i = \{a | \forall K \in \mathfrak{Z} \quad (c \in K \Longleftrightarrow a \in K)\}.$$

Эти множества, очевидно, не пересекаются, а их объединение составляет $\mathbb{N}$.

Пусть $C \in \mathfrak{Z}$ и конечное множество $S \subset \mathbb{N}$. Выделим из последовательности M_i все такие множества M_j, что $M_j \cap S \cap C \neq \varnothing$. Очевидно, что их будет конечное число. Пусть это $M_{i_1}, \ldots, M_{i_t}$, докажем, что для $D = M_{i_1} \cup \ldots \cup M_{i_t}$ выполняется $D \cap S = C \cap S$. Пусть $b \in C, b \in S$. Так как $\mathbb{N} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \ldots$, то $b \in M_j$ для какого-то j и $b \in M_j \cap S \cap C$, то есть $M_j \subset D$ и $b \in D$. Теперь пусть $b \in D, b \in S$. Докажем, что $b \in C$. Для какого-то j выполняется $b \in M_j$. Так как $M_j \subset D$, то найдётся $d \in M_j \cap S \cap C$. По определению

$$M_j = \{a | \forall K \in \mathfrak{Z} \quad (c \in K \Longleftrightarrow a \in K)\}.$$

Так как $d \in C$, то $c \in C$, а значит, $b \in C$. То есть мы доказали, что $D \cap S = C \cap S$.

Теперь пусть $D = M_{i_1} \cup \ldots \cup M_{i_t}$ и конечное множество $S \subset \mathbb{N}$. Для того чтобы доказать, что существует такое $C \in \mathfrak{Z}$, что $D \cap S = C \cap S$ нам достаточно доказать, что для любого M_j существует такое $C_j \in \mathfrak{Z}$, что $M_j \cap S = C_j \cap S$. Тогда $C = C_{i_1} \cup \ldots \cup C_{i_t}$. Рассмотрим c из определения M_j. Так как с каждым множеством $K \in \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}$ содержит $\mathbb{N} \setminus K$, то для любого $b \in S \setminus M_j$ существует $A_b \in \mathfrak{Z}$ такое, что $c \in A_b$, $b \notin A_b$. Тогда $C_j = \bigcap\limits_{b \in S \setminus M_j} A_b$ и $C_j \cap S = M_j \cap S$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть B — подмножество $\mathcal{P}_a$, не являющееся подмножеством никакого M_{pq}, $P_2 \subset B$. Тогда для любых s и N таких, что $N \geqslant s$, существует автомат без входов $T_{sN} \in [B]$ такой, что его функция выхода*

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant t \leqslant N, t \neq s, \\ 1, & t = s. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть A — множество таких элементов $\alpha \in E$, для которых существует автомат с одним входом $T \in [B]$ такой, что $T(0^\infty) = \alpha$.

Каждому элементу E естественным образом сопоставим подмножество множества $\mathbb{N}$, а множеству A систему $\widetilde{A}$ подмножеств $\mathbb{N}$. Другими словами все элементы сверхслова пронумерованы элементами множества $\mathbb{N}$. Если множество $C \subset \mathbb{N}$ соответствует сверхслову $\alpha \in E$, то $i \in C$ равносильно тому, что на i-ом месте в α стоит 1.

Так как в $[B]$ есть конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, то для любых $A_1, A_2 \in \widetilde{A}$ множества $A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, \mathbb{N} \setminus A_1 \in \widetilde{A}$. Из леммы 2 получим $\mathbb{N} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \ldots$. Найдём минимальное k_2 такое, что для каких-то l и $k_1 < k_2$ числа $k_1, k_2 \in M_l$. Тогда нетрудно убедиться, что $B \subset M_{k_1 k_2}$. Если же такого k_2 не найдётся, то в каждом множестве M_i ровно 1 элемент. Для определённости можно считать, что $M_i = \{i\}$.

Рассмотрим произвольные s и $N \geqslant s$. Для $D = M_s = \{s\}$, $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ из леммы 2 следует, что существует $C \in \widetilde{A}$ такое, что $C \cap S = \{s\}$. Множеству C соответствует сверхслово $\alpha \in A$, а этому сверхслову соответствует автомат T такой, что $T(0^\infty) = \alpha$. Но константа 0 принадлежит B, значит, в качестве $T_{sN} \in [B]$ можно взять $T(0)$ и лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть B — подмножество $\mathcal{P}_a$, не являющееся подмножеством никакого M_{pq}, $P_2 \subset B$. Тогда для любого N и любого $S \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ существует автомат без входов $T \in [B]$ такой, что*

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant t \leqslant N, t \notin S, \\ 1, & t \in S. \end{cases}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что искомый автомат $T = \bigvee\limits_{t \in S} T_{tN}$.

Лемма 4. *Пусть B — подмножество $\mathcal{P}_a$, не являющееся подмножеством никакого M_{pq}, S_p и $M_{1\infty}$, $P_2 \subset B$. Тогда для любого s существует $N > s$ и автомат без входов $S_{sN} \in [B]$ такой, что*

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant t \leqslant s, \\ 1, & t > N. \end{cases}$$

Доказательство. Сначала докажем, что для любого t существует $N_t > t$ и автомат без входов $K_{tN_t} \in [B]$ с функцией выхода

$$y(j) = \begin{cases} 0, & j = t, \\ 1, & j > N_t. \end{cases}$$

Для любого t построим автомат $T \in B$ такой, что для каких-то $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{t-1}, \vec{a} \in {E_2}^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}) \neq f_t(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{t-1}, \vec{a}).$$

Если $t = 1$, то возьмём произвольный $T \notin M_{1\infty}$. Для какого-то $\vec{a} \in {E_2}^{n(T)}$

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}) \neq f_1(\vec{a}).$$

Если $t > 1$, то возьмём автомат $T \notin S_t$. Для каких-то $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_t, \vec{b} \in {E_2}^{n(T)}$.

$$f_t(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{t-2}, \vec{a}_{t-1}, \vec{a}_t) \neq f_t(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{t-2}, \vec{b}, \vec{a}_t).$$

А значит, либо левая часть, либо правая часть не равна $f_{h(T)}(\vec{a}_t, \vec{a}_t, \ldots, \vec{a}_t)$.

Пусть $n(T) = 1$. Из следствия 1 следует, что существует автомат без входов $R \in [B]$ такой, что $y(i) = a_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant t-1$ и $y(t) = a$. Если в качестве выхода автомат R возвращает сверхслово вида $a_1 a_2 a_3 \dots a_{t-1} a \gamma b^\infty$ и $b \neq a$, то в качестве автомата K_{tN_t} возьмём R или $\overline{R}$. Иначе, не трудно убедиться в том, что в качестве автомата K_{tN_t} можно взять $T(R)$ или $\overline{T(R)}$. Аналогично, если $n(T) > 1$, то по следствию 1 найдём $n(T)$ автоматов $R_1, \dots, R_{n(T)}$ и в качестве K_{tN_t} будем брать или R_i, или $\overline{R_i}$ для какого-то i, или $T(R_1, R_2, \dots, R_{n(T)})$, или $\overline{T(R_1, R_2, \dots, R_{n(T)})}$. То есть мы доказали, что существует $K_{tN_t} \in [B]$. Но $S_{sN} = \bigwedge\limits_{t \leqslant s} K_{tN_t}$, где $N = \max\limits_{t \leqslant S} N_t$. Что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Пусть B — подмножество $\mathcal{P}_a$, не являющееся подмножеством никакого S_p и M_{pq}, $P_2 \subset B$. Тогда для любого $s \geqslant 2$ существует автомат с одним входом $U_s \in [B]$ такой, что $y(s) = x(s-1)$.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что существует автомат $T \in B$ такой, что $T \notin S_s$. А значит, для этого автомата

$$f_s(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{s-2}, \vec{a}_{s-1}, \vec{a}_s) \neq f_s(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{s-2}, \vec{b}, \vec{a}_s)$$

для каких-то $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b} \in {E_2}^{n(T)}, \vec{b} \neq \vec{a}_{s-1}$. Пусть $n(T) = 1$. Из следствия 1 следует, что существует автомат без входов $R \in [B]$ такой, что $y(i) = a_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant t$. Рассмотрим автомат $Q(x) = T(R \oplus (T_{s-1,s}(x) \wedge x))$, где $\oplus$ — сложение по модулю 2, $T_{s-1,s}$ — автомат из леммы 3. Тогда нетрудно убедиться, что либо автомат Q, либо автомат $\overline{Q}$ искомый. Если $n(T) > 1$, то по следствию 1 найдём $n(T)$ автоматов $R_1, \dots, R_{n(T)}$, будем добавлять $T_{s-1,s}(x) \wedge x$ к R_i только для таких i, для которых $\vec{b}^{(i)} \neq \vec{a}^{(i)}_{s-1}$. Подставив полученные автоматы в T, мы и получим искомый автомат Q или $\overline{Q}$. Что и требовалось доказать.

Будем говорить, что $C \subset \mathcal{P}_a$ отличает α_1 от α_2, если в C есть автомат T с одним входом высоты $\leqslant \min(|\alpha_1|, |\alpha_2|)$ такой, что $f_{h(T)}(inv(]_{h(T)}\alpha_1)) \neq f_{h(T)}(inv(]_{h(T)}\alpha_2))$.

Лемма 6. *Пусть $B \subset \mathcal{P}_a$, $P_2 \subset B$ и в $[B]$ нет автомата с одним входом W такого, что $f_{h(W)}(a_1, \dots, a_{h(W)-1}, a_{h(W)}) = a_{h(W)-1}$ для* *любых* $a_1, \ldots, a_{h(W)} \in E_2$. *Тогда существуют* α *и* β *из* E, *не отличимые множеством* $[B]$, *такие, что* $\alpha(1) = \beta(1)$ *и* $\alpha(2) \neq \beta(2)$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Определим множества $D_r \subset ({E_2}^r)^2$. Для $\alpha, \beta \in {E_2}^r$ пара (α, β) принадлежит D_r тогда и только тогда, когда $\alpha(1) = \beta(1)$, $\alpha(2) \neq \beta(2)$, и $[B]$ не отличает α от β.

Теперь докажем, что D_r не пустое для любого r. Пусть $D_r = \varnothing$, тогда для любых $\alpha, \beta \in {E_2}^r$ таких, что $\alpha(1) = \beta(1)$, $\alpha(2) \neq \beta(2)$, в $[B]$ есть автомат $Q_{\alpha,\beta}$ с одним входом высоты $h \leqslant r$ отличающий α и β. Так как в $[B]$ есть отрицание, то без ограничения общности можно считать, что $f_h(inv(]_h\alpha)) = 0$, а $f_{h(T)}(inv(]_{h(T)}\beta)) = 1$. Также определим $Q_{\alpha,\beta}$, если $\alpha(1) \neq \beta(1)$, $\alpha(2) \neq \beta(2)$. В этом случае в качестве $Q_{\alpha,\beta}$ возьмём либо тождественный автомат, либо отрицание тождественного автомата, чтобы $f_1(\alpha(1)) = 0$, а $f_1(\beta(1)) = 1$.

Рассмотрим автомат $W(x) = \bigwedge\limits_{\alpha} \bigvee\limits_{\beta} Q_{\alpha,\beta}(x)$, в котором конъюнкция берётся по всем $\alpha \in {E_2}^r$ таким, что $\alpha(2) = 0$, дизъюнкция по всем $\beta \in {E_2}^r$ таким, что $\beta(2) = 1$. Нетрудно убедиться, что W удовлетворяет условиям леммы, получили противоречие. Значит, D_r не пустое для любого r.

Для $(\alpha', \beta') \in D_{r-1}$, $(\alpha, \beta) \in D_r$ будем говорить, что $(\alpha', \beta') \prec (\alpha, \beta)$, если $\alpha' =]_{r-1}\alpha$ и $\beta' =]_{r-1}\beta$. Очевидно, что если $(\alpha, \beta) \in D_r$, то $(]_{r-1}\alpha,]_{r-1}\beta) \in D_{r-1}$ и $(]_{r-1}\alpha,]_{r-1}\beta) \prec (\alpha, \beta)$. Тогда из леммы Кёнига [5] следует, что существует бесконечная последовательность $(\alpha_1, \beta_1) \prec (\alpha_2, \beta_2) \prec \ldots$, где $(\alpha_i, \beta_i) \in D_i$ для любого i. Пусть $\alpha = \alpha_1(1)\alpha_2(2)\ldots\alpha_i(i)\ldots$, и $\beta = \beta_1(1)\beta_2(2)\ldots\beta_i(i)\ldots$. Покажем, что α не отличимо от β множеством $[B]$. Предположим, что их можно отличить автоматом $T \in [B]$ высоты r, но $(]_r\alpha,]_r\beta) \in D_r$, получили противоречие, а значит, лемма доказана.

Для $\alpha \in E$ обозначим $A_{\alpha,B}$ — множество сверхслов $\gamma \in E$ таких, что существует автомат $T \in [B]$ с одним входом такой, что $G_T(\alpha) = \gamma$. Тогда верна следующая лемма.

Лемма 7. *Для любого* $B \subset P_a$ *и любого* $\alpha \in E$ *каждый автомат из* B G*-сохраняет* $A_{\alpha,B}$.

Доказательство. Рассмотрим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A_{\alpha,B}$ и любой автомат $T \in B$ с n входами, докажем, что $G_T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A_{\alpha,B}$. Из определения следует, что существуют автоматы с одним входом $R_1, R_2, \ldots, R_n \in [B]$ такие, что $\alpha_i = G_{R_i}(\alpha)$. Рассмотрим автомат $Q(\gamma) = T(R_1(\gamma), R_2(\gamma), \ldots, R_n(\gamma))$. Очевидно, что $Q \in [B]$, $G_Q(\alpha) = G_T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, а значит, $G_T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A_{\alpha,B}$. Что и требовалось доказать.

Определение 5. Для $h > 1$ говорим, что множество автоматов B обладает h-свойством, если $P_2 \subset B$, $B \subset {\mathcal{P}_a}^h$ и B не является подмножеством L_1, L_2, L_3, L_4 и R_d^C для $d < (2h^2)^{4h}$.

Рассмотрим произвольное B, обладающее h-свойством, и произвольное $A \subset E$ такое, что B G-сохраняет A. Сопоставим каждому элементу E подмножество $\mathbb{N}$, а множеству A систему $\widetilde{A}$ подмножеств $\mathbb{N}$. Другими словами, все элементы сверхслова пронумерованы элементами множества $\mathbb{N}$. Если множество $C \subset \mathbb{N}$ соответствует $\alpha \in E$, то $i \in C$ равносильно тому, что на i-ом месте в α стоит 1.

Так как в $[B]$ есть конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, то для любых $A_1, A_2 \in \widetilde{A}$ множества $A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, \mathbb{N} \setminus A_1 \in \widetilde{A}$. Из леммы 2 получим $\mathbb{N} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \ldots$. Другими словами, это означает, что мы разбили множество $\mathbb{N}$ на классы эквивалентности, при этом если i эквивалентно j, а $\gamma \in A$, то в γ на i-ом и j-ом местах стоит одно и тоже. Будем говорить, что отображение $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ описывает A, если $g(k_1) = g(k_2)$ равносильно тому, что для любого $\alpha \in A$ выполняется $\alpha(k_1) = \alpha(k_2)$. Множество всех таких отображений обозначим $\mathbb{G}(A)$. Очевидно, что отображение, принимающее на любом элементе множества M_i значение i, принадлежит $\mathbb{G}(A)$. Чтобы задать произвольное такое отображение необходимо и достаточно задать его на множествах $M_1, M_2, \ldots$.

Лемма 8. *Пусть B обладает h-свойством и G-сохраняет $A \subset E$, $g \in \mathbb{G}(A)$. Для любого конечного $S \subset \mathbb{N}$ и любого отображения $\phi : \mathbb{N} \to E_2$ существует $\gamma \in A$ такое, что для любого $i \in S$ на i-ом месте в γ стоит $\phi(g(i))$.*

Доказательство. Рассмотрим систему $\widetilde{A}$ подмножеств $\mathbb{N}$, соответствующую множеству A, и воспользуемся леммой 2. Пусть множество D является объединением тех и только тех M_i, для которых

$M_i \cap S \neq \varnothing$ и $\phi(g(M_i)) = 1$. Тогда по лемме 2 найдётся такое $C \in \widetilde{A}$, что $C \cap S = D \cap S$. Множеству C можно сопоставить $\gamma \in A$. Нетрудно убедиться, что γ удовлетворяет условиям леммы.

Лемма 9. *Пусть B обладает h-свойством и G-сохраняет $A \subset E$, $g \in \mathbb{G}(A)$. Для любого автомата $T \in [B]$ с n входами и любого отображения $\pi : \mathbb{N} \to {E_2}^n$ из равенства $g(a) = g(b)$ следует равенство*

$$f_{h(T)}(\pi(g(a + h(T) - 1)), \ldots, \pi(g(a))) = \\ = f_{h(T)}(\pi(g(b + h(T) - 1)), \ldots, \pi(g(b))). \quad (1)$$

Доказательство. Отображение π можно представить в виде $\pi(a) = (\phi_1(a), \phi_2(a), \ldots, \phi_n(a))$. Для $S = \{a, a+1, \ldots, a+h-1, b, b+1, \ldots, b+h-1\}$ из леммы 8 найдём $\alpha_j \in A$, где $1 \leqslant j \leqslant n$, такие, что для $i \in S$ на i-ом месте в α_j стоит $\phi_j(g(i))$.

Пусть $\gamma = G_T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, тогда так как B G-сохраняет A, то $\gamma \in A$. Так как $g(a) = g(b)$, то в γ на a-ом и b-ом местах стоит одно и тоже. Если записать это равенство в явном виде, то мы и получим равенство 1.

Рассмотрим произвольное $A \subset E$ и $g \in \mathbb{G}(A)$. Определим функцию $u_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом. $u_A(k)$ — минимальное натуральное число l такое, что $g(k+l) = g(k)$. Если такого числа не существует, то считаем, что $u_A(k) = \infty$. Нетрудно убедиться, что функция u_A не зависит от выбора функции g, а зависит только от множества A. Далее мы докажем некоторые свойства функции u_A.

Лемма 10. *Пусть B обладает h-свойством и G-сохраняет $A \subset E$, $g \in \mathbb{G}(A)$. Если $g(a) = g(b)$, $g(a) \neq g(a+1)$ и $u_A(a+1) \geqslant h$, то для какого-то $l \in \{b+1, b+2, \ldots, b+h-1\}$ выполняется $g(l) = g(a+1)$.*

Доказательство. Предположим, что это не так, докажем, что в этом случае $B \subset L_1$. Рассмотрим произвольный автомат $T \in B$ с n входами и произвольные вектора $\vec{a}, \vec{b} \in {E_2}^n$.

Пусть отображение $\pi : \mathbb{N} \to {E_2}^n$ такое, что $\pi(i) = \vec{b}$, если $i = g(a+1)$ и $\pi(i) = \vec{a}$ иначе. Так как $g(a) = g(b)$, то мы можем записать равенство 1. Учитывая, что $h(T) \leqslant h$, $g(a) \neq g(a+1)$, $g(l) \neq g(a+1)$

для $l \in \{b+1, b+2, \dots b+h\}$, нетрудно убедиться, что равенство будет иметь вид:

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Следовательно, $B \subset L_1$, получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть B обладает h-свойством и G-сохраняет $A \subset E$. Тогда $u_A(n+1) \leqslant u_A(n) + h - 1$ для любого n.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $g \in \mathbb{G}(A)$. Если $u_A(n) = \infty$ или $u_A(n+1) < h$, то неравенство очевидно. Пусть $u_A(n) \neq 1$, $u_A(n)$ конечно и $u_A(n+1) \geqslant h$. Применим лемму 10 к $g(n) = g(n + u_A(n))$. Получим, что для какого-то $l \in \{n + u_A(n) + 1, n + u_A(n) + 2, \dots, n + u_A(n) + h - 1\}$ выполняется $g(l) = g(n+1)$. Тогда $u_A(n+1) \leqslant (l - (n+1)) \leqslant n + u_A(n) + h - 1 - (n+1) = u_A(n) + h - 2 < u_A(n) + h - 1$.

Пусть $u_A(n) = 1$, $u_A(n+1) \geqslant h$, докажем, что в этом случае $[B] \subset L_2$. Рассмотрим произвольный автомат $T \in B$ с n входами и произвольные вектора $\vec{a}, \vec{b} \in {E_2}^n$.

Пусть отображение $\pi : \mathbb{N} \to {E_2}^n$ такое, что $\pi(i) = \vec{b}$, если $i = g(n)$ и $\pi(i) = \vec{a}$ иначе. Так как $g(n) = g(n+1)$, то мы можем записать равенство 1. Учитывая, что $h(T) \leqslant h$, $g(l) \neq g(n)$ для $l \in \{a+2, a+3, \dots a+h\}$, нетрудно убедиться, что равенство будет иметь вид:

$$f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}).$$

Следовательно, $[B] \subset L_2$, получили противоречие. Лемма доказана.

Следствие 2. *Если $u_A(n) \neq \infty$, то $u_A(m) \neq \infty$ для любого $m \geqslant n$. Если $u_A(n) = \infty$, то $u_A(m) = \infty$ для любого $m \leqslant n$.*

Лемма 12. *Пусть B обладает h-свойством и G-сохраняет $A \subset E$. Пусть $u_A(n) \neq \infty$, $u_A(n+u_A(n)) \neq 1$, $u_A(n) \geqslant h$, $u_A(n+u_A(n)+1) \geqslant h$ тогда существует $l < h$ такое, что $u_A(n+l) \leqslant u_A(n)$, причём равенство допускается только при $l = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $g \in \mathbb{G}(A)$. Так как $u_A(n+u_A(n)+1) \geqslant h$ $u_A(n+u_A(n)) \neq 1$, то можно применить лемму 10 к $g(n+u_A(n)) = g(n)$. Получим, что для какого-то $l_0 \in \{n+1, n+2, \ldots n+h-1\}$ имеет место $g(l_0) = g(n+u_A(n)+1)$. А отсюда следует, что $u_A(l_0) \leqslant (n+u_A(n)+1-(l_0)) \leqslant n+u_A(n)+1-(n+1) = u_A(n)$. При этом равенство возможно только, если $l_0 = n+1$. Значит, для $l = l_0 - n < h$ выполняется $u_A(n+l) = u_A(l_0) \leqslant u_A(n)$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть B обладает h-свойством и G-сохраняет $A \subset E$, $g \in \mathbb{G}(A)$. Если $u_A(i) = s$ для любого $i \geqslant k$, то для любых $f < q$, таких, что $g(f) = g(q)$, $q - f$ делится на s.*

Доказательство. Утверждение очевидно при $s = 1$, докажем его при $s > 1$. Предположим, что это не так. Можно считать, что $f < k$, иначе утверждение очевидно. Рассмотрим максимальное $f_0 < k$ такое, что для некоторого $q_0 > f_0$ выполняется $g(f_0) = g(q_0)$, $q_0 - f_0$ не делится на s.

Пусть $s = 2$, докажем, что в этом случае $[B] \subset L_3$. Рассмотрим произвольный автомат $T \in B$ с n входами и произвольные вектора $\vec{a}, \vec{b} \in {E_2}^n$.

Пусть отображение $\pi : \mathbb{N} \to {E_2}^n$ такое, что $\pi(i) = \vec{b}$, если для какого-то j выполняется $f_0 < j < k+2$, $i = g(j)$, $j - q_0$ делится на 2, и $\pi(i) = \vec{a}$ иначе. Так как $g(f_0) = g(q_0)$, то мы можем записать равенство 1. Нетрудно убедиться, что равенство будет иметь вид:

$$f_{h(T)}(\ldots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = f_{h(T)}(\ldots, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}).$$

Следовательно, $[B] \subset L_3$, получили противоречие.

Теперь пусть $s > 2$, рассмотрим множество $D \subset {E_2}^s$, состоящее из всех таких элементов ξ, у которых $\xi((f_0 - k) \pmod s) + 1) = \xi((q_0 - k) \pmod s) + 1)$. Нетрудно убедиться, что s и D определяют замкнутый класс R_s^D.

Покажем, что для любого автомата с n входами $T \in B$ и для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in D$ выполняется $T({\alpha_1}^\infty, {\alpha_2}^\infty, \ldots, {\alpha_n}^\infty) = \eta^\infty$, где $\eta \in D$.

Из леммы 8 следует, что можно подобрать такие $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in A$, что $\gamma_j(i) = \alpha_j((i-k) \pmod s) + 1)$ при всех $i \geqslant f_0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть $G_T(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \zeta$. B G-сохраняет A, поэтому $\zeta \in A$. Нетрудно получить, что $\zeta(k+i) = \eta(i+1)$ для $0 \leqslant i < s$. Из соображений периодичности $\zeta(f_0+i) = \zeta(f_0+j)$ для $i = j \pmod s$ и $f_0 \leqslant i < j$. Но $g(f_0) = g(q_0)$, тогда $\zeta(f_0) = \zeta(q_0)$. Значит, $\eta((f_0-k) \pmod s + 1) = \eta((q_0-k) \pmod s + 1)$ и $\eta \in D$. Мы доказали, что $B \subset R_s^D$, но по условию B обладает h-свойством. Получили противоречие, то есть мы показали, что для любых $f < q$ таких, что $g(f) = g(q)$, число $q - f$ делится на s.

Лемма 14. *Пусть B обладает h-свойством и G-сохраняет $A \subset E$. Если $u_A(n) \leqslant 2h^2$ для $n \geqslant m$, то существуют такие $k \geqslant m$ и s, что $u_A(i) = s$ для $i = k, k+1, \ldots, k+4h-1$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $g \in \mathbb{G}(A)$. Покажем, что на множестве $\{m, m+1, m+2, \ldots\}$ функция g принимает не более $2h^2$ различных значений. Предположим, что это не верно, тогда рассмотрим такое $m_1 > m$, что на множестве $\{m, m+1, \ldots, m_1-1\}$ функция g принимает более $2h^2$ различных значений. Так как каждое значение обязательно повторяется, причём не более, чем через $2h^2$, то на множестве $\{g(m_1+1), \ldots, g(m_1+6h^4)\}$ каждое значение встречается по крайней мере $\left[\frac{6h^4}{2h^2}\right] - 1 = 3h^2 - 1$ раз. А по предположению всего значений $\geqslant 2h^2+1$, тогда получаем неравенство $(3h^2-1) * (2h^2+1) \leqslant 6h^4$. Получили противоречие. Значит, на множестве $\{m, m+1, m+2 \ldots\}$ функция g принимает не более $2h^2$ различных значений. Обозначим множество всех таких значений Z.

Для произвольного i рассмотрим слово $g(i)g(i+1)\ldots g(i+4h-1) \in Z^{4h}$. Так как множество Z^{4h} конечно(в нём не более $(2h^2)^{4h}$ различных элементов), то найдутся такие числа $a, b \geqslant m$, что $0 < b - a \leqslant (2h^2)^{4h}$ и $g(a+i) = g(b+i)$ для $i = 0, 1, \ldots, 4h-1$. Пусть при этом b — минимальное число большее a, удовлетворяющее этому условию.

Пусть $b - a = d$, тогда $d \leqslant (2h^2)^{4h}$. C — множество слов $\eta \in {E_2}^d$ таких, что для какого-то $\gamma \in A$ выполняется $\gamma(a+i) = \eta(i+1)$ при всех $0 \leqslant i < d$.

Так как $P_2 \subset B$, то для любых $\eta_1, \eta_2 \in C$ слова $\overline{\eta_1}$, $\eta_1 \vee \eta_2$, $\eta_1 \wedge \eta_2 \in C$. Покажем, что для любого автомата с n входами $T \in B$ и для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in C$ выполняется $T({\alpha_1}^\infty, {\alpha_2}^\infty, \ldots, {\alpha_n}^\infty) = \eta^\infty$, где $\eta \in$

C. По определению существуют $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in A$, такие, что $\gamma_j(a + i) = \alpha_j(i+1)$ при всех $0 \leqslant i < d$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть $G_T(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \zeta$. Так как B G-сохраняет A, то $\zeta \in A$. Все автоматы в B имеют высоту $\leqslant$ h, поэтому из равенства $g(a + i) = g(b + i)$ для $0 \leqslant i < 4h$ следует, что $\zeta(a + i) = \eta(i + 1)$ для $0 \leqslant i < d$. А значит, $\eta \in C$.

d и C не определяют замкнутый класс, так как иначе $B \subset R_d^C$, а B по условию обладает h-свойством. Посмотрим, в каком случае d и C не определяют замкнутый класс. Это возможно, только если для любого l множество C вместе со словом с наименьшим периодом l содержит все слова периода l. Рассмотрим наибольшее l_1 такое, что в C есть слово с наименьшим периодом l_1. Предположим, что $l_1 < d$. Тогда в C должно быть слово с наименьшим периодом l_2, не делящим l_1, иначе все слова в C имели бы период l_1 и $g(a + i) = g(a + l_1 + i)$ для $i = 0, 1, \ldots, 4h - 1$, а b — минимальное число, обладающее этим свойством. Отсюда следует, что в C есть все слова периода l_1 и l_2. Например, $\zeta_1 = (\underbrace{100\ldots00}_{l_1})^{d/l_1}$ и $\zeta_2 = (\underbrace{100\ldots00}_{l_2})^{d/l_2}$ принадлежат C. Но наименьший период слова $\zeta_1 \wedge \zeta_2 \in C$ больше l_1, что противоречит выбору l_1. Значит, в C есть слово с наименьшим периодом d и $C = {E_2}^d$. Тогда функция g ни на каких двух элементах $\{a, a+1, a+2, \ldots, b-1\}$ не принимает одинакового значения. Отсюда сразу делаем вывод, что $u_A(n) = d$ для $n = a, a + 1, \ldots, a + 4h - 1$.

Лемма 15. *Пусть B обладает h-свойством и G-сохраняет $A \subset E$. Тогда функция u_A удовлетворяет одному из следующих пунктов:*

1) $u_A(n) = \infty$ для любого n.

2) Существует $m \geqslant 1$ такое, что $u_A(n) = \infty$ для $n < m$ и $u_A(n) = s$ для $n \geqslant m$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $g \in \mathbb{G}(A)$. Пусть s — минимум $u_A(n)$. Если $s = \infty$, то это первый случай. Иначе, если $s > h$, рассмотрим минимальное n_0 такое, что $u_A(n_0) = s$. Так как $u_A(n_0 + u_A(n_0)) \geqslant s > h > 1$, то из леммы 12 следует, что для какого-то $1 \leqslant l < h$ выполняется $u_A(n_0 + l) \leqslant u_A(n_0) = s$. Но s — минимум $u_A(n)$, значит, $u_A(n_0 + l) = u_A(n_0)$ и $l = 1$. Аналогично применим лемму 12 к n_0+1, и так далее. Получим, что $u_A(n) = s$ для любого $n \geqslant$

n_0. Если $n_0 = 1$, то это 2-ой пункт. Пусть $n_0 > 1$, тогда $u_A(n_0-1) > s$. Предположим, что $u_A(n_0 - 1) \neq \infty$. Пусть $n_1 = n_0 - 1$. Так как $n_1 + u_A(n_1) - s > n_0$, то $u_A(n_1 + u_A(n_1) - s) = s$. Тогда $g(n_1 + u_A(n_1) - s) = g(n_1 + u_A(n_1)) = g(n_1)$, а значит, n_1 и $n_1 + u_A(n_1) - s$ эквивалентны. Но по определению u_A, число $n_1 + u_A(n_1)$ — минимальное число большее n_1 такое, что $g(n_1 + u_A(n_1)) = g(n_1)$. Получили противоречие, значит, $u_A(n_0 - 1) = \infty$. По следствию 2 $u_A(n) = \infty$ для любого $n < n_0$, значит, функция u_A относится ко 2-ому пункту.

Теперь пусть $s \leqslant h$, а n_0 — минимальное число такое, что $u_A(n_0) \leqslant h$. Будем строить последовательность $n_0, n_1, n_2, \ldots$ так, чтобы $u_A(n_i) \leqslant 2h - 1$, а также $n_i - n_{i-1} \leqslant 2h$. Покажем, что её можно построить. Пусть мы уже построили $n_0, \ldots, n_r$. Если $u_A(n_r) \leqslant h$, то из леммы 11 следует, что в качестве n_{r+1} можно взять $n_r + 1$. Если $u_A(n_r + u_A(n_r) + 1) < 2h$, то в качестве n_{r+1} можно взять $n_r + u_A(n_r) + 1$. Если $u_A(n_r + u_A(n_r)) = 1$, то в качестве n_{r+1} можно взять $n_r + u_A(n_r)$. Если $u_A(n_r) > h$ и $u_A(n_r + u_A(n_r) + 1) \geqslant 2h > h$, то можно воспользоваться леммой 12 и в качестве n_{r+1} взять $n_r + l$. Мы получим, что $u(n_{r+1}) = u_A(n_r + l) \leqslant u_A(n_r) < 2h$. Таким образом, последовательность построена. Рассмотрим произвольное $n > n_0$. Существует n_i такое, что $n - n_i < 2h$, и из леммы 11 следует, что $u_A(n_i + j + 1) \leqslant u_A(n_i + j) + h - 1$. А значит, $u_A(n) \leqslant u_A(n_i) + (h-1) * (n - n_i) \leqslant 2h^2$. То есть мы доказали, что для любого $n \geqslant n_0$ выполняется $u_A(n) \leqslant 2h^2$.

Теперь покажем, что для какого-то m_1 выполняется $u_A(n) = s_0$ для любого $n > m_1$. Предположим, что это не так, тогда построим три последовательности $a_1, a_2, \ldots$, $b_1, b_2, \ldots$ и $s_1, s_2, \ldots$. По лемме 14 существует минимальное $a_1 \geqslant n_0$ такое, что существуют b_1 и s_1, для которых $b_1 \geqslant a_1 + 4h$, $u_A(a_1 - 1) \neq s_1$, $u_A(b_1) \neq s_1$, $u_A(j) = s_1$ для $j = a_1, a_1+1, \ldots, b_1-1$. Аналогично рассмотрим минимальное $a_2 > a_1$ такое, что существуют b_2 и s_2 для которых $b_2 \geqslant a_2 + 4h$, $u_A(a_2 - 1) \neq s_2$, $u_A(b_2) \neq s_2$, $u_A(j) = s_2$ для $j = a_2, a_2 + 1, \ldots, b_2 - 1$. И так далее, построим три последовательности. Из леммы 14 следует, что такие последовательности существуют, причём они бесконечны. Для любого i рассмотрим наибольшее n_j такое, что $a_i \leqslant n_j < b_i$. Оно очевидно найдется. Но $u_A(n_j) \leqslant 2h - 1$, значит $s_i \leqslant 2h - 1$ для любого i.

Рассмотрим произвольный i-ый кусок. Для любого $\alpha \in A$ его элементы от a_i-ого до (b_i+s_i-1)-ого повторяются с периодом s_i. Из каждого сверхслова из A удалим s_i элементов от a_i-ого до a_i+s_i-1-ого. Получим множество $A' \subset E$. Так как все автоматы из B имеют высоту $\leqslant h$, а кусок имеет длину большую $4h+s_i-1 > s_i+h$, то B G-сохраняет A'. Посмотрим, чем отличается функция $u_{A'}$ от функции u_A. Для $t \geqslant a_i$ очевидно, что $u_{A'}(t) = u_A(t+s_i)$. Для $t < a_i$ понятно, что $u_A(t)$ может отличаться от $u_{A'}(t)$, только если $u_A(t) > 4h$. При этом $u_{A'}(t) > 4h$, а также $u_{A'}(a_i-1) \neq s_i$. Покажем, что после удаления этого куска не может появиться новый периодический кусок. Предположим, что это не так и кусок от $a_0 \geqslant n_0$ до b_0 с периодом s_0 появился (возможно $b_0 = \infty$ и кусок бесконечный). $s_0 \leqslant 2h-1$, так как всё, доказанное нами для A, верно и для A'. Если $a_0 \geqslant a_i$, то этому куску соответствует, кусок от a_0+s_i до b_0+s_i в A. Для $a_0 \leqslant l < b_0$ число $u_{A'}(l) = s_0 \leqslant 2h-1 \leqslant 4h$, поэтому если $b_0 \leqslant a_i$, то этому куску соответствует, кусок от a_0 до b_0 в A. Иначе $a_0 < a_i < b_0$, но $u(A')(a_i-1) \neq s_i$, а $u(A')(a_i) = u(A)(a_i+s_i) = s_i$. Получили противоречие, следовательно новых кусков появиться не могло. Теперь удалим из каждого куска s_i элементов ровно столько раз, чтобы длина куска была меньше, чем $4h+s_i$, но больше, чем $4h-1$. В оставшемся от A множестве уже не будет периодических кусков длины больше, чем $4h+s_i-1$, так как при удалении элементов новые периодические куски появиться не могли. Но это невозможно, так как оставшееся от A множество не удовлетворяет лемме 14. Получили противоречие. То есть мы доказали, что для какого-то m_1 выполняется $u_A(n) = s_0$ для любого $n > m_1$.

Рассмотрим минимальное m_2 такое, что $u_A(n) = s_0$ для любого $n \geqslant m_2$. Если $m_2 = 1$, то это 2-ой пункт. Пусть $m_2 > 1$, покажем, что $u_A(m_2-1) = \infty$. Предположим, что это не так. Число $u_A(m_2-1)$ не равняется s_0, но по лемме 13 делится на s_0. Значит, $u_A(m_2-1) > s_0$. Но $u_A(n) = s_0$ для любого $n \geqslant m_2$. Значит, $g(m_2-1+u_A(m_2-1)-s_0) = g(m_2-1+u_A(m_2-1)) = g(m_2-1)$. Но по определению $m_2-1+u_A(m_2-1)$ — минимальное число, для которого $g(m_2-1+u_A(m_2-1)) = g(m_2-1)$. Получили противоречие, значит, $u_A(m_2-1) = \infty$. По следствию 2 $u_A(n) = \infty$ для любого $n < m_2$, значит, функция u_A относится ко 2-ому пункту. Лемма доказана.

Теперь перейдём к доказательству основной леммы.

Лемма 16. *Пусть* $P_2 \subset B$, $B \subset {\mathcal{P}_a}^h$, *и* B *не является подмножеством* L_1, L_2, L_3, L_4 *и* R_d^C *для* $d < (2h^2)^{4h}$. *Тогда существует автомат с одним входом* $W \in [B]$ *такой, что* $f_{h(W)}(a_1, \ldots, a_{h(W)-1}, a_{h(W)}) = a_{h(W)-1}$ *для любых* $a_1, \ldots, a_{h(W)} \in E_2$.

Доказательство. Предположим, что это не так, тогда из леммы 6 найдём α и β из E, не отличимые множеством $[B]$, такие, что $\alpha(1) = \beta(1)$ и $\alpha(2) \neq \beta(2)$.

Рассмотрим $A \subset E^2$ — множество пар $(\gamma, \delta) \in E^2$, для каждой из которых существует автомат $T \in [B]$ с одним входом такой, что $G_T(\alpha) = \gamma$ и $G_T(\beta) = \delta$. Будем говорить, что B G-сохраняет $A \subset E^2$, если для любого автомата $T \in B$ с n входами и любых $(\gamma_1, \delta_1), (\gamma_2, \delta_2), \ldots, (\gamma_n, \delta_n) \in A$ выполняется $(G_T(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n), G_T(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)) \in A$. Пусть A_1 — множество таких γ, что для какого-то δ выполняется $(\gamma, \delta) \in A$, аналогично, A_2 — множество таких δ, что для какого-то γ выполняется $(\gamma, \delta) \in A$. Полностью аналогично лемме 7 легко доказать, что B G-сохраняет A.

Пусть $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ и $\mathbb{N}_2 = \{1', 2', 3', \ldots\}$ — два непересекающихся множества, изоморфных множеству натуральных чисел. Рассмотрим их объединение $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, то есть $\widetilde{\mathbb{N}} = \{1, 2, 3, \ldots, 1', 2', 3', \ldots\}$. На множестве $\widetilde{\mathbb{N}}$ введем отношение частичного порядка. На множествах $\mathbb{N}_1$ и $\mathbb{N}_2$ порядок естественный, а между собой элементы этих множеств не сравнимы. Каждому элементу E^2 можно естественным образом сопоставить подмножество $\widetilde{\mathbb{N}}$, а множеству A систему $\widetilde{A}$ подмножеств $\widetilde{\mathbb{N}}$. Другими словами все элементы (γ, δ) пронумерованы элементами множества $\widetilde{\mathbb{N}}$. И множеству $C \subset \widetilde{\mathbb{N}}$ соответствует (γ, δ), если для любого $i \in \widetilde{\mathbb{N}}$ число $i \in C$ тогда и только тогда, когда на i-ом месте в (γ, δ) стоит 1.

Так как в $[B]$ есть конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, то для любых $C_1, C_2 \in \widetilde{A}$ множества $C_1 \cap C_2, C_1 \cup C_2, \widetilde{\mathbb{N}} \setminus C_1 \in \widetilde{A}$. Но $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$ изоморфно $\mathbb{N}$, значит, по лемме 2 $\widetilde{\mathbb{N}} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \ldots$. Другими словами это означает, что мы разбили множество $\widetilde{\mathbb{N}}$ на классы эквивалентности, при этом если i эквивалентно j, а $(\gamma, \delta) \in A$, то в (γ, δ) на i-ом и j-ом местах стоит одно и тоже. Рассмотрим отображение $\widetilde{g} : \widetilde{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ такое, что $\widetilde{g}(k) = l$, если $k \in M_l$. Нетрудно убедиться, что если ограничить функцию $\widetilde{g}$ на множество $\mathbb{N}_1$($\mathbb{N}_2$), то мы получим функцию $g_1 \in \mathbb{G}(A_1)$ ($g_2 \in \mathbb{G}(A_2)$).

Так как α и β не отличимы множеством B, то для любого $(\gamma, \delta) \in A$ выполняется $\gamma(1) = \delta(1)$. А значит, $\widetilde{g}(1) = \widetilde{g}(1')$. Но $\widetilde{g}(2) \neq \widetilde{g}(2')$, так как $\alpha(2) \neq \beta(2)$.

Аналогично лемме 9, легко доказать, что для любого автомата $T \in [B]$ с n входами и любого отображения $\pi : \widetilde{\mathbb{N}} \to {E_2}^n$ из равенства $\widetilde{g}(a) = \widetilde{g}(b)$ следует равенство

$$f_{h(T)}(\pi(\widetilde{g}(a + h(T) - 1)), \ldots, \pi(\widetilde{g}(a))) = \\ = f_{h(T)}(\pi(\widetilde{g}(b + h(T) - 1)), \ldots, \pi(\widetilde{g}(b))). \quad (2)$$

Определим функцию $\widetilde{u} : \widetilde{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ следующим образом. $\widetilde{u}(k)$ — минимальное натуральное число l такое, что $\widetilde{g}(k+l) = \widetilde{g}(k)$. Если такого числа не существует, то считаем, что $\widetilde{u}(k) = \infty$. Нетрудно убедиться, что если ограничить функцию $\widetilde{u}$ на множество $\mathbb{N}_1$($\mathbb{N}_2$) то мы получим функцию u_{A_1} (u_{A_2}).

Без изменений останется лемма 10: если $\widetilde{g}(a) = \widetilde{g}(b)$, $\widetilde{g}(a) \neq \widetilde{g}(a+1)$ и $\widetilde{u}(a+1) \geqslant h$, то для какого-то $l \in \{b+1, b+2, \ldots b+h-1\}$ выполняется $\widetilde{g}(l) = \widetilde{g}(a + 1)$.

Воспользуемся леммой 15 для u_{A_1} и u_{A_2}, и объеденим результаты. Получим, что возможны следующие случаи:

1) $u_{A_1}(n_1) = \infty$ для любого $n_1 \in \mathbb{N}_1$ и $u_{A_2}(n_2) = \infty$ для любого $n_2 \in \mathbb{N}_2$.
2) $u_{A_1}(n_1) = \infty$ для любого $n_1 \in \mathbb{N}_1$. Существуют m_2 и s такие, что $u_{A_2}(n_2) = \infty$ для $n_2 < m_2$ и $u_{A_2}(n_2) = s$ для $n_2 \geqslant m_2$,
3) $u_{A_2}(n_2) = \infty$ для любого $n_2 \in \mathbb{N}$. Существует m_1 и s такие, что $u_{A_1}(n_1) = \infty$ для $n_1 < m_1$ и $u_{A_1}(n_1) = s$ для $n_1 \geqslant m_1$,
4) Существуют m_1, m_2, s_1 и s_2 такие, что $u_{A_1}(n_1) = \infty$ для $n_1 < m_1$ и $u_{A_1}(n_1) = s_1$ для $n_1 \geqslant m_1$, $u_{A_2}(n_2) = \infty$ для $n_2 < m_2$ и $u_{A_2}(n_2) = s_2$ для $n_2 \geqslant m_2$,

Разберём эти случаи.

1) $\widetilde{g}(1') = \widetilde{g}(1)$, поэтому из леммы 10 следует, что для какого-то $l_{2'} > l_{1'} = 1$ выполняется $\widetilde{g}(2') = \widetilde{g}(l_{2'})$. Снова применим лемму 10 к $\widetilde{g}(2') = \widetilde{g}(l_{2'})$, получим, что для какого-то $l_{3'} > l_{2'}$ выполняется $\widetilde{g}(l_{3'}) = \widetilde{g}(3')$. И так далее получим, что для любого $n \in \mathbb{N}_2$ существует $l_n \in \mathbb{N}_1$ такое, что $\widetilde{g}(l_n) = \widetilde{g}(n)$. Теперь применим лемму 10 к $\widetilde{g}(1) = \widetilde{g}(1')$, Получим, что для какого-то $t \in \mathbb{N}_2$ выполняется $\widetilde{g}(t) = \widetilde{g}(2)$. Но тогда $\widetilde{g}(l_t) = \widetilde{g}(2)$ и $\widetilde{u}(2) \neq \infty$, противоречие, значит, первый случай разобран.

2)-3) Второй и третий случаи эквивалентны, поэтому рассмотрим только второй. Рассмотрим наибольшее $t \in \mathbb{N}_1$ такое, что для какого-то $t' \in \mathbb{N}_2$ выполняется $\widetilde{g}(t) = \widetilde{g}(t')$. Очевидно такое найдётся, так как на $\mathbb{N}_1$ функция $\widetilde{g}$ принимает бесконечное количество значений, а на $\mathbb{N}_2$ — конечное. Применим лемму 10 к $\widetilde{g}(t) = \widetilde{g}(t')$. Тогда найдётся $l > t'$ такое, что $\widetilde{g}(l) = \widetilde{g}(t+1)$. Но мы выбрали максимальное t, противоречие, значит, второй и третий случай разобраны.

4) Пусть $F_1 = \{g_1(m_1), g_1(m_1+1), \ldots, g_1(m_1+s_1-1)\}$ и $F_2 = \{g_2(m_2), g_2(m_2+1), \ldots, g_2(m_2+s_2-1)\}$. Покажем, что возможны 3 случая:

   а) $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

   б) Существуют $t_1 \geqslant m_1$ и $t_2 \geqslant m_2$ такие, что $g_1(t_1) = g_2(t_2)$, $g_1(t_1+1) \neq g_2(t_2+1)$.

   в) Существуют $t_1 \in \mathbb{N}_1$ и $t_2 \in \mathbb{N}_2$ такие, что $g_1(t_1+i) = g_2(t_2+i)$ для $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

   Пусть множества F_1 и F_2 пересекаются, рассмотрим произвольные $t_1 \geqslant m_1$ и $t_2 \geqslant m_2$ такие, что $g_1(t_1) = g_2(t_2)$. Рассмотрим минимальное $i \in \mathbb{N}$ такое, что $g_1(t_1+i) \neq g_2(t_2+i)$. Если оно найдётся, то это случай б), иначе случай в).
   Осталось рассмотреть случаи а)–в).

   а) Введём на множестве пар отношение частичного порядка. Будем говорить, что $(a, b) \leqslant (c, d)$, если $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$. Рассмотрим любую максимальную пару (t_1, t_2) такую что $g_1(t_1) = g_2(t_2)$. Очевидно, что она найдётся. При этом или $t_1 < m_1$, или $t_2 < m_2$. Для определённости будем считать, что $t_1 < m_1$. Пусть отображение $\pi : \widetilde{\mathbb{N}} \to {E_2}^n$ такое, что

$\pi(i) = \vec{b}$, если $i = \widetilde{g}(j)$ для какого-то $j > t_1$ и $\pi(i) = \vec{a}$ иначе. Так как $g_1(t_1) = g_2(t_2)$, то для произвольного автомата $T \in B$ мы можем записать равенство 2. Учитывая, что пара (t_1, t_2) максимальная, нетрудно убедиться, что равенство будет иметь вид:

$$f_{h(T)}(\vec{b}, \vec{b}, \ldots, \vec{b}, \vec{b}, \vec{a}) = f_{h(T)}(\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a}).$$

А значит, $[B] \subset L_4$, получили противоречие, следовательно, случай а) полностью разобран.

б) Для определённости будем считать, что $s_1 \leqslant s_2$. Пусть A' — множество пар (γ, δ) таких, что для каких-то $\eta_1 \in {E_2}^{t_1}$ и $\eta_2 \in {E_2}^{t_2}$ выполняется $(\eta_1\gamma, \eta_2\delta) \in A$ и $\gamma \in \{0^\infty, 1^\infty\}$. Так как пары такого вида переходят в пары такого вида, то B G-сохраняет A'. Аналогично тому, как мы строили A_1 и A_2 построим $A'_1 \subset E$ и $A'_2 \subset E$. Очевидно, что B G-сохраняет A'_2 и к нему можно применить лемму 15.
Если A'_2 имеет период $s_2 > 1$, то $|F_1 \cap F_2| = 1$. И A' состоит из всех пар $(a^\infty, \delta^\infty)$ таких, что $\delta \in {E_2}^{s_2}$, $\delta(1) = a$. Рассмотрим замкнутый класс $R^C_{s_2}$, где C состоит из всех слов вида $aa\gamma$. Покажем, что $B \subset R^C_{s_2}$. Рассмотрим произвольный автомат $T \in B$ с n входами и произвольные $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E_2, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in {E_2}^{s_2-2}$ и докажем, что $G_T((a_1a_1\alpha_1)^\infty, (a_2a_2\alpha_2)^\infty, \ldots, (a_na_n\alpha_n)^\infty) = (cc\delta)^\infty$ для каких-то $c \in E_2$ и $\delta \in {E_2}^{s_2-2}$. Пусть

$$G_T(a_1^\infty, a_2^\infty, \ldots, a_n^\infty) = c^\infty,$$
$$G_T((a_1a_1\alpha_1)^\infty, (a_2a_2\alpha_2)^\infty, \ldots, (a_na_n\alpha_n)^\infty) = \epsilon^\infty,$$
$$G_T((a_1\alpha_1a_1)^\infty, (a_2\alpha_2a_2)^\infty, \ldots, (a_n\alpha_na_n)^\infty) = \zeta^\infty,$$

где $\epsilon, \zeta \in {E_2}^{s_2}$. Так как B G-сохраняет A', то $(c^\infty, \epsilon^\infty), (c^\infty, \zeta^\infty) \in A'$. А это значит, что $c = \epsilon(1) = \zeta(1)$, но $\epsilon(2) = \zeta(1)$, тогда $\epsilon(1) = \epsilon(2)$ и $\epsilon \in C$. То есть $T \in R^C_{s_2}$ и $B \subset R^C_{s_2}$. Противоречие.
Значит, A'_2 имеет период 1 и $F_1 = F_2$. Тогда $s_1 = s_2$. Рассмотрим $A'' \subset E$ — множество элементов γ таких, что для каких-то $\eta_1 \in {E_2}^{t_1-1}$ и $\eta_2 \in {E_2}^{t_2-1}$ выполняется $(\eta_1\gamma, \eta_2\gamma) \in A$. нетрудно убедиться, что B G-сохраняет

A''. Так как $F_1 = F_2$, то для какого-то $l > 1$ выполняется $g_1(t_1 + l) = g_2(t_2 + 1)$. Очевидно, $(10^{s_1-1})^\infty \in A''$, а $(0^l 10^{s_1-l-1})^\infty \notin A''$. Но по лемме 15 множество A'' состоит из все сверхслов с определённым периодом, который очевидно делит s_1. Получили противоречие. Значит, случай б) полностью разобран.

в) Очевидно $s_1 = s_2 = s$ и $F_1 = F_2$. Покажем, что для любого $l_1 \in \mathbb{N}_1$ существует $l_2 \in \mathbb{N}_2$ такое, что $g_1(l_1) = g_2(l_2)$. Предположим, что это не так, тогда рассмотрим минимальное такое $l_1 \in \mathbb{N}_1$, что для любого $i \in \mathbb{N}_2$ выполняется $g_1(l_1+1) \neq g_2(i)$. Так как l_1 — минимальное, то для какого-то $l_2 \in \mathbb{N}_2$ выполняется $g_1(l_1) = g_2(l_2)$. Если $u_{A_1}(l_1+1) \geqslant h$, то воспользуемся леммой 10, получим, что для какого-то $k \in \mathbb{N}_2$ имеет место равенство $g_1(l_1+1) = g_2(k)$, что противоречит выбору l_1. Если же $u_{A_1}(l_1+1) < h$, то $g_1(l_1+1) \in F_1$, $g_1(l_1+1) \in F_2$. Но мы предполагали, что для любого $i \in \mathbb{N}_2$ выполняется $g_1(l_1+1) \neq g_2(i)$. Получили проиворечие, значит, для любого $l_1 \in \mathbb{N}_1$ существует $l_2 \in \mathbb{N}_2$ такое, что $g_1(l_1) = g_2(l_2)$. Аналогично наоборот: для любого $l_2 \in \mathbb{N}_2$ существует $l_1 \in \mathbb{N}_1$ такое, что $g_1(l_1) = g_2(l_2)$. Отсюда в частности следует, что $m_2 = (m_1)'$, а так как $\widetilde{g}(2) \neq \widetilde{g}(2')$, то $m_1 > 1$.

Для всех $1 \leqslant i \leqslant m_1$ найдём $l_i \in \mathbb{N}_2$ такое, что $g_1(i) = g_2(l_i)$. Пусть множество $D_i \subset E$ состоит из таких элементов δ, что для каких-то $\gamma \in {E_2}^{i-1}$ и $a \in E_2$ выполняется $(\gamma a^\infty, \delta) \in A$. Так как B G-сохраняет D_i для любого i, то мы можем применить к D_i лемму 15. Из неё следует, что множество $\{g_1(i+1), g_1(i+2), \ldots, g_1(m_1-1)\}$ совпадает с $\{g_2((i)'+1), g_2((i)'+2), \ldots, g_2((m_1)'-1)\}$. Для $i = m_1 - 1$ это означает, что $g_1(m_1-1) = g_2((m_1)'-1)$. Далее для $i = m_1-2$ получаем $\{g_1(m_1-2), g_1(m_1-1)\} = \{g_2((m_1)'-2), g_2((m_1)'-1)\}$, а значит, $g_1(m_1-2) = g_2((m_1)'-2)$. И так далее, получим, что $g_2((i)') = g_1(i)$ для любого i. Для $i = 2$ получим $g_1(2) = g_2(2')$. Получили противоречие, значит, случай в) полностью разобран и лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость следует из теоремы 1. Докажем достаточность. Для $h = 1$ утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим случай $h \geqslant 2$.

Предположим, что $B \subset M_{pq}$ для некоторого $q > 2h$. Если $p > h$, то $B \subset M_{h,h+q-p}$. Если $p \leqslant h$, то $B \subset M_{p,2h}$. Получаем противоречие с условием теоремы. Следовательно, $B \not\subset M_{pq}$ для $q > 2h$.

$B \not\subset S_p$ для $p > h$, так как иначе $B \subset S_h$, что противоречит условию теоремы.

Из леммы 16 следует, что существует автомат с одним входом $W \in [B]$ такой, что

$$f_u(a_1, \ldots, a_{u-1}, a_u) = a_{u-1}$$

для любых $a_1, \ldots, a_u \in E_2$, где u — высота автомата W.

Из леммы 4 следует, что существует $N > u$ и автомат $S_{uN} \in [B]$ такой, что

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant t \leqslant u, \\ 1, & t > N. \end{cases}$$

Из леммы 3 следует, что для любого i существует автомат $T_{iN} \in [B]$ такой, что

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant t \leqslant N, t \neq i, \\ 1, & t = i. \end{cases}$$

Из леммы 5 следует, что для любого i существует автомат $U_i \in [B]$ такой, что $y(i) = x(i-1)$. Автомат $T_{iN}\&U_i(x)$ в i момент времени работает как единичная задержка, а в остальные моменты времени $\leqslant N$ возвращает 0. Далее автомат $\bigvee\limits_{i=2}^{N}(T_{iN}\&U_i(x))$ работает как единичная задержка в моменты времени $\leqslant N$, а автомат $W(x)$ работает как единичная задержка, начиная с момента времени u. Осталось сделать так, чтобы сначала работал первый автомат, а потом второй. Воспользуемся для этого автоматом S_{uN} и получим автомат $R = (\overline{S_{uN}}\& \bigvee\limits_{i=2}^{N}(T_{iN}\&U_i))\bigvee(S_{uN}\&W)$, который реализует единичную задержку. Так как $P_2 \subset B$ и $R \in [B]$, то $[B] = \mathcal{P}_a$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155.

[3] Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. № 4. 1992.

[4] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: Наука, 1990.

[5] Берж К. Теория графов и её применения. М.: ИЛ, 1962.