Об автоматной модели преследования в базовых плоских областях*

Н. Ю. Волков

Изучается процесс преследования коллективом автоматов («хищников») нескольких независимых друг от друга автоматов («жертв»). Преследование происходит в базовых плоских областях (лабиринтах) следующих типов: полуплоскость, полоса ширины l, полуполоса ширины l. Показано, что для каждого из этих трех типов лабиринтов существует конечный коллектив хищников, который в любом лабиринте данного типа «ловит» любую конечную независимую систему жертв, таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки хищников.

1. Введение

Рассматривается автоматный аналог ситуации преследования хищниками своих жертв. В работе [6] показано, что если преследование происходит на целочисленной плоскости, то существует конечный коллектив хищников, который ловит любую конечную независимую систему жертв со скоростью меньше скорости хищников и с обзором не больше обзора хищников, при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки хищников. В данной работе этот результат обобщается для более широкого класса областей целочисленной плоскости, в которых происходит преследование.

В качестве пространства преследования рассматриваются 3 типа плоских областей, которые будем называть *базовыми* областями (а

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00240).

также базовыми лабиринтами): полуплоскость, полоса ширины l и полуполоса ширины l. Также, как и в работе [6], хищники и жертвы представляются в виде автоматов, которые, находясь в какой-либо клетке лабиринта, умеют обозревать некоторую ее окрестность, и, в зависимости от вида (конфигурации) этой окрестности (то есть от расположения границы лабиринта и других автоматов в этой окрестности) и своего состояния, способны перемещаться в другую клетку лабиринта. Автоматы-хищники и автоматы-жертвы в начале процесса образуют определенную диспозицию, находясь в своих начальных состояниях. После этого начинается процесс перемещения автоматов. Внутренние логики автоматов в совокупности определяют этот процесс. Жертва считается пойманной, если она оказалась в фиксированной окрестности одного из хищников.

Предполагается, что каждая жертва «не видит» других жертв, но видит хищников, попавших в ее зону обзора. Хищники «видят» и жертв и друг друга на расстоянии своего обзора. Таким образом, жертвы представляют собой независимую систему автоматов, а хищники — коллектив автоматов.

Фиксируются скорости и обзоры хищников и жертв так, чтобы обзор хищников был не меньше обзора жертв, а скорость хищников — больше скорости жертв.

Для каждого базового типа лабиринтов решается следующая задача. Существует ли коллектив хищников K, такой, что для любого лабиринта L данного типа найдется такое начальное расположение автоматов из K в L, что любая конечная независимая система жертв S, при любом начальном расположении автоматов из S в L, будет поймана хищниками?

Показывается, что для 3 рассматриваемых типов лабиринтов данная задача решается положительно. Для каждого типа лабиринта строится искомый коллектив хищников K. Поимка произвольной конечной независимой системы жертв оказывается возможной вследствие их периодического поведения.

Автор работы выражает признательность В. Б. Кудрявцеву за научное руководство, а также Д. Н. Жуку, высказавшему ряд ценных замечаний.

2. Постановка задачи и основные результаты

Будем использовать стандартные обозначения для множеств натуральных и целых чисел $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, соответственно. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество клеток, на которые плоскость разбивается целочисленной решеткой, обозначим через $\mathbb{Z}^2$, сопоставляя каждой клетке координаты ее нижнего левого угла.

Будем называть две клетки, принадлежащих $\mathbb{Z}^2$, *соседними*, если эти клетки имеют общую сторону. *Оболочкой* произвольного множества $\mathcal{Y} \subset \mathbb{Z}^2$ назовем множество, состоящее из клеток множества $\mathcal{Y}$, а также из всех клеток, которые являются соседними для какой-либо клетки $\mathcal{Y}$. Оболочку множества $\mathcal{Y}$ обозначаем $\overline{\mathcal{Y}}$.

Лабиринт, состоящий из клеток с положительной второй координатой, назовем *полуплоскостью* и будем обозначать как L_1 ($L_1 = \{(x,y) \,|\, x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{N}\}$). Аналогично определим лабиринты $L_2(l) = \{(x,y) \,|\, 0 < y \leqslant l,\ x,y \in \mathbb{Z}\}$ и $L_3(l) = \{(x,y) \,|\, 0 < y \leqslant l,\ x,y \in \mathbb{N}\}$, состоящие из клеток, удовлетворяющих указанным условиям, где $l \in \mathbb{N}$. Эти лабиринты назовем *l-полосой* и *l-полуполосой*, соответственно. Назовем r-окрестностью клетки (x_0, y_0) множество

$$D_{(x_0,y_0),r} = \{(x,y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ (|x - x_0| + |y - y_0|) \leqslant r\},$$

где $r \in \mathbb{N}_0$. Будем считать, что задана определенная нумерация клеток множества $D_{(x_0,y_0),r}$.

Под автоматом будем понимать инициальный конечный автомат (см. [2]) вида $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где A — входной, B — выходной, Q — внутренний алфавиты автомата $\mathcal{A}$, $\varphi : Q \times A \to Q$ и $\psi : Q \times A \to B$ — функции переходов и выходов $\mathcal{A}$, соответственно, $q_0 \in Q$ — его начальное состояние. Алфавит A определяет возможности $\mathcal{A}$ «видеть» происходящее вокруг, а алфавит B — его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции φ и ψ задают внутреннюю логику автомата $\mathcal{A}$.

Пусть дан лабиринт L, являющийся одним из следующих лабиринтов: L_1, $L_2(l)$ или $L_3(l)$. Рассмотрим автомат $\mathcal{A}$, перемещающийся в L. Выходным алфавитом $\mathcal{A}$ является множество $B = D_{(0,0),V}$, где параметр $V \in \mathbb{N}$ называется *скоростью автомата* $\mathcal{A}$. Входной алфавит $\mathcal{A}$ зависит от параметра $R \in \mathbb{N}$ ($R \geqslant V$), называемого *обзо-*

ром автомата $\mathcal{A}$ и способа взаимодействия $\mathcal{A}$ с другими автоматами. Возможны два случая такого взаимодействия:

1) $\mathcal{A}$ является элементом независимой системы автоматов;
2) $\mathcal{A}$ является элементом коллектива автоматов.

Автомат со скоростью V и обзором R будем обозначать как $\mathcal{A}(R, V)$. Пусть $\mathcal{A}(R, V)$ находится в клетке (x_0, y_0). Множество $D_{(x_0,y_0),V} \cap L$ называется *окрестностью хода* $\mathcal{A}$, а множество $\overline{D_{(x_0,y_0),(R-1)} \cap L}$ — *зоной обзора* $\mathcal{A}$.

Рассмотрим две системы автоматов $K = (W_1, \ldots, W_m)(R, V)$ (хищники) и $S = (U_1, \ldots, U_n)(R', V')$ (жертвы), где R и R' — обзоры, а V и V' — скорости хищников и жертв, соответственно. Здесь S — независимая система автоматов, K — коллектив. Пусть каждая жертва U_i находится в клетке (x_i', y_i') лабиринта L, а каждый хищник W_j находится в клетке (x_j, y_j) лабиринта L в состоянии q_j.

Положим $N' = (R' + 1)^2 + (R')^2$ — количество клеток множества $D_{(x_0,y_0),R'}$, то есть, максимально возможный размер зоны обзора жертвы (это число одинаково для всех клеток (x_0, y_0)). Для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим строку $(a_1', \ldots, a_{N'}')$ следующим образом. Для любого $k = 1, \ldots, N'$

$$a_k' = \begin{cases} -1, & \text{если } k\text{-я клетка множества } D_{(x_i',y_i'),R'} \\ & \qquad \text{не принадлежит лабиринту } L; \\ 1, & \text{если в } k\text{-й клетке множества } D_{(x_i',y_i'),R'} \text{ находится} \\ & \qquad \text{хотя бы один хищник;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Строку $(a_1', \ldots, a_{N'}')$ назовем *U_i-конфигурацией*. Каждая U_i-конфигурация однозначно задает клетки зоны обзора U_i, не принадлежащие лабиринту, а также клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники.

Положим $N = (R + 1)^2 + R^2$ — количество клеток множества $D_{(x_0,y_0),R}$, то есть, максимально возможный размер зоны обзора хищника (это число также одинаково для всех клеток (x_0, y_0)). Для каждого $j = 1, \ldots, m$ определим строку $(a_1, \ldots, a_{N+m})$ следующим образом. Для любого $k = 1, \ldots, N$

$$a_k = \begin{cases} -1, \text{ если } k\text{-я клетка множества } D_{(x_j,y_j),R} \\ \qquad \text{не принадлежит лабиринту } L; \\ 1, \text{ если в } k\text{-й клетке множества } D_{(x_j,y_j),R} \text{ находится} \\ \qquad \text{хотя бы одна жертва;} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим внутренний алфавит W_j как Q_j, а множество всех пар вида $((x, y), q)$, где $(x, y) \in D_{(0,0),R}$, $q \in \bigcup_{j=1}^m Q_j$ — как M. Положим для любого $p = 1, \ldots, m$, $p \neq j$

$$a_{N+p} = \begin{cases} ((x_p - x_j,\, y_p - y_j),\, q_p), \text{ если } |x_p - x_j| + |y_p - y_j| \leqslant R; \\ \Lambda, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Положим

$$a_{N+j} = \Lambda. \quad (3)$$

Строку $(a_1, \ldots, a_{N+m})$, определенную равенствами (1) – (3), назовем W_j-*конфигурацией.* Легко видеть, что $a_{N+p} \in (M \cup \{\Lambda\})$ при $p = 1 \ldots m$. Каждая W_j-конфигурация однозначно задает клетки зоны обзора W_j, не принадлежащие лабиринту, клетки зоны обзора W_j, в которых находятся жертвы, а также расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_j.

Расположения в лабиринте L жертв и хищников и состояния хищников однозначно задают все U_i-конфигурации и все W_j-конфигурации. Множества всех U_i-конфигураций и всех W_j-конфигураций при всевозможных расположениях жертв и хищников и состояниях хищников конечны. Обозначим множество всех U_i-конфигураций как F'. Аналогично, множество всех W_j-конфигураций обозначим как F. Входным алфавитом каждой жертвы U_i является множество всех пар вида $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2)$, где $\mathcal{F}'_1 \in (\{\varnothing\} \cup F')$, а $\mathcal{F}'_2 \in F'$. Входным алфавитом каждого хищника W_j является множество всех пар вида $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in F$.

Момент времени 2τ ($\tau \in \mathbb{N}_0$) называется τ-*моментом хода жертв.* Момент $(2\tau + 1)$ называется τ-*моментом хода хищников.* Промежуток времени $[2\tau, (2\tau + 1)]$ называется *тактом с номером* τ. Время взаимодействия автоматов будем измерять в тактах.

Преследование коллективом хищников независимой системы жертв происходит так. Фиксируются начальные (в нулевой момент времени) расположения всех хищников и жертв на плоскости. В нулевой момент каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\varnothing, \mathcal{F}'_2)$, где U_i-конфигурация $\mathcal{F}'_2$ задает клетки зоны обзора U_i, не принадлежащие лабиринту, и клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники. В момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N})$ каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2)$, задающую клетки зоны обзора U_i, не принадлежащие лабиринту, и клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники в момент $(2\tau - 1)$ и в момент 2τ. В каждый момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ жертва U_i, в соответствии со своими функциями переходов и выходов, определяет свое следующее состояние, выходной символ $\overline{b}$, и перемещается на вектор $\overline{b}$.

В момент $(2\tau + 1)$ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ хищник W_j воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, задающую клетки зоны обзора W_j, не принадлежащие лабиринту, расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_j, а также клетки зоны обзора W_j, в которых находятся жертвы в момент 2τ и в момент$(2\tau + 1)$, и, в соответствии со своими функциями переходов и выходов, определяет свое следующее состояние, выходной символ $\overline{b}$, и перемещается на вектор $\overline{b}$.

Будем рассматривать только такие автоматы (жертв и хищников), для которых перемещение на вектор, равный выходному символу $\overline{b}$ никогда не выводит за пределы лабиринта, в котором происходит преследование.

Система хищников K «ловит» жертву, если жертва в некоторый момент времени оказалась в окрестности хода одного из хищников. Пойманная жертва исчезает из лабиринта. K «ловит» независимую систему жертв, если в процессе преследования K ловит каждую жертву.

Для каждого из типов лабиринтов L_1, L_2, L_3 ставится вопрос: существует ли коллектив хищников $K(R, V)$, такой, что для любого лабиринта L данного типа существует такое начальное расположение хищников в L, что для произвольной конечной независимой системы жертв $S(R', V')$ и любого их начального расположения в L, коллектив K ловит S.

Расположение системы автоматов в лабиринте, при котором все эти автоматы находятся в одной клетке, назовем *каноническим.* Зафиксируем R, $V \in \mathbb{N}$, такие что $2 \leqslant V \leqslant R$.

Теорема 1. *Существуют коллективы хищников $K_1(R,V)$, $K_2(R,V)$ и $K_3(R,V)$, такие что:*

1) *K_1, стартуя из любого канонического расположения в L_1, ловит любую конечную независимую систему жертв $S(R,V-1)$ при любом их начальном расположении в L_1;*
2) *Для каждого $i = 2,3$, коллектив K_i, для любого l, стартуя из любого канонического расположения в $L_i(l)$, ловит любую конечную независимую систему жертв $S(R,V-1)$ при любом их начальном расположении в $L_i(l)$.*

3. Вспомогательные утверждения

Назовем *бортом* полуплоскости множество $\{(x,y)\,|\,y=0,\ x\in\mathbb{Z}\}$. Множества $\{(x,y)\,|\,y=0,\ x\in\mathbb{Z}\}$ и $\{(x,y)\,|\,y=l+1,\ x\in\mathbb{Z}\}$ назовем, соответственно, *нижним* и *верхним бортами* лабиринта $L_2(l)$. Множества $\{(x,y)\,|\,y=0,\ x\in\mathbb{N}_0\}$ и $\{(x,y)\,|\,y=l+1,\ x\in\mathbb{N}_0\}$ назовем, соответственно, *нижним* и *верхним бортами* лабиринта $L_3(l)$. Множество $\{(x,y)\,|\,x=0,\ 0\leqslant y\leqslant l+1\}$ назовем *левым бортом* лабиринта $L_3(l)$ ($l\in\mathbb{N}$). Клетки $(0,0)$ и $(0,l+1)$ назовем, соответственно, *нижним* и *верхним углами* лабиринта $L_3(l)$.

Будем говорить, что *автомат $\mathcal{A}(R,V)$ видит некоторый борт лабиринта на расстоянии* h ($h\in\mathbb{N}$, $h\leqslant R$), если хотя бы одна клетка этого борта находится в h-окрестности клетки, в которой находится $\mathcal{A}$, причем ни одна клетка этого борта не находится в $(h-1)$-окрестности клетки, в которой находится $\mathcal{A}$. Если существует $h\in\mathbb{N}$, $h\leqslant R$, такое, что автомат $\mathcal{A}$ видит некоторый борт лабиринта на расстоянии h, будем говорить, что $\mathcal{A}$ *видит* этот борт.

Аналогично определяются ситуации, в которых будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_1$ видит автомат $\mathcal{A}_2$ на расстоянии h ($h\leqslant R$), или $\mathcal{A}_1$ видит автомат $\mathcal{A}_2$.

Будем говорить, что *автомат $\mathcal{A}$ видит угол лабиринта*, если $\mathcal{A}$ видит оба борта, которым принадлежит данный угол.

Пусть автомат $\mathcal{A}$ перемещается в лабиринте L и его выходные символы в такты $\tau_1,\tau_1+1,\ldots,\tau_2$ равны $\overline{b}_{\tau_1},\overline{b}_{\tau_1+1},\ldots,\overline{b}_{\tau_2}$, соответственно. *Вектором перемещения* (или просто *перемещением*) *автомата $\mathcal{A}$ за промежуток времени* $[\tau_1,\tau_2]$ называется вектор $\vec{s}=$

$\overline{b}_{\tau_1} + \overline{b}_{\tau_1+1} + \ldots + \overline{b}_{\tau_2}$. Пусть вектор $\vec{s}$ имеет координаты s_1 и s_2 ($\vec{s} = (s_1, s_2)$). Положим $|\vec{s}| = |s_1| + |s_2|$.

Если автомат перемещается в лабиринте с периодической последовательностью выходных символов, обозначим длину периода этой последовательности как d, длину предпериода как d_0 и перемещение автомата за период этой последовательности как $\vec{s} = (s_1, s_2)$. В работе [6] доказана

Лемма 1. *Произвольный автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$ с n состояниями, перемещающийся по плоскости так, что другие автоматы не попадают в его зону обзора, имеет периодическую последовательность выходных символов и длина периода этой последовательности d, длина предпериода d_0 и перемещение $\vec{s}$ автомата $\mathcal{A}$ за период этой последовательности удовлетворяют неравенствам $d_0 + d \leqslant n$, $|\vec{s}| \leqslant V \cdot d$.*

Докажем аналог этой леммы для рассматриваемых классов лабиринтов. Далее везде будем понимать под лабиринтом L один из лабиринтов $\mathbb{Z}^2$, L_1, $L_2(l)$, $L_3(l)$.

Лемма 2. *Произвольный автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$ с n состояниями, перемещающийся в лабиринте L так, что другие автоматы не попадают в его зону обзора, имеет периодическую последовательность выходных символов. Верны соотношения:*

1) $d \leqslant R \cdot (n+1) \cdot n$, $s_2 \geqslant 0$, $|\vec{s}| \leqslant V \cdot d$, если $L = L_1$;

2) $d_0 + d \leqslant l \cdot n$, $s_2 = 0$, $|\vec{s}| \leqslant V \cdot d$, если $L = L_2(l)$;

3) $d \leqslant l^2 \cdot R \cdot (n+1) \cdot n$, $s_1 \geqslant 0$, $s_2 = 0$, $|\vec{s}| \leqslant V \cdot d$, если $L = L_3(l)$.

Доказательство. Предположим, доказано, что автомат $\mathcal{A}$ перемещается в лабиринте L с периодической выходной последовательностью, длина периода которой d. Рассмотрим период $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_d$ этой выходной последовательности. Так как $\mathcal{A}(R, V)$ имеет скорость V, для каждого $i = 1, \ldots, d$ выполнено $|\overline{b}_i| \leqslant V$. Следовательно, $|\vec{s}| = |\overline{b}_1 + \ldots + \overline{b}_d| \leqslant V \cdot d$. Докажем теперь периодичность выходной последовательности автомата и остальные соотношения отдельно для разных типов лабиринтов.

1) Пусть $L = L_1$. Рассмотрим 3 случая.

а) $\mathcal{A}$ в процессе движения никогда не видит борта полуплоскости. В этом случае $\mathcal{A}$ перемещается так же, как автомат на плоскости. По лемме 1 он имеет периодическую последовательность выходных символов, причем $d \leqslant n \leqslant R \cdot (n+1) \cdot n$. Очевидно, $s_2 \geqslant 0$ (иначе бы $\mathcal{A}$ рано или поздно подошел бы к борту на расстояние, не превосходящее R).

б) $\mathcal{A}$ видит борт в некоторый момент t_0, но никогда не покидает $(R \cdot (n+1))$-окрестность борта. Поскольку $\mathcal{A}$ имеет n состояний, не позднее чем через $R \cdot (n+1) \cdot n$ тактов он окажется в состоянии, в котором уже находился в некоторый момент t, $t \geqslant t_0$, и на том же расстоянии от борта, что и в момент t. Далее $\mathcal{A}$ будет периодически перемещаться в горизонтальном направлении, выходные символы и состояния $\mathcal{A}$ будут повторяться с длиной периода $d \leqslant R \cdot (n+1) \cdot n$, $s_2 = 0$.

в) $\mathcal{A}$ видит борт в некоторый момент t_0, а затем, в момент t_2, покидает $(R \cdot (n+1))$-окрестность борта. Обозначим наибольший момент из интервала $[t_0, t_2]$, в который $\mathcal{A}$ видит борт, как t_1. Таким образом на интервале времени $[t_1 + 1, t_2]$ автомат $\mathcal{A}$ не видит борта. Так как $\mathcal{A}(R, V)$ имеет скорость V, для того чтобы покинуть $(R \cdot (n+1))$-окрестность борта, ему нужно хотя бы $[\frac{R \cdot (n+1) - R}{V}] \geqslant n$ тактов перемещаться, не видя борта. По лемме 1 автомат $\mathcal{A}$ начнет перемещаться с периодической последовательностью выходных символов, сумма длин предпериода и периода которой не превосходят n. Обозначим перемещение автомата за период этой последовательности как $\vec{s} = (s_1, s_2)$. Очевидно, $s_2 > 0$ (иначе $\mathcal{A}$ не покинул бы $(R \cdot (n+1))$-окрестность борта). Значит, $\mathcal{A}$ далее никогда не увидит борта, и будет все время перемещаться, как автомат на плоскости. В этом случае, по лемме 1, $d \leqslant n \leqslant R \cdot (n+1) \cdot n$.

Таким образом, п. 1 данной леммы (полуплоскость) полностью разобран.

2) Пусть $L = L_2(l)$. Поскольку $\mathcal{A}$ имеет n состояний, не позднее, чем через $l \cdot n$ тактов после начала функционирования, $\mathcal{A}$ окажется в состоянии, в котором уже находился в некоторый момент t, и на тех же расстояниях от верхнего и нижнего бортов, что и в момент t. Далее $\mathcal{A}$ будет периодически перемещаться в горизонтальном направлении, выходные символы и состояния $\mathcal{A}$ будут повторяться с длиной предпериода d_0 и периода d, таких что $d_0 + d \leqslant l \cdot n$, $s_2 = 0$.

3) Пусть $L = L_3(l)$. Аналогично п. 1 данной леммы, рассмотрим 3 случая.

а) $\mathcal{A}$ в процессе движения никогда не видит левого борта l-полуполосы. В этом случае $\mathcal{A}$ перемещается так же, как автомат в l-полосе. По п. 2 данной леммы он имеет периодическую последовательность выходных символов, причем $d \leqslant l \cdot n \leqslant l^2 \cdot R \cdot (n+1) \cdot n$, $s_2 = 0$. Очевидно, $s_1 \geqslant 0$ (иначе бы $\mathcal{A}$ рано или поздно подошел бы к левому борту на расстояние, не превосходящее R).

б) $\mathcal{A}$ видит левый борт в некоторый момент t_0, но никогда не покидает $(l \cdot R \cdot (n+1))$-окрестность левого борта. Поскольку $\mathcal{A}$ имеет n состояний, не позднее чем через $l^2 \cdot R \cdot (n+1) \cdot n$ тактов он окажется в состоянии, в котором уже находился в некоторый момент t, $t \geqslant t_0$, и в той же клетке, что и в момент t. Далее $\mathcal{A}$ будет перемещаться по периодической траектории, выходные символы и состояния $\mathcal{A}$ будут повторяться с длиной периода $d \leqslant l^2 \cdot R \cdot (n+1) \cdot n$, $s_1 = s_2 = 0$.

в) $\mathcal{A}$ видит левый борт в некоторый момент t_0, а затем, в момент t_2, покидает $(l \cdot R \cdot (n+1))$-окрестность левого борта. Обозначим наибольший момент из интервала $[t_0, t_2]$, в который $\mathcal{A}$ видит левый борт, как t_1. Таким образом на интервале времени $[t_1 + 1, t_2]$ автомат $\mathcal{A}$ не видит левого борта. Так как $\mathcal{A}(R, V)$ имеет скорость V, для того чтобы покинуть $(l \cdot R \cdot (n+1))$-окрестность борта, ему нужно хотя бы $[\frac{l \cdot R \cdot (n+1) - R}{V}] \geqslant l \cdot n$ тактов перемещаться, не видя борта. По п. 2 данной леммы автомат $\mathcal{A}$ начнет перемещаться с периодической последовательностью выходных символов, сумма длин предпериода и периода которой не превосходят $l \cdot n$. Обозначим перемещение автомата за период этой последовательности как $\vec{s} = (s_1, s_2)$ $(s_2 = 0)$. Очевидно, $s_1 > 0$ (иначе $\mathcal{A}$ не покинул бы $(l \cdot R \cdot (n+1))$-окрестность левого борта). Значит, $\mathcal{A}$ далее никогда не увидит борта, и будет все время перемещаться, как автомат в l-полосе. В этом случае, по п. 2 данной леммы, $d \leqslant l \cdot n \leqslant l^2 \cdot R \cdot (n+1) \cdot n$.

Таким образом, п. 3 данной леммы (l-полуполоса) полностью разобран. Лемма доказана.

Фиксируем натуральное $V \geqslant 2$.

Если коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ $(m \geqslant 4)$, расположен в лабиринте L так, что $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ находятся в клетках $(x_0 + a, y_0)$ и $(x_0 + b, y_0)$, соответственно, (где $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$, $a \leqslant b$), а все остальные автоматы расположены в клетке (x_0, y_0), то будем говорить, что коллектив K находится в (a, b)-*расстановке с центром* (x_0, y_0).

Если τ_j — наименьший такт, начиная с которого автомат $\mathcal{A}_j$ не меняет состояния и его выходная последовательность (с такта τ_j) состоит из нулевых векторов, будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_j$ остановился в такт τ_j. Если каждый $\mathcal{A}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ останавливается в такт τ_j, и $\tau = \max_{j\in\{1,\ldots,m\}} \tau_j$, будем говорить, что коллектив $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ остановился в такт τ.

В работе [6] для автоматов, перемещающихся по плоскости, доказана

Лемма 3. *Для любого* $c \in \mathbb{N}$ *существует коллектив* $K_c = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_5)(V, V)$*, который, при произвольных* $a, b, (x_0, y_0)$*, стартуя из* (a, b)*-расстановки с центром* (x_0, y_0)*, функционирует* $2a \cdot c \cdot]b/V[$ *тактов и останавливается в той же расстановке.*

Из построения коллектива K_c (см. [6]) очевидно, что этот коллектив будет функционировать описанным в лемме образом, будучи помещен в любой лабиринт одного из трех типов: L_1, $L_2(l)$, $L_3(l)$. Таким образом, эта лемма имеет место для любого из рассматриваемых типов лабиринтов.

Коллектив $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ назовем *правильным*, если автомат $\mathcal{A}_1$ имеет внутренний алфавит $Q = \{-1, 1\}^2 \times Q'$. Определим функцию $\mathrm{sgn}_0(x)$, принимающую значение 1 при $x \geqslant 0$, и значение -1 — иначе.

Пусть правильный коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ $(m \geqslant 8)$, расположен в лабиринте L так, что $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$ находятся в клетках $(x_0 + |a_1|, y_0)$, $(x_0 + |a_2|, y_0)$ и $(x_0 + b, y_0)$, соответственно $(a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $\max(|a_1|, |a_2|) \leqslant b)$, и автомат $\mathcal{A}_1$ находится в состоянии $q = (\mathrm{sgn}_0(a_1), \mathrm{sgn}_0(a_2), q')$. Если при этом все автоматы коллектива, кроме $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$, расположены в клетке (x_0, y_0), будем говорить, что коллектив K находится в (a_1, a_2, b)-*расстановке с центром* (x_0, y_0). Если $\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_7$ и $\mathcal{A}_8$ находятся в клетках $(x_0 + h_1, y_0)$, $(x_0, y_0 + h_2)$, $(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ и $(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ соответственно $(h_1, h_2 \in \mathbb{Z})$, и все автоматы коллектива, кроме $\mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_8$ расположены в клетке (x_0, y_0), будем говорить, что коллектив K находится в (a_1, a_2, b, h_1, h_2)-*расстановке с центром* (x_0, y_0).

В работе [6] для автоматов, перемещающихся по плоскости, доказана

Лемма 4. *Для любого $c \in \mathbb{N}$ существует правильный коллектив $K_c = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_9)(V, V)$, который, при произвольных $a_1, a_2, b, (x_0, y_0)$, стартуя из (a_1, a_2, b)-расстановки с центром (x_0, y_0), через $T = 2 \cdot (|a_1| + |a_2|) \cdot (c+1) \cdot]b/V[$ тактов остановится в $(a_1, a_2, b,$ $(2 \cdot a_1 \cdot c \cdot]b/V[\cdot V), (2 \cdot a_2 \cdot c \cdot]b/V[\cdot V))$-расстановке с центром (x_0, y_0).*

Из построения коллектива K_c (см. [6]) очевидно, что при $a_2 \geqslant 0$, этот коллектив, будучи помещен на полуплоскость L_1, будет функционировать описанным в лемме образом. Аналогично, при $a_2 = 0$, этот коллектив, будучи помещен в l-полосу $L_2(l)$, будет функционировать описанным в лемме образом, а при $a_1 \geqslant 0$, $a_2 = 0$, этот коллектив, будучи помещен в l-полуполосу $L_3(l)$, будет функционировать описанным в лемме образом. Таким образом, при $a_2 \geqslant 0$, лемма имеет место для $L = L_1$,при $a_2 = 0$, лемма имеет место для $L = L_2(l)$, при $a_1 \geqslant 0$, $a_2 = 0$, лемма имеет место для $L = L_3(l)$.

Пусть автомат U перемещается в лабиринте L с периодической выходной последовательностью. Обозначим длину периода этой последовательности через d, длину предпериода — d_0, клетку, в которой U находится в такт d_0 — (x, y). Рассмотрим минимальное натуральное n, такое что $n \cdot d \geqslant d_0$. Обозначим перемещение U за период его выходной последовательности через (s_1, s_2), перемещение U за первые $(n \cdot d - d_0)$ тактов n подряд идущих периодов его выходной последовательности — (s'_1, s'_2), а перемещение U за последние d_0 тактов n подряд идущих периодов его выходной последовательности — (s''_1, s''_2). Назовем клетку целочисленной плоскости $(x_0, y_0) = (x, y) - (s''_1, s''_2)$ *условной клеткой старта* автомата U. Обратим внимание на то, что, вообще говоря, условная клетка старта автомата может не принадлежать лабиринту L. В обозначениях этого параграфа имеет место следующая лемма.

Лемма 5. *Для любого натурального $k \geqslant \frac{d_0}{d}$, автомат U в такт $k \cdot d$ находится в клетке $(x_0, y_0) + k \cdot (s_1, s_2)$.*

Эта лемма доказана в работе [6] для автоматов, перемещающихся по плоскости (в работе [6] эта лемма имеет номер 7). Легко видеть (см. [6]), что эта лемма верна для любого лабиринта L одного из рассматриваемых типов L_1, $L_2(l)$, $L_3(l)$.

Назовем *h-четверкой* ($h \in \mathbb{N}$) четверку $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$, где $\tau_0, d \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, x, y \in \mathbb{Z}$, $d \leqslant \tau_0$, $|s_1| + |s_2| \leqslant \max\{h \cdot d,\ \tau_0\}$. Если рассматриваемые нами хищники и жертвы перемещаются в лабиринте L_1, будем рассматривать только такие h-четверки $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$, для которых $s_2 \geqslant 0$; если хищники и жертвы перемещаются в лабиринте $L_2(l)$, будем рассматривать только такие h-четверки, для которых $s_2 = 0$; если хищники и жертвы перемещаются в лабиринте $L_3(l)$, будем рассматривать только такие h-четверки, для которых $s_2 = 0$, $s_1 \geqslant 0$. Таким образом, если преследование происходит в лабиринте L, то в качестве третьего элемента h-четверки может рассматриваться только вектор, являющийся вектором перемещения некоторого автомата, имеющего скорость h, за период его выходной последовательности в лабиринте L.

h-четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ характеризует автомат-жертву $U = U(R, h)$, перемещающийся в лабиринте L, если U имеет периодическую выходную последовательность с длиной периода, не превосходящей d, длиной предпериода, не превосходящей τ_0, вектор перемещения за период выходной последовательности (s_1, s_2) и условную клетку старта $(x_0, y_0) = (x, y) - i \cdot (s_1, s_2)$, при некотором $i \in \mathbb{N}_0$, $i \leqslant \tau_0$.

Правильный коллектив $(W_1, \ldots, W_{10})(R, V)$ расположен в *$(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции*, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ — $(V-1)$-четверка, W_1 находится в состоянии $q = (\mathrm{sgn}_0(s_1), \mathrm{sgn}_0(s_2), q')$, и автоматы W_2, W_3, W_4 и W_{10} находятся в клетках $(x + |s_1|, y)$, $(x + |s_2|, y)$, $(x + \tau_0, y)$, $(x + (V-1)d, y)$ соответственно, а остальные автоматы — в клетке (x, y).

В работе [6] для автоматов, перемещающихся по плоскости, доказана следующая лемма (в [6] данная лемма имеет номер 8).

Лемма 6. *Существует коллектив хищников $K = (W_1, \ldots, W_{10})(R, V)$, такой что для любой жертвы $U = U(R, V-1)$ коллектив K, стартуя в такт τ из $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, где $\tau \leqslant 3\tau_0$, останавливается в той же позиции, причем, если $(V-1)$-четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ характеризует U, то K обнаруживает U.*

Докажем аналогичную лемму для автоматов, перемещающихся в произвольном лабиринте L одного из рассматриваемых типов L_1, $L_2(l)$, $L_3(l)$.

Лемма 7. *Существует коллектив хищников* $K = (W_1, \ldots, W_{10})(R, V)$, *такой что для любой жертвы* $U = U(R, V-1)$ *коллектив* K, *стартуя в произвольном лабиринте* $L \in \{L_1\} \cup \{L_2(l) \,|\, l \in \mathbb{N}\} \cup \{L_3(l) \,|\, l \in \mathbb{N}\}$ *в такт* τ *из* $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-*позиции, где* $\tau \leqslant 3\tau_0$, *останавливается в той же позиции, причем, если* $(V-1)$-*четверка* $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ *характеризует* U, *то* K *обнаруживает* U.

Доказательство. Переобозначим коллектив K из леммы 8 в [6], как K'. В доказательстве леммы 8 из [6] положим константу $c' = 2 \cdot]\frac{V}{V-1}[\cdot c$, то есть вдвое больше, чем в [6], и построим коллектив K так же, как в лемме 8 ([6]).

Очевидно, что K, стартуя в такт τ из $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, где $\tau \leqslant 3\tau_0$, останавливается в той же позиции. Пусть теперь $(V-1)$-четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ характеризует U. Легко видеть, что K, так же, как и K', отправляет W_7 в клетку $(x + f_1, y + f_2)$, принадлежащую траектории U, в которой W_7 оказывается не позже, чем U. Здесь $f_i = 2 \cdot c \cdot V \cdot]\tau_0/V[\cdot s_i$, $i = 1, 2$. Обозначим, как и в работе [6], такт, в который автомат W_7 покинет клетку $(x + f_1, y + f_2)$ как $(\tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$. Здесь τ_1 и τ_2 — те же, что и в лемме 8 ([6]), а $\tau_3 = 2 \cdot d \cdot (V-1) \cdot c' \cdot]\tau_0/V[= 4 \cdot d \cdot c \cdot]\frac{V}{V-1}[\cdot (V-1) \cdot]\tau_0/V[$, где $c = (3V-1)$. Тогда последнее неравенство в доказательстве леммы 8 ([6]) принимает вид

$$(\tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \geqslant \tau_3 = 2]\tau_0/V[\cdot c' \cdot (V-1) \cdot d \geqslant 4]\tau_0/V[\cdot V \cdot c \cdot d = k \cdot d.$$

Здесь $k = 4 \cdot c \cdot V \cdot]\tau_0/V[$. Заметим, что $c \geqslant 5$ (так как $V \geqslant 2$) и $k \geqslant 2 \cdot \tau_0$. Так как длина d_0 предпериода выходной последовательности U не превосходит τ_0, имеет место неравенство $k \geqslant \frac{\tau_0}{d} \geqslant \frac{d_0}{d}$. По лемме 5, если U не будет обнаружен хищниками ранее, то в такт $k \cdot d$ он будет находиться в клетке $(x_0, y_0) + k \cdot (s_1, s_2) = (x, y) + (k - i) \cdot (s_1, s_2) = (x + f_1, y + f_2) + (2 \cdot c \cdot V \cdot]\tau_0/V[- i) \cdot (s_1, s_2)$, где (x_0, y_0) — условная клетка старта жертвы U, $0 \leqslant i \leqslant \tau_0$. Легко видеть, что $2 \cdot c \cdot V \cdot]\tau_0/V[= k/2 \geqslant \tau_0 \geqslant i$. Значит, жертва U покинет клетку $(x + f_1, y + f_2)$ не позднее, чем в такт $k \cdot d$. Таким образом, как и в лемме 8 ([6]), хищник W_7 окажется в клетке $(x + f_1, y + f_2)$ не позже чем U, и покинет ее не раньше чем U. Следовательно, жертва будет обнаружена. Лемма доказана.

Пусть коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ $(m \geqslant 3)$, расположен на плоскости так, что $\mathcal{A}_3$ находится в клетке $(x_0 + a, y_0)$ $(a \in \mathbb{N})$, а все автоматы, кроме $\mathcal{A}_3$, расположены в клетке (x_0, y_0). Будем говорить, что коллектив K находится в *a-расстановке с центром* (x_0, y_0). В работе [6] для автоматов, перемещающихся по плоскости, доказана следующая лемма (в [6] она имеет номер 5).

Лемма 8. *Существует коллектив* $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)(V, V)$*, который, стартуя в такт* τ_0 *из* τ_0*-расстановки с центром* (x_0, y_0)*, в такт* $\widetilde{\tau}_0$ *окажется в* $(\widehat{\tau}_0, \widetilde{\tau}_0)$*-расстановке с центром* (x_0, y_0)*, где* $\widehat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$*,* $\widetilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2 \cdot]\tau_0/(V-1)[$*.*

Из построения коллектива K_c (см. [6]) очевидно, что этот коллектив будет функционировать описанным в лемме образом, будучи помещен в любой лабиринт одного из расстатриваемых типов: L_1, $L_2(l)$, $L_3(l)$. Таким образом, лемма имеет место для любого из рассматриваемых типов лабиринтов.

Определим схему функционирования системы автоматов так же, как в работе [6]. *Схема функционирования системы автоматов* это набор записей следующего вида. Первая запись содержит пары вида (наименование автомата, внутренний алфавит) для каждого автомата системы. Например,
1) $(U_1, \{q_1, q_2\})$, $(U_2, \{q\})$.
Остальные записи содержат наименование автомата (например, U_1), условия, в которых он может находиться, и его поведение в этих условиях (между условиями и поведением автомата ставится разделяющий символ $\rightarrow$). Условия — это некоторое подмножество декартова произведения внутреннего и входного алфавитов U_1. Поведение — это элемент декартова произведения внутреннего и выходного алфавитов U_1. Такая запись означает, что автомат U_1 в данном состоянии, получив данный входной символ, перейдет в соответствующее следующее состояние и выдаст соответствующий выходной символ. Если для какого-то автомата нет записи, соответствующей некоторым условиям, в которых он может находиться, подразумевается, что в этих условиях автомат не меняет состояние и стоит на месте. Например,
2) U_1, (q_1), $\rightarrow (q_2, (1, 0))$.

3) U_1, (q_2), $\to (q_1, (-1, 0))$.
Схема функционирования из строк 1)–3) задает систему автоматов (U_1, U_2), такую что U_1 в четные такты делает шаг вправо, а в нечетные — шаг влево, а U_2 стоит на месте. Как в этом примере, везде далее в случае, когда берется декартово произведение собственного подмножества внутреннего алфавита на входной алфавит, или декартово произведение собственного подмножества входного алфавита на внутренний алфавит, в схеме функционирования указывается только собственное подмножество. Схема функционирования системы автоматов корректна, если для каждого автомата каждый элемент декартова произведения его внутреннего и входного алфавитов встречается не более чем в одной записи. Корректно записанная схема функционирования однозначно задает систему автоматов. Если в первой строке схемы функционирования системы автоматов алфавиты автоматов заданы при помощи перечисления, то, если не оговорено противное, начальным состоянием каждого автомата является первый (в порядке перечисления) символ его внутреннего алфавита.

Пусть даны системы автоматов $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m) = (W_1, \ldots, W_m)(R, V)$ и $(\mathcal{A}_{m+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m+n}) = (U_1, \ldots, U_n)(R', V')$, и заданы расположения этих автоматов в лабиринте L и их состояния в текущий момент $(2\tau + 1)$ и предыдущий момент 2τ ($\tau \in \mathbb{N}_0$). Введем следующие предикаты.

1) $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $(2\tau + 1)$ находится в h-окрестности $\mathcal{A}_i$, 0 — иначе.
2) $P'_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, q)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $(2\tau + 1)$ находится в h-окрестности $\mathcal{A}_i$, и $\mathcal{A}_j$ находится в состоянии q, и 0 — иначе.
3) $P''_h(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если существует натуральное число k, такое что $m + 1 \leqslant k \leqslant m + n$ и $\mathcal{A}_k$ находился в h-окрестности $\mathcal{A}_i$ хотя бы в один из моментов $\{\, 2\tau,\ (2\tau + 1)\,\}$, и $P''_h(\mathcal{A}_i) = 0$ — иначе.
4) $P^1_{bort}(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если $\mathcal{A}_i$ в момент $(2\tau + 1)$ видит нижний борт на расстоянии 1 от себя, и 0 — иначе.
5) $P^2_{bort}(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если $\mathcal{A}_i$ в момент $(2\tau + 1)$ видит верхний борт на расстоянии 1 от себя, и 0 — иначе.

При любых $h = 0, \ldots, R$, $i, j = 1, \ldots, m$, $q \in Q_j$ (Q_j — внутренний алфавит $\mathcal{A}_j$), входной символ автомата $\mathcal{A}_i$ однозначно определяет значение предикатов $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$, $P'_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, q)$ и $P''_h(\mathcal{A}_i)$. Аналогично, входной символ $\mathcal{A}_i$ однозначно определяет значение предиката P^1_{bort}, при $L = L_1$, $L = L_2(l)$, $L = L_3(l)$, и предиката P^2_{bort}, при $L = L_2(l)$ и $L = L_3(l)$. То есть каждый хищник $\mathcal{A}_i$ в каждый момент хода «знает» значение этих предикатов.

Если $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)= 1$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит* $\mathcal{A}_j$ *в своей* h*-окрестности* (при $h = R$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит* $\mathcal{A}_j$). Если $P''_h(\mathcal{A}_i) = 1$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит жертв в своей* h*-окрестности* (при $h = R$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит жертв*).

Будем говорить, что клетка (x, y) *расположена правее* клетки (x', y'), если $x-x' > 0$, и будем говорить, что клетка (x, y) *расположена левее* клетки (x', y'), если $x - x' < 0$. Аналогично, будем говорить, что клетка (x, y) *расположена выше* клетки (x', y'), если $y - y' > 0$, и будем говорить, что клетка (x, y) *расположена ниже* клетки (x', y'), если $y - y' < 0$.

Клетка (x_2, y_2) называется *ближайшей к клетке* (x_1, y_1) *клеткой* V*-окрестности* (x_0, y_0), если $(x_2, y_2) \in D_{(x_0,y_0),V}$, и для любой клетки (x_3, y_3) из $D_{(x_0,y_0),V}$ выполнено $|x_2-x_1|+|y_2-y_1| \leqslant |x_3-x_1|+|y_3-y_1|$, причем (x_2, y_2) является самой верхней среди самых правых клеток, удовлетворяющих данному набору неравенств. Легко видеть, что для любого лабиринта L одного из трех рассматриваемых типов верно, что если клетки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) принадлежат L, то и клетка (x_2, y_2) принадлежит L. Будем говорить, что автомат $\mathcal{A}(R, V)$, находящийся в клетке (x_0, y_0), сделал *ход к клетке* (x_1, y_1), если он за один такт переместился в клетку (x_2, y_2) — ближайшую к клетке (x_1, y_1) клетку V-окрестности (x_0, y_0).

Состояние автомата назовем *финальным*, если, попав в это состояние, автомат останавливается (при любых входных символах). Пусть дан автомат $\mathcal{A}_1$ с начальными состояниями $q^1_0, \ldots, q^k_0$ и автомат $\mathcal{A}_2$. *Композицией автоматов* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ называется автомат с начальными состояниями $q^1_0, \ldots, q^k_0$, диаграмма Мура которого получена из объединения диаграмм Мура автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ отождествлением (склеиванием) каждого финального состояния автомата $\mathcal{A}_1$ с некоторым состоянием автомата $\mathcal{A}_2$. Склеивание состояний происходит по следующим правилам:

а) если автомат $\mathcal{A}_1$ имеет 4 финальных состояния: $(1, 1, q^1)$, $(-1, 1, q^1)$, $(1, -1, q^1)$ и $(-1, -1, q^1)$, а автомат $\mathcal{A}_2$ имеет 4 начальных состояния: $(1,1,q^2)$, $(-1,1,q^2)$, $(1,-1,q^2)$ и $(-1,-1,q^2)$, где q^1 и q^2 произвольные, то каждое состояние (q',q'',q^1) склеивается с состоянием (q',q'',q^2) $(q',q''\in\{-1,1\})$;

б) если автомат $\mathcal{A}_2$ имеет единственное начальное состояние, то все финальные состояния $\mathcal{A}_1$ склеиваются с начальным состоянием $\mathcal{A}_2$.

в) во всех случаях, кроме а), б), композиция автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ определена только в том случае, если специально указано, как производится склеивание финальных состояний $\mathcal{A}_1$ с состояниями $\mathcal{A}_2$.

Запись $\mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_2\to\mathcal{A}$ означает, что строится автомат $\mathcal{A}$, по определению равный композиции автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Рассмотрим коллективы автоматов $K(R,V)=(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_m)$ и $K'(R,V)=(\mathcal{A}'_1,\dots,\mathcal{A}'_{m'})$ $(m\geqslant m')$. Пусть даны натуральные числа $i_1,\dots,i_{m'}$ $(1\leqslant i_1,\dots,i_{m'}\leqslant m)$, которые будем называть *стыковочными*. Введем понятие i_h-композиции коллективов K и K'.

i_h-композицией коллективов K и K' (где $h\in\mathbb{N}$, $1\leqslant h\leqslant m'$) называется коллектив $K''=(\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_m)(R,V)$, автоматы которого определяются так.

1) $\mathcal{B}_i=\mathcal{A}_i$ при $i\neq i_p$ $(p=1,\dots,m')$.

2) $\mathcal{B}_{i_h}$ есть композиция $\mathcal{A}_{i_h}$ и $\mathcal{A}'_h$.

3) Если автомат $\mathcal{A}_{i_p}$ $(p=1,\dots,m',\ p\neq h)$ не имеет финальных состояний, то $\mathcal{B}_{i_p}=\mathcal{A}_{i_p}$.

4) Если $\mathcal{A}_{i_p}$ $(p=1,\dots,m',\ p\neq h)$ имеет финальные состояния, диаграмма Мура $\mathcal{B}_{i_p}$ получается из объединения диаграмм Мура $\mathcal{A}_{i_p}$ и $\mathcal{A}'_p$. Начальное состояние есть начальное состояние $\mathcal{A}_{i_p}$. Добавляются стрелки, описывающие следующие переходы: для каждого входного символа $\mathcal{A}'_p$, соответствующего тому, что некоторый $\mathcal{A}'_j$ $(1\leqslant j\leqslant m')$ находится в зоне обзора $\mathcal{A}'_p$, автомат $\mathcal{B}_{i_p}$ из каждого состояния q_{i_p}, которое является финальным для $\mathcal{A}_{i_p}$, переходит в то же состояние и выдает тот же выходной символ, что и $\mathcal{A}'_p$ в некотором состоянии q'_p с этим же входным символом.

То есть, увидев автомат $\mathcal{B}_j$ в состоянии, являющимся состоянием $\mathcal{A}'_j$, автомат $\mathcal{B}_{i_p}$ выходит из финального состояния $\mathcal{A}_{i_p}$ и начинает функционировать как $\mathcal{A}'_p$ в состоянии q'_p. Состояние q'_p автомата $\mathcal{A}'p$ называется *сопоставленным состоянию* q_{i_p} автомата $\mathcal{A}_{i_p}$. Состояния сопоставляются друг другу следующим образом:

а) если автомат $\mathcal{A}_{i_p}$ $(p \neq h)$ имеет 4 финальных состояния: $(1, 1, q^{i_p})$, $(-1, 1, q^{i_p})$, $(1, -1, q^{i_p})$ и $(-1, -1, q^{i_p})$, а автомат $\mathcal{A}'_p$ имеет 4 начальных состояния: $(1, 1, \hat{q}^p)$, $(-1, 1, \hat{q}^p)$, $(1, -1, \hat{q}^p)$ и $(-1, -1, \hat{q}^p)$, где q^{i_p} и $\hat{q}^p$ произвольные, то каждому состоянию (q', q'', q^{i_p}) автомата $\mathcal{A}_{i_p}$ сопоставляется состояние $(q', q'', \hat{q}^p)$ автомата $\mathcal{A}'_p$ $(q', q'' \in \{-1, 1\})$;

б) если $\mathcal{A}'_p$ имеет единственное начальное состояние, каждому финальному состоянию $\mathcal{A}_{i_p}$ сопоставляется начальное состояние автомата $\mathcal{A}'_p$.

в) i_h-композиция K и K' определена только в том случае, если для всех $p \in \{1, \ldots, m'\}$, для которых $\mathcal{A}_{i_p}$ имеет финальные состояния, и не имеет места ни случай а), ни случай б), специально указано, как производится сопоставление финальным состояниям $\mathcal{A}_{i_p}$ состояний $\mathcal{A}'_p$ (при $p = h$ речь идет не о сопоставлении, а о склеивании).

Содержательно, i_h-композиция — это коллектив K'', такой, что если при функционировании K автомат $\mathcal{A}_{i_h}$ обязательно останавливается, и все автоматы, которые останавливаются, останавливаются не позже, чем $\mathcal{A}_{i_h}$, то K'' сначала функционирует как K, а после того, как $\mathcal{A}_{i_h}$ остановится, те автоматы K'' с номерами i_p $(p = 1, \ldots, m')$, которые останавливаются, начинают действовать, как коллектив K', а остальные автоматы коллектива K'' функционируют так же, как функционировали в составе коллектива K.

Запись $(K \circ K')(i_1, \ldots, i_{m'}) \xrightarrow{i_h} K''$ означает, что строится коллектив K'', по определению равный i_h-композиции коллективов K и K' при стыковочных числах $i_1, \ldots, i_{m'}$.

Фиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}_0$. Для каждого $i = 1, 2, 3$ построим упорядоченный набор M_k^i, элементами которого являются все вектора (s_1, s_2) $(s_1, s_2 \in \mathbb{Z})$, удовлетворяющие условиям

1) $(|s_1| + |s_2|) = k$.

2) $s_2 \geqslant 0$ при $i = 1$;
   $s_2 = 0$ при $i = 2$;
   $s_2 = 0,\ s_1 \geqslant 0$ при $i = 3$.

При $k = 0$ каждый набор M_k^i состоит из одного элемента $z^0 = (0,0)$.

Рассмотрим $i = 1$. Набор M_1^1 состоит из элементов z_1^1, z_2^1, z_3^1 равных $(1,0), (0,1), (-1,0)$ соответственно. При $k > 1$ набор M_k^1 состоит из элементов $z_1^k, \ldots, z_{2k+1}^k$ соответственно равных $(k,0), (k-1,1), \ldots, (0,k)$,$(-1,k-1), \ldots, (-k,0)$.

Пусть $(s_1, s_2) = z_j^k \quad (1 \leqslant j \leqslant 2k+1)$. Вектор (s_1', s_2') назовем *h-следующим за вектором* (s_1, s_2) $(h \in \mathbb{N})$, если $k \leqslant h$ и

$$(s_1', s_2') = \begin{cases} z_{j+1}^k,\ j < 2k+1; \\ z_1^{k+1},\ j = 2k+1,\ k < h. \end{cases}$$

Для вектора $(s_1, s_2) = z_{2h+1}^h$ h-следующий вектор не определен.

Рассмотрим $i = 2$. При $k \geqslant 1$ набор M_k^2 состоит из элементов z_1^k, z_2^k соответственно равных $(k,0), (-k,0)$.

Пусть $(s_1, s_2) = z_j^k \quad (j = 1,2)$. Вектор (s_1', s_2') назовем *h-следующим за вектором* (s_1, s_2) $(h \in \mathbb{N})$, если $k \leqslant h$ и

$$(s_1', s_2') = \begin{cases} z_2^k,\ j = 1; \\ z_1^{k+1},\ j = 2,\ k < h. \end{cases}$$

Для вектора $(s_1, s_2) = z_2^h$ h-следующий вектор не определен.

Рассмотрим $i = 3$. Набор M_k^3 при произвольном $k \in \mathbb{N}_0$ состоит из единственного элемента $z_1^k = (k,0)$.

Пусть $(s_1, s_2) = z_1^k$. Вектор (s_1', s_2') назовем *h-следующим за вектором* (s_1, s_2) $(h \in \mathbb{N})$, если $k < h$ и $(s_1', s_2') = z_1^{k+1}$. Для вектора $(s_1, s_2) = z_1^h$ h-следующий вектор не определен.

Таким образом, набор M_k^i определен при любых $k \in \mathbb{N}_0$, $i = 1,2,3$. Легко видеть, что M_k^1 состоит только из векторов длины k (под длиной вектора (s_1, s_2) будем понимать число $|s_1| + |s_2|$), являющихся вектором перемещения некоторого автомата в лабиринте L_1 за период его выходной последовательности, а M_k^i $(i = 2,3)$ состоит только из векторов длины k, являющихся вектором перемещения некоторого автомата в лабиринте $L_i(l)$ за период его выходной последовательности.

Если жертва U_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) в некоторый момент оказалась в зоне обзора хищника W_j ($1 \leqslant j \leqslant m$), будем говорить, что коллектив хищников *обнаружил* ее. Будем также говорить, что W_j обнаружил U_i. Наименьший момент, в который это произошло, будем называть моментом обнаружения.

Правильный коллектив $(W_1, \ldots, W_{11})(R, V)$ расположен в *сильной* $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$*-позиции*, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ — $(V-1)$-четверка, автоматы W_4 и W_{11} расположены в клетках (x, y) и $(x+\tau_0, y)$, соответственно, а расстановка подколлектива $(W_1, \ldots, W_{10})$ отличается от $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции лишь расположением W_4.

Пусть хищники и жертвы перемещаются в лабиринте L, который является одним из лабиринтов L_1, $L_2(l)$, $L_3(l)$. Если $L = L_1$, при рассмотрении каких-либо h-четверок вида $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ будем считать вектор (s_1, s_2) элементом набора M_k^1 (при некотором $k \in \mathbb{N}_0$). Если же $L = L_i(l)$ ($i = 2, 3$), то при рассмотрении каких-либо h-четверок вида $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ будем считать вектор (s_1, s_2) элементом набора M_k^i (при некотором $k \in \mathbb{N}_0$).

Коллектив хищников $K = (W_1, \ldots, W_{11})$ *обрабатывает автоматы с параметрами* (R, h) (где $h \in \mathbb{N}$), если для любой h-четверки $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$, и любого автомата-жертвы $U = U(R, h)$, перемещающегося в лабиринте L, K, стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, функционирует так, что выполнены следующие условия.

1) K обнаруживает U, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ характеризует U.
2) Если определен $(h \cdot d)$-следующий за (s_1, s_2) вектор, и этот вектор равен (s_1', s_2'), то K оказывается в некоторый такт $\tau_0' \geqslant \tau_0$ в сильной $(\tau_0', d, (s_1', s_2'), (x, y))$-позиции, и все автоматы K находятся в начальных состояниях.
3) Если $(h \cdot d)$-следующий за (s_1, s_2) вектор не определен, то K оказывается в некоторый такт $\tau_0' \geqslant \tau_0$ в сильной $(\tau_0', d+1, (0, 0), (x, y))$-позиции, причем каждый из автоматов W_4 и W_5 останавливается в состоянии, отличном от начального, и все автоматы K, кроме W_{11}, останавливаются не позднее W_8.

Заметим, что при $\tau_0' \geqslant \tau_0 + 1$ если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ — $(V-1)$-четверка, то рассмотренные выше черверки $(\tau_0', d, (s_1', s_2'), (x, y))$ и

$(\tau_0', d+1, (0,0), (x,y))$ также являются $(V-1)$-четверками. Действительно, если $(s_1, s_2) \in M_k^i$ (при некотором $k \in \mathbb{N}_0$, $i = 1,2,3$), то (s_1', s_2') принадлежит одному из наборов M_k^i, M_{k+1}^i. Свойства $(d+1) \leqslant \tau_0'$, и $(|s_1'| + |s_2'|) \leqslant \tau_0'$ следуют из того, что $(d+1) \leqslant \tau_0 + 1 \leqslant \tau_0'$ и $(|s_1'| + |s_2'|) \leqslant (|s_1| + |s_2|) + 1 \leqslant \tau_0 + 1 \leqslant \tau_0'$. Свойство $(|s_1'| + |s_2'|) \leqslant (V-1) \cdot d$ следует из того, что $(|s_1'| + |s_2'|) \leqslant (|s_1| + |s_2|) + 1$, $(|s_1| + |s_2|) \leqslant (V-1) \cdot d$ и $(|s_1'| + |s_2'|) = (|s_1| + |s_2|) + 1$ только при $(|s_1| + |s_2|) < (V-1) \cdot d$.

Неподвижный автомат с 1 состоянием будем обозначать $\mathcal{H}_0$.

Лемма 9. *Существуют коллективы хищников* $K^1 = (W_1^1, \ldots, W_{11}^1)$ (R, V), $K^2 = (W_1^2, \ldots, W_{11}^2)(R, V)$ *и* $K^3 = (W_1^3, \ldots, W_{11}^3)(R, V)$, *такие что*

1) K^1 *обрабатывает автоматы с параметрами* $(R, V-1)$ *в лабиринте* L_1*;*
2) K^i, $i = 2,3$, *при любом* $l \in \mathbb{N}$, *обрабатывает автоматы с параметрами* $(R, V-1)$ *в лабиринте* $L_i(l)$.

Доказательство. Будем рассматривать коллектив $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ (V, V) из леммы 8, как имеющий обзор R. Этот коллектив, стартуя в такт τ_0 ($\tau_0 \in \mathbb{N}$) из τ_0-расстановки, в такт $\widetilde{\tau}_0$ окажется в горизонтальной $(\widehat{\tau}_0, \widetilde{\tau}_0)$-расстановке, где $\widehat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$, $\widetilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2]\tau_0/(V-1)[$.

Переобозначим коллектив $(\mathcal{A}_1, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{A}_3)$ как K_1, а коллектив из леммы 7 — как K_2.

$(K_1 \circ K_2)(1, \ldots, 10) \xrightarrow{5} K_3 = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{11})(R, V)$.

Если K_3 стартовал в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, то в такт $\widetilde{\tau}_0$ подколлектив $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{10})$ оказывается в $(\widehat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, где $\widehat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$, $\widetilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2]\tau_0/(V-1)[$. Имеют место неравенства

$$\widetilde{\tau}_0 \leqslant \tau_0 + \frac{2\tau_0}{V-1} + 2 \leqslant \tau_0 \cdot \frac{3V}{V-1} \leqslant 3 \cdot (\tau_0 + \frac{\tau_0}{V-1}) \leqslant 3\widehat{\tau}_0.$$

Следовательно, по лемме 7, коллектив K_3 в произвольном лабиринте L одного из рассматриваемых типов обнаруживает жертву U, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ (и, следовательно, $(\widehat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$) характеризует U, а затем останавливается в $(\widehat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции.

Построим коллективы $K_4^1 = (\mathcal{B}_1^1, \ldots, \mathcal{B}_6^1)(R, V)$, $K_4^2 = (\mathcal{B}_1^2, \ldots, \mathcal{B}_6^2)$ (R, V) и $K_4^3 = (\mathcal{B}_1^3, \ldots, \mathcal{B}_6^3)(R, V)$, со следующими свойствами.

1) Коллектив $K_1 = (W_1^1, \ldots, W_{11}^1)(R, V)$, являющийся 8-композицией коллективов K_3 и K_4^1, стартуя в лабиринте L_1 в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, сначала функционирует как K_3, а потом в некоторый такт τ_0' при $(s_1, s_2) \neq z_{2(V-1)d+1}^{(V-1)d}$ коллектив K_1 останавливается в сильной $(\tau_0', d, (s_1', s_2'), (x, y))$-позиции, а при $(s_1, s_2) = z_{2(V-1)d+1}^{(V-1)d}$ коллектив K_1 останавливается в сильной $(\tau_0', d+1, (0,0), (x, y))$-позиции.
2) Коллектив $K_2 = (W_1^2, \ldots, W_{11}^2)(R, V)$, являющийся 8-композицией коллективов K_3 и K_4^2, при произвольном $l \in \mathbb{N}$, стартуя в лабиринте $L_2(l)$ в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, сначала функционирует как K_3, а потом в некоторый такт τ_0' при $(s_1, s_2) \neq z_2^{(V-1)d}$ коллектив K_2 останавливается в сильной $(\tau_0', d, (s_1', s_2'), (x, y))$-позиции, а при $(s_1, s_2) = z_2^{(V-1)d}$ коллектив K_2 останавливается в сильной $(\tau_0', d+1, (0,0), (x, y))$-позиции.
3) Коллектив $K_3 = (W_1^3, \ldots, W_{11}^3)(R, V)$, являющийся 8-композицией коллективов K_3 и K_4^3, при произвольном $l \in \mathbb{N}$, стартуя в лабиринте $L_3(l)$ в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, сначала функционирует как K_3, а потом в некоторый такт τ_0' при $|s_1| + |s_2| < (V-1) \cdot d$ коллектив K_3 останавливается в сильной $(\tau_0', d, (s_1', s_2'), (x, y))$-позиции, а при $|s_1|+|s_2| = (V-1)\cdot d$ коллектив K_3 останавливается в сильной $(\tau_0', d+1, (0,0), (x, y))$-позиции.

Приведем схемы функционирования коллективов K_4^i $i = 1, 2, 3$. Первые 23 строки выглядят единообразно для всех $i = 1, 2, 3$.
1) $(\mathcal{B}_1^i, \{-1, 1\}^2), (\mathcal{B}_2^i, \{q^2\}), (\mathcal{B}_3^i, \{q^3\}), (\mathcal{B}_4^i, \{q_0^4, q_1^4\})$, $(\mathcal{B}_5^i, \{q_1^5, \ldots, q_7^5\} \cup \{-1, 1\} \times \{q_8^5, \ldots, q_{16}^5\}), (\mathcal{B}_6^i, \{q^6\})$.

Все состояния автомата $\mathcal{B}_1^i$ являются начальными.

Автомат $\mathcal{B}_5^i$ идет к автомату $\mathcal{B}_4^i$ и передвигает его в клетку (x, y).
2) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_1^5, P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_4^i) = 0)$, $\to (q_1^5, (V, 0))$.
3) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_1^5, P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_4^i) = 1)$, $\to (q_2^5$, (ход в расположение $\mathcal{B}_4^i$)).
4) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_2^5, P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_1^i) = 0)$, $\to (q_2^5, (-V, 0))$.

5) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_2^5, P'_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_1^i, (q_1, q_2)) = 1)$, $\to$ $((q_1, q_8^5)$, (ход в расположение $\mathcal{B}_1^i$)), где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$.
6) $\mathcal{B}_4^i$, $(q_0^4, (P'_0(\mathcal{B}_4^i, \mathcal{B}_5^i, q_2^5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}_4^i, \mathcal{B}_1^i) = 0))$, $\to$ $(q_0^4, (-V, 0))$.
7) $\mathcal{B}_4^i$, $(q_0^4, (P'_0(\mathcal{B}_4^i, \mathcal{B}_5^i, q_2^5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}_4^i, \mathcal{B}_1^i) = 1))$, $\to$ $(q_1^4$, (ход в расположение $\mathcal{B}_1^i$)).

При $(s_1, s_2) = (0, 0)$ автомат $\mathcal{B}_2^i$ смещается на вектор $(1, 0)$, а $\mathcal{B}_5^i$ переходит в финальное состояние q_6^5.
8) $\mathcal{B}_2^i$, $(q^2, (P_0(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_3^i) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_1^i) = 1) \wedge (P'_0(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_5^i, (q_1, q_8^5)) = 1))$, $\to$ $(q^2, (1, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$.
9) $\mathcal{B}_5^i$, $((q_1, q_8^5), (P_0(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_2^i) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_3^i) = 1))$, $\to$ $(q_6^5, (0, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$.

Если $(s_1, s_2) = (-h,\ 0)$ при некотором $h = 1, \ldots, (V-1)\cdot d$, автомат $\mathcal{B}_5^i$ переходит в состояние q_3^5 и $\mathcal{B}_1^i$ переходит в состояние $(1, 1)$.
10) $\mathcal{B}_5^i$, $((-1, q_8^5), P_0(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_3^i) = 1)$, $\to$ $(q_3^5, (0, 0))$.
11) $\mathcal{B}_1^i$, $((-1, 1), (P_0(\mathcal{B}_1^i, \mathcal{B}_3^i) = 1) \wedge (P'_0(\mathcal{B}_1^i, \mathcal{B}_5^i, (-1, q_8^5)) = 1))$, $\to$ $((1, 1), (0, 0))$.

Затем $\mathcal{B}_5^i$ идет к $\mathcal{B}_2^i$. При $|s_1| < (V-1)d$ автомат $\mathcal{B}_2^i$ перемещается на вектор $(1, 0)$, а $\mathcal{B}_5^i$ возвращается к $\mathcal{B}_1^i$. После этого K_4^i останавливается.
12) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_3^5, P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_2^i) = 0)$, $\to$ $(q_3^5, (V, 0))$.
13) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_3^5, P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_2^i) = 1)$, $\to$ $(q_4^5$, (ход в расположение $\mathcal{B}_2^i$)).
14) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_4^5, (P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_1^i) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_6^i) = 0))$, $\to$ $(q_4^5, (-V, 0))$.
15) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_4^5, (P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_1^i) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_6^i) = 1))$, $\to$ $(q_5^5, (-V, 0))$.
16) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_4^5, (P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_1^i) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_6^i) = 0))$, $\to$ $(q_6^5$, (ход в расположение $\mathcal{B}_1^i$)).
17) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_4^5, (P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_1^i) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_6^i) = 1))$, $\to$ $(q_7^5$, (ход в расположение $\mathcal{B}_1^i$)).
18) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_5^5, P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_1^i) = 0)$, $\to$ $(q_5^5, (-V, 0))$.
19) $\mathcal{B}_5^i$, $(q_5^5, P_V(\mathcal{B}_5^i, \mathcal{B}_1^i) = 1)$, $\to$ $(q_7^5$, (ход в расположение $\mathcal{B}_1^i$)).
20) $\mathcal{B}_2^i$, $(q^2, (P'_0(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_5^i, q_4^5) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_6^i) = 0))$, $\to$ $(q^2, (1, 0))$.

При $|s_1| = (V-1)d$ автомат $\mathcal{B}_6^i$ передвигается на вектор $(V-1, 0)$, а автомат $\mathcal{B}_2^i$ возвращается к $\mathcal{B}_1^i$ вместе с $\mathcal{B}_5^i$. После этого коллектив останавливается.
21) $\mathcal{B}_6^i$, $(q^6, (P'_0(\mathcal{B}_6^i, \mathcal{B}_5^i, q_4^5) = 1))$, $\to$ $(q^6, (V-1, 0))$.
22) $\mathcal{B}_2^i$, $(q^2, ((P'_0(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_5^i, q_4^5) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_6^i) = 1) \vee (P'_0(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_5^i, q_5^5) = 1)) \wedge (P_V(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_1^i) = 0))$, $\to$ $(q^2, (-V, 0))$.

23) $\mathcal{B}_2^i$, $(q^2, ((P_0'(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_5^i, q_4^5) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_6^i) = 1) \vee (P_0'(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_5^i, q_5^5) = 1)) \wedge (P_V(\mathcal{B}_2^i, \mathcal{B}_1^i) = 1))$, $\to$ $(q^2$, (ход в расположение $\mathcal{B}_1^i$)).

Далее схема функционирования коллектива K_4^1 выглядит так.

Если $(s_1, s_2) \neq (-h, 0)$ ни при каком $h = 0, \ldots, (V-1) \cdot d$, то автомат $\mathcal{B}_5^1$, находясь в состоянии (q_1, q_8^5), при $(s_1, s_2) \neq (0,\, h \cdot d)$, переходит в состояние (q_1, q_9^5), а при $(s_1, s_2) = (0,\, h \cdot d)$ — в состояние (q_1, q_{13}^5), где $q_1 \in \{-1, 1\}$. При $(s_1, s_2) = (0,\, h{\cdot}d)$, автомат $\mathcal{B}_1^1$ переходит в состояние $(-1, 1)$.

24) $\mathcal{B}_1^1$, $((1,1), (P_0(\mathcal{B}_1^1, \mathcal{B}_2^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_1^1, \mathcal{B}_3^1) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{B}_1^1, \mathcal{B}_5^1, (1, q_8^5)) = 1))$, $\to$ $((-1,1), (0,0))$.

25) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_8^5), (P_0(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_2^1) = 0) \wedge ((P_0(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_3^1) = 0) \vee (q_1 = 1))$, $\to$ $((q_1, q_9^5), (0,0))$.

26) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_8^5), ((P_0(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_2^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_3^1) = 0))$, $\to$ $((q_1, q_{13}^5), (0,0))$.

Затем автомат $\mathcal{B}_5^1$ идет к автомату $\mathcal{B}_2^1$.

27) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_2^1) = 0)$, $\to$ $((q_1, q_i^5), (V, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$, $i = 9, 13$.

28) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_2^1) = 1)$, $\to$ $((q_1, q_{i+1}^5)$, (ход в расположение $\mathcal{B}_2^1$)), где $q_1 \in \{-1, 1\}$, $i = 9, 13$.

$\mathcal{B}_2^1$ смещается на 1 в нужную сторону.

29) $\mathcal{B}_2^1$, $(q^2, P_0'(\mathcal{B}_2^1, \mathcal{B}_5^1, (q_1, q_{10}^5)) = 1)$, $\to$ $(q^2, (-q_1, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$.

30) $\mathcal{B}_2^1$, $(q^2, P_0'(\mathcal{B}_2^1, \mathcal{B}_5^1, (q_1, q_{14}^5)) = 1)$, $\to$ $(q^2, (q_1, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$.

Автомат $\mathcal{B}_5^1$ возвращается к $\mathcal{B}_1^1$ и идет к автомату $\mathcal{B}_3^1$.

31) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_1^1) = 0)$, $\to$ $((q_1, q_i^5), (-V, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$, $i = 10, 14$.

32) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_1^1) = 1)$, $\to$ $((q_1, q_{i+1}^5)$, (ход в расположение $\mathcal{B}_1^1$)), где $q_1 \in \{-1, 1\}$, $i = 10, 14$.

33) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_3^1) = 0)$, $\to$ $((q_1, q_i^5), (V, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$, $i = 11, 15$.

34) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_3^1) = 1)$, $\to$ $((q_1, q_{i+1}^5)$, (ход в расположение $\mathcal{B}_3^1$)), где $q_1 \in \{-1, 1\}$, $i = 11, 15$.

$\mathcal{B}_3^1$ смещается на 1 в нужную сторону.

35) $\mathcal{B}_3^1$, $(q_0^3, P_0'(\mathcal{B}_3^1, \mathcal{B}_5^1, (q_1, q_{12}^5)) = 1)$, $\to$ $(q_0^3, (q_1, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$.

36) $\mathcal{B}_3^1$, $(q_0^3, P_0'(\mathcal{B}_3^1, \mathcal{B}_5^1, (q_1, q_{16}^5)) = 1)$, $\to$ $(q_0^3, (-q_1, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$.

Автомат $\mathcal{B}_5^1$ возвращается к $\mathcal{B}_1^1$ и коллектив останавливается.

37) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_1^1) = 0), \to ((q_1, q_i^5), (-V, 0))$, где $q_1 \in \{-1, 1\}$, $i = 12, 16$.
38) $\mathcal{B}_5^1$, $((q_1, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5^1, \mathcal{B}_1^1) = 1), \to (q_6^5,$ (ход в расположение $\mathcal{B}_1^1$)), где $q_1 \in \{-\ 1, 1\}$, $i = 12, 16$.

Таким образом K_4^1 построен. Схема функционирования коллектива K_4^2 после 23-й строки выглядит так.

Если $(s_1, s_2) \neq (-h,\, 0)$ ни при каком $h = 0, \ldots, (V-1) \cdot d$, то автомат $\mathcal{B}_1^2$ переходит в состояние $(-1, 1)$, а автомат $\mathcal{B}_5^2$ — в финальное состояние q_6^5.
24) $\mathcal{B}_1^2$, $((1, 1), (P_0(\mathcal{B}_1^2, \mathcal{B}_2^2) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{B}_1^2, \mathcal{B}_5^2, (1, q_8^5)) = 1)), \to ((-1, 1), (0, 0))$.
25) $\mathcal{B}_5^2$, $((1, q_8^5), P_0(\mathcal{B}_5^2, \mathcal{B}_2^2) = 0), \to (q_6^5, (0, 0))$.

Таким образом K_4^2 построен. Схема функционирования коллектива K_4^3 после 23-й строки выглядит так.

Если $s_1 > 0$, автомат $\mathcal{B}_5^3$ переходит в состояние q_3^5.
24) $\mathcal{B}_5^3$, $((1, q_8^5), P_0(\mathcal{B}_5^3, \mathcal{B}_2^3) = 0), \to (q_3^5, (0, 0))$.

После этого функционирование K_4^3 происходит в соответствии со строками 12)–23) его схемы функционирования. Таким образом K_4^3 построен.

$$(K_3 \circ K_4^1)(1, 2, 3, 4, 8, 10) \xrightarrow{8} K^1;$$
$$(K_3 \circ K_4^2)(1, 2, 3, 4, 8, 10) \xrightarrow{8} K^2;$$
$$(K_3 \circ K_4^3)(1, 2, 3, 4, 8, 10) \xrightarrow{8} K^3.$$

Для каждого $i = 1, 2, 3$ модифицируем K^i так, чтобы в случае, когда W_8^i останавливается в состоянии q_6^5, в следующий такт времени W_8^i и все автоматы, находящиеся с ним в одной клетке, переходили в свои начальные состояния (в этом случае все остальные автоматы также находятся в начальных состояниях). Заметим, что если W_8^i останавливается в состоянии q_7^5, то W_4^i и W_5^i останавливаются в состояниях, отличных от начального.

Полученные коллективы K^1, K^2 и K^3 удовлетворяют условию леммы. Лемма доказана.

Расстановку коллектива $K_1 = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$ назовем *треугольной a-расстановкой с центром* $(x_0, 1)$ $(a \in \mathbb{N})$, если координаты автоматов $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ равны $(x_0, 1)$, $(x_0, 2)$, $(x_0 + a, a + 2)$, соответственно (где $x_0 \in \mathbb{Z}$). Треугольник $\{(x, y) |\, x, y \in \mathbb{Z},\, y \geqslant 1,\, x \leqslant$

$x_0 + a,\ (x - y) \geqslant x_0 - 2\}$ называется *соответствующим* данной треугольной a-расстановке. Треугольная $(a+2)$-расстановка с центром $(x_0 - 1, 1)$ называется *следующей за треугольной a-расстановкой с центром* $(x_0, 1)$.

Последовательность треугольных расстановок коллектива K_1, такую что для любого $k \in \mathbb{N}$, k-я расстановка является треугольной $(2k-1)$-расстановкой, и $k+1$-я расстановка является следующей за k-й расстановкой, назовем *базовой.* Обозначим треугольник, соответствующий k-й расстановке, как Δ_k.

Легко видеть, что для базовой последовательности расстановок выполнены свойства

1) $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \Delta_k \subset \Delta_{k+1}$.
2) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k = L_1$.
3) $\forall\, k \in \mathbb{N}\quad \Delta_k$ — прямоугольный треугольник.

Лемма 10. *Существуют коллективы* $K_1 = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)(V, V)$, $K_2 = (\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \mathcal{A}'_3)(V, V)$, $K_3 = (\mathcal{A}''_1, \mathcal{A}''_2)(V, V)$, *такие что*

1) K_1, стартуя из произвольного канонического расположения на полуплоскости, обходит L_1, причем $\mathcal{A}_1$ проходит через каждую клетку счетное число раз;

2) K_i, $i = 2, 3$, при любом $l \in \mathbb{N}$, стартуя из произвольного канонического расположения на $L_i(l)$, обходит $L_i(l)$, причем $\mathcal{A}'_1$ (или $\mathcal{A}''_1$) проходит через каждую клетку счетное число раз.

Доказательство. Построим коллектив $K_1 = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$, который, стартуя из канонического расположения, функционирует следующим образом.

1. Из произвольного канонического расположения K_1 переходит в треугольную 1-расстановку.

2. Если K_1 стартует из треугольной a-расстановки ($a \in \mathbb{N}$), то $\mathcal{A}_1$ обходит соответствующий этой расстановке треугольник, и K переходит в следующую за ней треугольную $(a+2)$-расстановку.

Такой коллектив обходит последовательность треугольников Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \ldots \Delta_k, \ldots$ ($k \in \mathbb{N}$). Каждый такой треугольник содержится во всех последующих, и объединение всех этих треугольников есть L_1.

Следовательно, $\mathcal{A}_1$ проходит через каждую клетку L_1 счетное число раз. Значит, коллектив, удовлетворяющий п. 1, 2, удовлетворяет условию п. 1) леммы.

Перечень автоматов коллектива K_1 и их алфавитов.

1) $(\mathcal{A}_1, \{q_0^1, q_1^1, \ldots, q_4^1\}), (\mathcal{A}_2, \{q_0^2, q_1^2\}), (\mathcal{A}_3, \{q_0^3, \ldots, q_3^3\})$.

Переход из канонического расположения в треугольную 1-расстановку.

2) $\mathcal{A}_1$, $(q_0^1, (P^1_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_0^1, (0, -1))$.
3) $\mathcal{A}_2$, $(q_0^2, (P^1_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_0^2, (0, -1))$.
4) $\mathcal{A}_3$, $(q_0^3, (P^1_{bort}(\mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_0^3, (0, -1))$.
5) $\mathcal{A}_1$, $(q_0^1, (P^1_{bort}(\mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_1^1, (0, 0))$.
6) $\mathcal{A}_2$, $(q_0^2, (P^1_{bort}(\mathcal{A}_2) = 1))$, $\to (q_1^2, (0, 1))$.
7) $\mathcal{A}_3$, $(q_0^3, (P^1_{bort}(\mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (q_1^3, (1, 1))$.
8) $\mathcal{A}_3$, (q_1^3), $\to (q_2^3, (0, 1))$.

Пусть в такт τ_0 K_1 находится в треугольной $(2k-1)$-расстановке с центром $(x_0, 1)$.

$\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0, 1)$ со скоростью 1 до встречи с $\mathcal{A}_2$.

9) $\mathcal{A}_1$, $(q_1^1, P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0)$, $\to (q_1^1, (0, 1))$.

Когда $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ оказались в одной клетке, но не в одной клетке с $\mathcal{A}_3$, тогда $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(1, 1)$, а затем $\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0, -1)$ до борта.

10) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P'_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_1^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_1^2, (1, 1))$.
11) $\mathcal{A}_1$, $(q_1^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_2^1, (1, 1))$.
12) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, (P^1_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_2^1, (0, -1))$.

После этого K_1 повторяет действия п. 9)–12) ($\mathcal{A}_1$ снова идет к $\mathcal{A}_2$, и т. д). После одного или нескольких повторений действий п. 9)–12) $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ окажутся в той же клетке, что и $\mathcal{A}_3$. Пусть это произошло в такт τ_1. С такта τ_0 до такта τ_1 включительно, $\mathcal{A}_3$ находится в вершине при остром угле Δ_k. Все это время $\mathcal{A}_3$ перемещается по гипотенузе треугольника Δ_k, находясь на одной вертикали с $\mathcal{A}_1$. Перемещаясь между $\mathcal{A}_2$ и бортом, автомат $\mathcal{A}_1$ за промежуток времени $[\tau_0, \tau_1]$ обходит весь треугольник Δ_k, кроме клетки $(x_0 - 1, 1)$.

Затем $\mathcal{A}_3$ сдвигается на вектор $(1, 2)$, перемещаясь в вершину при остром угле Δ_{k+1}, автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(0, 1)$ и $\mathcal{A}_1$ переходит в состояние q_3^1.

13) $\mathcal{A}_3$, $(q_2^3, (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_3^3, (1, 1))$.

14) $\mathcal{A}_3$, (q_3^3), $\to (q_2^3, (0,1))$.
15) $\mathcal{A}_1$, $(q_1^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (q_3^1, (0,1))$.
16) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_1^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (q_1^2, (0,1))$.

Затем начинается обратный проход (повторный обход треугольника Δ_k и клеток над его гипотенузой). Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_3$ не находятся в одной клетке на 1 выше борта, то автомат $\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0,-1)$ до борта.
17) $\mathcal{A}_1$, $(q_3^1, (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_3^1, (0,-1))$.

Оказавшись у борта, $\mathcal{A}_1$ идет вверх до встречи с $\mathcal{A}_2$, если они уже не находятся в одной клетке.
18) $\mathcal{A}_1$, $(q_3^1, (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_1^4, (0,1))$.
19) $\mathcal{A}_1$, $(q_4^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_1^4, (0,1))$.

После того, как $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ оказались в одной клетке, они сдвигаются на вектор $(-1,-1)$.
20) $\mathcal{A}_1$, $(q_4^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1))$, $\to (q_3^1, (-1,-1))$.
21) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_4^1) = 1))$, $\to (q_1^2, (-1,-1))$.

После этого K_1 повторяет действия п. 17)-21) ($\mathcal{A}_1$ снова идет к борту, и т. д). После одного или нескольких повторений действий п. 17)–21) $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и встретятся, находясь у борта. Пусть это произошло в такт τ_2. С такта τ_1 до такта τ_2, автомат $\mathcal{A}_2$, перемещается над гипотенузой треугольника Δ_k. Перемещаясь между $\mathcal{A}_2$ бортом, автомат $\mathcal{A}_1$ за промежуток времени $[\tau_1, \tau_2]$ обходит весь треугольник Δ_k (и клетки над гипотенузой).

После этого $\mathcal{A}_2$ сдвигается на вектор $(1,1)$, $\mathcal{A}_1$ сдвигаются на вектор $(1,0)$ и переходит в состояние q_1^1.
22) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_2) = 1))$, $\to (q_1^3, (1,1))$.
23) $\mathcal{A}_1$, $(q_3^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_1^1, (1,0))$.

В результате этого коллектив K_1 останавливается в треугольной $(2k+1)$-расстановке с центром $(x_0 - 1, 1)$.

Таким образом, построенный коллектив $K_1 = K_1(2,2) = K_1(V,V)$, стартуя из канонического расположения, переходит в треугольную 1-расстановку. Коллектив K_1, стартуя в такт τ_0 из треугольной $(2k-1)$-расстановки ($k \in \mathbb{N}$) с центром $(x_0, 1)$, которой соответствует треугольник Δ_k, обходит Δ_k, после чего автомат $\mathcal{A}_1$ переходит в состояние q_1^1 и K_1 останавливается в треугольной $(2k+1)$-расстановке с центром $(x_0 - 1, 1)$.

K_1 удовлетворяет требованиям п. 1, 2, следовательно удовлетворяет условию 1) леммы.

Построим теперь коллективы K_2 и K_3, удовлетворяющие условию 2) леммы. Перечень автоматов коллектива K_2 и их алфавитов.

1) $(\mathcal{A}'_1, \{q_0^1, q_1^1, \ldots, q_4^1\}), (\mathcal{A}'_2, \{q_0^2, q_1^2\}), (\mathcal{A}'_3, \{q_0^3, q_1^3\})$.

Из канонического расположения коллектив идет к нижнему борту.

2) $\mathcal{A}'_1$, $(q_0^1, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 0))$, $\to (q_0^1, (0, -1))$.
3) $\mathcal{A}'_2$, $(q_0^2, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_2) = 0))$, $\to (q_0^2, (0, -1))$.
4) $\mathcal{A}'_3$, $(q_0^3, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_3) = 0))$, $\to (q_0^3, (0, -1))$.

Дойдя до нижнего борта, $\mathcal{A}'_3$ делает шаг вправо, и все автоматы меняют свои состояния.

5) $\mathcal{A}'_1$, $(q_0^1, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1))$, $\to (q_1^1, (0, 0))$.
6) $\mathcal{A}'_2$, $(q_0^2, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_2) = 1))$, $\to (q_1^2, (0, 0))$.
7) $\mathcal{A}'_3$, $(q_0^3, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_3) = 1))$, $\to (q_1^3, (1, 0))$.

Автомат $\mathcal{A}'_1$ обходит слева направо участок l-полосы, ограниченный вертикальными прямыми, проходящими через расположения $\mathcal{A}'_2$ и $\mathcal{A}'_3$.

8) $\mathcal{A}'_1$, $(q_1^1, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 0))$, $\to (q_1^1, (0, 1))$.
9) $\mathcal{A}'_1$, $(q_1^1, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 0))$, $\to (q_2^1, (0, -1))$.
10) $\mathcal{A}'_1$, $(q_2^1, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 0))$, $\to (q_2^1, (0, -1))$.
11) $\mathcal{A}'_1$, $(q_1^1, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_3) = 0))$, $\to (q_1^1, (1, 0))$.
12) $\mathcal{A}'_1$, $(q_2^1, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_3) = 0))$, $\to (q_1^1, (1, 0))$.

Когда $\mathcal{A}'_1$ оказывается в одной клетке с $\mathcal{A}'_3$, они вместе делают шаг вправо.

13) $\mathcal{A}'_1$, $(q_1^1, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_3) = 1))$, $\to (q_3^1, (1, 0))$.
14) $\mathcal{A}'_1$, $(q_2^1, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_3) = 1))$, $\to (q_3^1, (1, 0))$.
15) $\mathcal{A}'_3$, $(q_1^3, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_3) = 1) \wedge (P'_0(\mathcal{A}'_3, \mathcal{A}'_1, q_1^1) = 1))$, $\to (q_1^3, (1, 0))$.
16) $\mathcal{A}'_3$, $(q_1^3, (P'_0(\mathcal{A}'_3, \mathcal{A}'_1, q_2^1) = 1))$, $\to (q_1^3, (1, 0))$.

После этого $\mathcal{A}'_1$ снова обходит (в этот раз справа налево) участок l-полосы, ограниченный вертикальными прямыми, проходящими через расположения $\mathcal{A}'_2$ и $\mathcal{A}'_3$.

17) $\mathcal{A}'_1$, $(q_3^1, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 0))$, $\to (q_3^1, (0, 1))$.
18) $\mathcal{A}'_1$, $(q_3^1, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 0))$, $\to (q_4^1, (0, -1))$.

19) $\mathcal{A}'_1$, $(q^1_4, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 0)), \to (q^1_4, (0, -1))$.
20) $\mathcal{A}'_1$, $(q^1_3, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2) = 0)), \to (q^1_3, (-1, 0))$.
21) $\mathcal{A}'_1$, $(q^1_4, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2) = 0)), \to (q^1_3, (-1, 0))$.

Когда $\mathcal{A}'_1$ оказывается в одной клетке с $\mathcal{A}'_2$, они вместе делают шаг влево.
22) $\mathcal{A}'_1$, $(q^1_3, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2) = 1)), \to (q^1_1, (-1, 0))$.
23) $\mathcal{A}'_1$, $(q^1_4, (P^1_{bort}(\mathcal{A}'_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2) = 1)), \to (q^1_1, (-1, 0))$.
24) $\mathcal{A}'_2$, $(q^2_1, (P^2_{bort}(\mathcal{A}'_2) = 1) \wedge (P'_0(\mathcal{A}'_2, \mathcal{A}'_1, q^1_3) = 1)), \to (q^2_1, (-1, 0))$.
25) $\mathcal{A}'_2$, $(q^2_1, (P'_0(\mathcal{A}'_2, \mathcal{A}'_1, q^1_4) = 1)), \to (q^2_1, (-1, 0))$.

Далее коллектив K_2 повторяет действия 8)–25), каждый раз обходя расширяющийся участок l-полосы, ограниченный вертикальными прямыми, проходящими через $\mathcal{A}'_2$ и $\mathcal{A}'_3$. Таким образом, K_2 обходит l-полосу, причем $\mathcal{A}'_1$ проходит через каждую клетку счетное число раз. Следовательно K_2 удовлетворяет условию 2) леммы.

Рассмотрим коллектив $(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_3)$. Изменим функции переходов и выходов $\mathcal{A}'_1$, так, чтобы в состоянии q^1_4, а также в состоянии q^1_3, видя верхний борт на расстоянии 1 от себя, $\mathcal{A}'_1$, увидев нижний угол в своей 2-окрестности, стоял на месте и менял свое состояние так же, как ранее он менял, находясь (в тех же условиях) в одной клетке с $\mathcal{A}'_2$, а не видя нижний угол в своей 2-окрестности, $\mathcal{A}'_1$ делал то же, что ранее он делал, находясь в разных клетках с $\mathcal{A}'_2$. Полученный коллектив обозначим $K_3 = (\mathcal{A}''_1, \mathcal{A}''_2)$. Легко видеть, что $\mathcal{A}'_1$ многократно обходит (слева-направо и справа-налево) участок l-полуполосы, ограниченный левым бортом и вертикальной прямой, проходящей через расположение $\mathcal{A}'_3$. Таким образом, K_3 обходит l-полуполосу, причем $\mathcal{A}''_1$ проходит через каждую клетку счетное число раз. Следовательно K_3 удовлетворяет условию 3) леммы. Лемма доказана.

Лемма 11. *Существуют коллективы хищников* $K_1 = (W^1_1, \ldots, W^1_{13})(R, V)$, $K_2 = (W^2_1, \ldots, W^2_{13})(R, V)$ *и* $K_3 = (W^3_1, \ldots, W^3_{12})(R, V)$, *такие что:*

1) K_1, *стартуя из любого канонического расположения в* L_1, *обнаруживает любую жертву* $U = U(R, V - 1)$, *при любом начальном расположении* U*;*

2) Для каждого $i = 2, 3$, коллектив K_i, для любого l, стартуя из любого канонического расположения в $L_i(l)$, обнаруживает любую жертву $U = U(R, V-1)$, при любом начальном расположении U.

Доказательство. Обозначим через $K'_1 = (\mathcal{A}^1_1, \ldots, \mathcal{A}^1_{11})(R, V)$, $K'_2 = (\mathcal{A}^2_1, \ldots, \mathcal{A}^2_{11})(R, V)$ и $K'_3 = (\mathcal{A}^3_1, \ldots, \mathcal{A}^3_{11})(R, V)$, соответственно, коллективы из леммы 9, обрабатывающие автоматы с параметрами $(R, V-1)$ на плоскости, в полосе произвольной ширины, и в полуполосе произвольной ширины. При каждом $i = 1, 2, 3$ коллектив K'_i, стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (0,0), (x,y))$-позиции, перебирает $(V-1)$-четверки со всевозможными допустимыми значениями третьей компоненты (при некоторых значениях первой компоненты, второй компоненте, равной d и четвертой компоненте, равной (x,y)), обнаруживает автоматы-жертвы, которые они характеризуют и оказывается в $(\tau'_0, (d+1), (0,0), (x,y))$-позиции ($\tau'_0 \in \mathbb{N}, \tau'_0 \geqslant \tau_0$). Если автомат-жертва U имеет предпериод выходной последовательности, не превосходящий τ_0, период выходной последовательности, не превосходящий d и условную клетку старта $(x_0, y_0) = (x,y) - j \cdot (s_1, s_2)$, где $j \in \mathbb{N}_0$, $i \leqslant \tau_0$, то K'_i, стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (0,0), (x,y))$-позиции, обнаруживает U.

В доказательстве леммы 10 построены коллективы $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$ (V, V), $(\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \mathcal{A}'_3)(V, V)$ и $(\mathcal{A}''_1, \mathcal{A}''_2)(V, V)$, которые, стартуя из произвольного канонического расположения на полуплоскости, в произвольной полосе и произвольной полуполосе, соответственно, функционируют так, что $\mathcal{A}_1$ обходит L_1, побывав в каждой клетке счетное число раз, $\mathcal{A}'_1$ обходит $L_2(l)$, побывав в каждой клетке счетное число раз, $\mathcal{A}''_1$ обходит $L_3(l)$, побывав в каждой клетке счетное число раз.

Модифицируем K'_1, добавив к нему автоматы $\mathcal{A}^1_{12}$ и $\mathcal{A}^1_{13}$, которые, совместно с $\mathcal{A}^1_1$, образуют подколлектив $(\mathcal{A}^1_1, \mathcal{A}^1_{12}, \mathcal{A}^1_{13})$, который, стартуя из произвольной канонической расстановки у нижнего борта, функционирует точно так же, как $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$, но с паузами в работе после каждого хода. Если $\mathcal{A}^1_1$ переместился из клетки (x, y) в клетку (x', y'), то все автоматы из K'_1 перемещаются на тот же вектор $(x'-x, y'-y)$. Для перемещения автоматов коллектива K'_1, которые не находятся в одной клетке с $\mathcal{A}^1_1$ (то есть автоматов $\mathcal{A}^1_2, \mathcal{A}^1_3, \mathcal{A}^1_{10}$ и $\mathcal{A}^1_{11}$) на вектор $(x'-x, y'-y)$ используется механизм, аналогичный тому, который используется при построении коллективов K_4^i в доказательстве леммы 9 ($i = 1, 2, 3$). Затем запускается коллектив K_1' (то есть автоматы ($\mathcal{A}_1^1, \ldots, \mathcal{A}_{11}^1$)) и функционирует вплоть до остановки. После остановки подколлектива K_1' снова делает ход подколлектив ($\mathcal{A}_1^1, \mathcal{A}_{12}^1, \mathcal{A}_{13}^1$), и все автоматы из K_1' перемещаются на соответствующий вектор. Полученный коллектив обозначим как $K_1'' = (\mathcal{C}_1^1, \ldots, \mathcal{C}_{13}^1)$.

Аналогичным образом модифицируем K_2', добавив к нему автоматы $\mathcal{A}_{12}^2$ и $\mathcal{A}_{13}^2$, которые, совместно с $\mathcal{A}_1^2$, образуют подколлектив ($\mathcal{A}_1^2, \mathcal{A}_{12}^2, \mathcal{A}_{13}^2$), который, стартуя из произвольной канонической расстановки у нижнего борта, функционирует точно так же, как ($\mathcal{A}_1', \mathcal{A}_2', \mathcal{A}_3'$), но с паузами в работе после каждого хода, во время которых производится запуск K_2'. Во время хода подколлектива ($\mathcal{A}_1^2, \mathcal{A}_{12}^2, \mathcal{A}_{13}^2$) все автоматы из K_2' перемещаются на тот же вектор, что и $\mathcal{A}_1^2$. Полученный коллектив обозначим как $K_2'' = (\mathcal{C}_1^2, \ldots, \mathcal{C}_{13}^2)$.

Подобным же образом модифицируем и K_3', добавив к нему автомат $\mathcal{A}_{12}^3$, который, совместно с $\mathcal{A}_1^3$, образуют подколлектив ($\mathcal{A}_1^3, \mathcal{A}_{12}^3$), который, стартуя из произвольной канонической расстановки у нижнего борта, функционирует точно так же, как ($\mathcal{A}_1'', \mathcal{A}_2''$), но с паузами в работе после каждого хода, во время которых производится запуск K_3'. Во время хода подколлектива ($\mathcal{A}_1^3, \mathcal{A}_{12}^3$) все автоматы из K_3' перемещаются на тот же вектор, что и $\mathcal{A}_1^3$. Полученный коллектив обозначим как $K_3'' = (\mathcal{C}_1^3, \ldots, \mathcal{C}_{12}^3)$.

Во время работы K_i'' ($i = 1, 2, 3$) при каждом следующем запуске подколлектива K_i' производится перебор ($V - 1$)-параметризующих четверок вида $(\tau_0, d, (s_x, s_y), (x, y))$ со всеми допустимыми значениями (s_x, s_y) при некоторых значениях τ_0 и фиксированных значениях d и (x, y). При каждом новом запуске K_i' значение d увеличивается. (x, y) счетное число раз пробегает все клетки лабиринта L при всех запусках K_i'.

Рассмотрим коллектив $K' = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{13})(R, V)$, где $\mathcal{B}_1$ — неподвижный автомат с внутренним алфавитом $\{q_0\} \cup \{-1, 1\}^2$, который в первый такт функционирования переходит из состояния q_0 в состояние $(1, 1)$, автомат $\mathcal{B}_{10}$ в первый такт смещается на $(1, 0)$ и останавливается, $\mathcal{B}_{11} = \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{B}_i = \mathcal{H}_0$ при всех $i \neq 1, 10, 11$. Коллектив $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{11})$ из канонического расположения в клетке (x_0, y_0) за 1 такт переходит в сильную $(1, 1, (0, 0), (x_0, y_0))$-позицию.

$(K' \circ K_1'')(1, \dots, 10) \xrightarrow{1} K_1 = (W_1^1, \dots, W_{13}^1)$.
$(K' \circ K_2'')(1, \dots, 10) \xrightarrow{1} K_2 = (W_1^2, \dots, W_{13}^2)$.
$((\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{12}) \circ K_3'')(1, \dots, 10) \xrightarrow{1} K_3 = (W_1^3, \dots, W_{12}^3)$.

Покажем, что коллективы K_1, K_2 и K_3 удовлетворяют условиям леммы. Для любого автомата-жертвы $U = U(R, V-1)$ существует $(V-1)$-четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$, которая характеризует U. При функционировании K_i $(i = 1, 2, 3)$, подколлектив K_i' счетное число раз запускается из расположений, являющихся сильными $(\tau_0', d', (0, 0), (x, y))$-позициями, при некоторых значениях τ_0', d'. Среди $(V-1)$-четверок $(\tau_0', d', (s_1', s_2'), (x, y))$, которые перебирает K_i' при таких запусках, найдется такая, что $\tau_0' \geqslant \tau_0$, $d' \geqslant d$, $(s_1', s_2') = (s_1, s_2)$. Такая $(V-1)$-четверка характеризует U, следовательно, по лемме 9 автомат U будет обнаружен. Лемма доказана.

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы. Пусть по плоскости перемещается произвольная независимая система жертв $S = (U_1, \dots, U_n)(R, V-1)$. При $R = V$ обнаружение жертвы означает ее поимку и теорема 1 прямо следует из леммы 11.

Предположим, $R > V$. Построим автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$, который, не видя жертв, стоит на месте, а увидев какую-либо из жертв, $\mathcal{A}$ не позднее, чем через $(R-V)$ тактов ловит некоторую жертву и возвращается в исходное расположение. Начальным состоянием $\mathcal{A}$ является $(q_0, \dots, q_0)$.

1) $(\mathcal{A}$, $Q_{\mathcal{A}} = (\{q_0, q_1\} \cup \{-V, \dots, -1, 0, 1, \dots, V\}^2)^{R-V} \cup \{q_2\})$.

Увидев в такт τ_0 какую-либо жертву, автомат $\mathcal{A}$ преследует ближайшую к нему жертву (то есть находящуюся от него на минимальном расстоянии, если таких жертв несколько, выбирается самая нижняя среди самых правых), запоминая в s-той компоненте своего состояния свой ход в такт $(\tau_0 + s - 1)$ (где $1 \leqslant s \leqslant (R-V)$).

2) $\mathcal{A}$, $((q_0, \dots, q_0), (P_R''(\mathcal{A}) = 1))$, $\to$ $(((v_1, v_2), q_0, \dots, q_0), (v_1, v_2))$, где (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

3) $\mathcal{A}$, $(((v_1^1, v_2^1), \dots, (v_1^s, v_2^s), q_0, \dots, q_0), (P_R''(\mathcal{A}) = 1))$, $\to$ $(((v_1^1, v_2^1), \dots,$ (v_1^s, v_2^s), $(v_1, v_2), q_0, \dots, q_0)$, $(v_1, v_2))$, где $1 \leqslant s \leqslant (R-V-2)$, (v_1, v_2) —

ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.
4) $\mathcal{A}$, $(((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), q_0), (P''_R(\mathcal{A})=1)), \to (((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), (v_1, v_2)), (v_1, v_2))$, где (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

Если в какой-то момент преследования хищник не видит ни одной жертвы, значит, как минимум одна жертва (та, которую преследовал хищник) поймана. После этого $\mathcal{A}$ возвращается в исходное расположение (не реагируя на другие жертвы), используя ранее сохраненные координаты своих перемещений. Это возвращение также происходит не более чем за $R - V$ тактов.
5) $\mathcal{A}$, $(((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{s-1}, v_2^{s-1}), (v_1^s, v_2^s), q_0, \ldots, q_0), (P''_R(\mathcal{A}) = 0)), \to (((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{s-1}, v_2^{s-1}), q_1, \ldots, q_1), (v_1^s, v_2^s))$, где $1 \leqslant s \leqslant (R - V - 1)$.

Не позднее, чем через $R - V$ тактов преследования некоторая жертва будет поймана. После этого $\mathcal{A}$ возвращается в исходное расположение не более чем за $R - V$ тактов.
6) $\mathcal{A}$, $(((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{(R-V)}, v_2^{(R-V)}))), \to (((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), q_1), (-v_1^{R-V}, -v_2^{R-V}))$.
7) $\mathcal{A}$, $(((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^s, v_2^s), q_1, \ldots, q_1)), \to (((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{s-1}, v_2^{s-1}), q_1, \ldots, q_1), (-v_1^s, -v_2^s))$, где $2 \leqslant s \leqslant (R - V)$.
8) $\mathcal{A}$, $(((v_1^1, v_2^1), q_1, \ldots, q_1)), \to (q_2, (-v_1^1, -v_2^1))$.

В лемме 11 построены коллективы хищников, обнаруживающие любой автомат-жертву $U = U(R, V - 1)$ на полуплоскости, в полосе произвольной ширины и в полуполосе произвольной ширины, соответственно. Переобозначим эти коллективы, соответственно, как $K'_1 = (\mathcal{A}_1^1, \ldots, \mathcal{A}_{13}^1)(R, V)$, $K'_2 = (\mathcal{A}_1^2, \ldots, \mathcal{A}_{13}^2)(R, V)$ и $K'_3 = (\mathcal{A}_1^3, \ldots, \mathcal{A}_{13}^3)(R, V)$. Внутренний алфавит автомата $\mathcal{A}_j^i$ ($i = 1, 2, 3$, $1 \leqslant j \leqslant 13$) обозначим как Q_j^i, а его начальное состояние как $q_j^i(0)$.

При функционировании коллектива K'_i ($i = 1, 2, 3$) его подколлектив $(\mathcal{A}_1^i, \ldots, \mathcal{A}_{11}^i)$ при каждом своем запуске фунционирует не менее 7 тактов ($\mathcal{A}_5^i$ идет к $\mathcal{A}_{11}^i$ и обратно (не менее 2 тактов), $\mathcal{A}_9^i$ не менее одного раза идет к $\mathcal{A}_4^i$ и обратно (см. доказательство леммы 7), после остановки коллектива K_3 (см. доказательство леммы 9) $\mathcal{A}_5^i$ идет к $\mathcal{A}_4^i$ и обратно, а затем еще хотя бы один такт тратится на перемещение автоматов $\mathcal{A}_2^i$ и $\mathcal{A}_3^i$, либо смену состояния $\mathcal{A}_1^i$). Автоматы $\mathcal{A}_1^1$, $\mathcal{A}_{12}^1$ и

$\mathcal{A}_{13}^1$ перемещаются только в паузах между запусками подколлектива $(\mathcal{A}_1^1, \ldots, \mathcal{A}_{11}^1)$, автоматы $\mathcal{A}_1^2$, $\mathcal{A}_{12}^2$ и $\mathcal{A}_{13}^2$ перемещаются только в паузах между запусками подколлектива $(\mathcal{A}_1^2, \ldots, \mathcal{A}_{11}^2)$, а автоматы $\mathcal{A}_1^3$ и $\mathcal{A}_{12}^3$ перемещаются только в паузах между запусками подколлектива $(\mathcal{A}_1^3, \ldots, \mathcal{A}_{11}^3)$. Таким образом, все эти автоматы перемещаются не чаще, чем 1 раз в 8 тактов. За одну такую паузу каждый этих автоматов делает 1 ход, перемещаясь на некоторый вектор (s_1, s_2), такой что $|s_1| + |s_2| \leqslant 2$. Автомат $\mathcal{A}_{10}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ за время работы коллектива $(\mathcal{A}_1^i, \ldots, \mathcal{A}_{11}^i)$ перемещается на вектор $((V-1), 0)$, а автомат $\mathcal{A}_{11}^i$ за каждый такт работы коллектива $(\mathcal{A}_1^i, \ldots, \mathcal{A}_{11}^i)$ перемещается на вектор $(1, 0)$.

К коллективу K_1' добавим автоматы $\mathcal{B}_1^1, \ldots, \mathcal{B}_{13}^1$, к коллективу K_2' добавим автоматы $\mathcal{B}_1^2, \ldots, \mathcal{B}_{13}^2$, к коллективу K_3' добавим автоматы $\mathcal{B}_1^3, \ldots, \mathcal{B}_{12}^3$. Автоматы $\mathcal{B}_1^1, \ldots, \mathcal{B}_{13}^1$, $\mathcal{B}_1^2, \ldots, \mathcal{B}_{13}^2$, $\mathcal{B}_1^3, \ldots, \mathcal{B}_{12}^3$ устроены следующим образом.

Каждый хищник $\mathcal{B}_j^i$ при $i = 1, 2$, $j = 1, 10, 11, 12, 13$, а также при $i = 3$, $j = 1, 10, 11, 12$, имеет две группы состояний: Q_j^i и $Q_{\mathcal{A}}$. Начальным состоянием $\mathcal{B}_j^i$ является $q_j^i(0)$. Автомат $\mathcal{B}_j^i$, находясь в состоянии $q \in Q_j^i$, перемещается и меняет свое состояние так же, как автомат $\mathcal{A}_j^i$ в состоянии q при том же входном символе, если $P_R''(\mathcal{B}_j^i) = 0$, и перемещается и меняет свое состояние так же, как автомат $\mathcal{A}$ в состоянии $(q_0, \ldots, q_0)$ при том же входном символе, если $P_R''(\mathcal{B}_j^i) = 1$. Находясь в состоянии $q \in Q_{\mathcal{A}}$, $q \neq q_2$, хищник $\mathcal{B}_j^i$ перемещается и меняет свое состояние, так же, как и $\mathcal{A}$ в состоянии q при том же входном символе.

Каждый хищник $\mathcal{B}_j^i$ при $i = 1, 2, 3$, $j = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ имеет внутренний алфавит $(Q'')_j^i = \{-1, 1\}^2 \times ((Q')_j^i \cup \{q_3, q_4\})$, где $(Q')_j^i = Q_j^i \cup Q_{\mathcal{A}}$. Начальным состоянием $\mathcal{B}_j^i$ является $(1, 1, q_j^i(0))$.

Рассмотрим черыре квадранта, на которые целочисленная плоскость разбивается горизонтальной и вертикальной целочисленными прямыми, проходящими через расположение $\mathcal{A}_1^i$. Из построений лемм 7, 9, 11 нетрудно видеть, что каждый хищник $\mathcal{A}_j^i$ может перейти из одного рассматриваемого квадранта в другой только оказавшись в одной клетке с $\mathcal{A}_1^i$. Хищник $\mathcal{B}_j^i$ также переходит из одного квадранта в другой (не считая времени преследования увиденной жертвы и возвращения на траекторию $\mathcal{A}_j^i$), только оказавшись в одной клетке с $\mathcal{A}_1^i$. Поэтому $\mathcal{B}_j^i$ в каждый момент времени (кроме, может быть, времени преследования увиденной жертвы и возвращения на траекторию $\mathcal{A}_j^i$) «знает» величины $\mathrm{sgn}_0(a_1)$ и $\mathrm{sgn}_0(a_2)$, где (a_1, a_2) — вектор разности расположений $\mathcal{A}_j^i$ и $\mathcal{A}_1^i$.

Определим функцию переходов $\mathcal{B}_j^i$ так, что первая и вторая компоненты состояния $\mathcal{B}_j^i$ в каждый момент времени (кроме, может быть, времени преследования увиденной жертвы и возвращения на траекторию $\mathcal{A}_j^i$) будут равны $\mathrm{sgn}_0(a_1)$ и $\mathrm{sgn}_0(a_2)$ соответственно. Если $P_R''(\mathcal{B}_j^i) = 0$, то $\mathcal{B}_j^i$, находясь в состоянии (q', q'', q), где $q', q'' \in \{-1, 1\}$, $q \in Q_j^i$, перемещается так же, как $\mathcal{A}_j^i$, находящийся в состоянии q, при том же входном символе и переходит в состояние с третьей комнонентой, равной состоянию, в которое переходит $\mathcal{A}_j^i$ из состояния q при том же входном символе. Если $P_R''(\mathcal{B}_j^i) = 1$, то $\mathcal{B}_j^i$, находясь в состоянии (q', q'', q), где $q \in Q_j^i$, перемещается так же, как $\mathcal{A}$, находящийся в состоянии $(q_0, \dots, q_0)$, при том же входном символе и переходит в состояние с третьей комнонентой, равной состоянию, в которое переходит $\mathcal{A}$ из состояния $(q_0, \dots, q_0)$ при том же входном символе. $\mathcal{B}_j^i$, находясь в состоянии (q', q'', q), где $q \in Q_{\mathcal{A}}$, перемещается так же, как $\mathcal{A}$, находящийся в состоянии q, при том же входном символе и переходит в состояние с третьей комнонентой, равной состоянию, в которое переходит $\mathcal{A}$ из состояния q при том же входном символе.

Каждый хищник $\mathcal{B}_j^i$ при $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 13$, а также при $i = 3$, $j = 1, \dots, 12$, до того, как увидит какую-либо жертву, перемещается совместно с $\mathcal{A}_j^i$. Увидев какую-либо жертву, $\mathcal{B}_j^i$ функционирует как автомат $\mathcal{A}$, то есть за время, не большее $2(R - V)$ ловит некоторую жертву и возвращается в клетку, из которой он начинал преследование жертвы.

Пусть $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 12, 13\}$, либо $i = 3$, $j \in \{1, 12\}$. Перемещение $\vec{s}_{i,j}$ автомата $\mathcal{A}_j^i$ за время преследования автоматом $\mathcal{B}_j^i$ жертвы таково, что $|\vec{s}_{i,j}| \leqslant 2 \cdot]2(R - V)/8[\leqslant (R - V)/2 + 2 \leqslant R/2 + 1 \leqslant R$. То есть автомат $\mathcal{B}_j^i$, оказавшись в состоянии q_2 (финальном состоянии автомата $\mathcal{A}$), увидит $\mathcal{A}_j^i$. Доопределим $\mathcal{B}_j^i$, так что $\mathcal{B}_j^i$ в состоянии q_2, видя $\mathcal{A}_j^i$, идет к нему со скоростью V, а, оказавшись в одной клетке с $\mathcal{A}_j^i$, — переходит в то же состояние, в которое переходит $\mathcal{A}_j^i$. Таким образом, не позднее, чем через $\tau = 2(R - V) + 8]R/6[$ тактов после обнаружения жертвы, $\mathcal{B}_j^i$ вернется к $\mathcal{A}_j^i$.

Пусть $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{10, 11\}$. Доопределим $\mathcal{B}_j^i$ так, что он, находясь в состоянии q_2, не видя $\mathcal{A}_j^i$, идет со скоростью V в направлении $(1, 0)$, пока не увидит $\mathcal{A}_j^i$, а видя $\mathcal{A}_j^i$ — идет к нему со скоростью V, становясь в одну клетку с $\mathcal{A}_j^i$ в том же состоянии, в котором оказывается $\mathcal{A}_j^i$. Перемещение $\vec{s}_{i,j}(\tau)$ автомата $\mathcal{A}_j^i$ за некоторый промежуток времени длиной τ тактов есть сумма $\vec{s}_{i,j}(\tau) = \vec{s'}_{i,j}(\tau) + \vec{s}_{i,1}(\tau)$, где $\vec{s'}_{i,j}(\tau)$ — перемещение $\mathcal{A}_j^i$ как элемента подколлектива $(\mathcal{A}_1^i, \ldots, \mathcal{A}_{11}^i)$, а $\vec{s}_{i,1}(\tau)$ — перемещение автомата $\mathcal{A}_1^i$ за рассматриваемый промежуток времени. $\vec{s'}_{i,j}(\tau) = (x_j^i(\tau), 0)$. При любом $i = 1, 2, 3$, имеют место неравенства: $0 \leqslant x_{10}^i(\tau) \leqslant (V-1) \cdot]\tau/8[$, $0 \leqslant x_{11}^i(\tau) \leqslant \tau$, $|\vec{s}_{i,1}(\tau)| \leqslant 2 \cdot]\tau/8[$. Нетрудно видеть, что автомат $\mathcal{B}_{10}^i$, оказавшись в состоянии q_2, окажется на одной вертикали с $\mathcal{A}_{10}^i$ не позднее, чем через время

$$\tau'_{10} = 8 \cdot \left]\frac{(V-1) \cdot](R-V)/4[}{7V+1}\right[\leqslant \frac{2}{7} \cdot (R-V) + \frac{64}{7}.$$

За это время $\mathcal{A}_{10}^i$ сместится (с момента обнаружения жертвы) по вертикали не более, чем на

$$|\vec{s_1}(2(R-V) + \tau'_{10})| = \frac{4}{7}(R-V) + \frac{16}{7} \leqslant R.$$

Это следует из соотношений $V \geqslant 2$, $R \geqslant 3$. Таким образом, $\mathcal{B}_{10}^i$ увидит $\mathcal{A}_{10}^i$, и не позднее, чем через $\tau_{10} = 2(R-V) + \tau'_{10} + 8]R/6[$ тактов после обнаружения жертвы окажется с ним в одной клетке. Аналогично,автомат $\mathcal{B}_{11}^i$, оказавшись в состоянии q_2, не позднее, чем через время $2(R-V)$ окажется на одной вертикали с $\mathcal{A}_{11}^i$. За это время $\mathcal{A}_{11}^i$ сместится (с момента обнаружения жертвы) по вертикали не более, чем на $|\vec{s_1}(4(R-V))| = 2 \cdot](R-V)/2[\leqslant R$. Таким образом, $\mathcal{B}_{11}^i$ увидит $\mathcal{A}_{11}^i$, и не позднее, чем через $\tau_{11} = 4(R-V) + 8]R/6[\leqslant 6R$ тактов после обнаружения жертвы окажется с ним в одной клетке.

Пусть $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Как нетрудно видеть из построений лемм 7, 9, 11, автомат $\mathcal{A}_j^i$ при $j \in \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ перемещается так, что в любой такт времени ему, чтобы вернуться к $\mathcal{A}_1^i$, достаточно пройти не более одного горизонтального или вертикального отрезка. Автоматам же $\mathcal{A}_7^i$ и $\mathcal{A}_8^i$ для возвращения к $\mathcal{A}_1^i$, достаточно пройти не более одного горизонтального и одного вертикального отрезка. Автоматы $\mathcal{A}_7^i$ и $\mathcal{A}_8^i$ для возвращения к $\mathcal{A}_1^i$ используют в качестве ориентира автоматы $\mathcal{A}_5^i$ и $\mathcal{A}_6^i$, соответственно.

Изменим функции переходов и выходов автоматов $\mathcal{A}_5^i$ и $\mathcal{A}_6^i$, так, чтобы $\mathcal{A}_5^i$ возвращался к $\mathcal{A}_1^i$ не одновременно с $\mathcal{A}_7^i$, а только после того, как, возвращаясь к $\mathcal{A}_1^i$, мимо $\mathcal{A}_5^i$ пройдут и $\mathcal{A}_7^i$ и $\mathcal{A}_7^i$, а $\mathcal{A}_6^i$ возвращался к $\mathcal{A}_1^i$ не одновременно с $\mathcal{A}_8^i$, а только после того, как, возвращаясь к $\mathcal{A}_1^i$, мимо $\mathcal{A}_6^i$ пройдут и $\mathcal{A}_8^i$ и $\mathcal{A}_8^i$. Также изменим функции переходов и выходов автомата $\mathcal{A}_1^i$, так, чтобы $\mathcal{A}_1^i$, совершал свои перемещения только совместно с автоматами $\mathcal{A}_j^i$, $\mathcal{B}_j^i$, $j \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. То есть, если в момент, когда автомату $\mathcal{A}_1^i$ надо переместиться, в одной клетке с ним не находятся все вышеобозначенные автоматы, он ждет, пока все они не окажутся с ним в одной клетке, и затем передвигается вместе с ними. Легко видеть, что такие изменения коллектива $(\mathcal{A}_1^i, \ldots, \mathcal{A}_{11}^i)$, не влияют на факт обнаружения им любой жертвы.

Попав в состояние вида (q', q'', q_2) $(q', q'' \in \{-1, 1\})$, автомат $\mathcal{B}_j^i$, находится в клетке, где он ранее находился вместе с $\mathcal{A}_j^i$. Добавим автоматам $\mathcal{B}_7^i$ и $\mathcal{B}_8^i$ еще несколько состояний, которые позволят им во время преследования жертвы (то есть когда этот автомат действует отдельно от $\mathcal{A}_7^i$ или $\mathcal{A}_8^i$, соответственно) «помнить» свое состояние в момент, когда преследование началось. Это нужно, чтобы возвращаясь к $\mathcal{A}_1^i$, каждый из этих автоматов «знал», один или два прямых отрезка пути ему предстоит пройти. Доопределим $\mathcal{B}_j^i$ так, чтобы после попадания в состояние вида (q', q'', q_2), он перемещался в клетку, в которой находится $\mathcal{A}_1^i$, и останавливался в состоянии $(1, 1, q_4)$ (как видно из построений лемм 7, 9, 11, это можно сделать, используя для такого перемещения состояния вида (q', q'', q_2) и (q', q'', q_3)). Когда все $\mathcal{A}_j^i$ и все $\mathcal{B}_j^i$ $(i = 2,3,4,5,6,7,8,9)$ оказываются в той же клетке, что и $\mathcal{A}_j^i$, причем каждый $\mathcal{B}_j^i$ находится в состоянии $(1, 1, q_4)$, тогда каждый $\mathcal{B}_j^i$ переходит в то же состояние, в которое переходит $\mathcal{A}_j^i$ и делает тот же ход, что и $\mathcal{A}_j^i$.

Обозначим полученные коллективы как $K_1(R, V) = (W_1^1, \ldots, W_{26}^1) = (\mathcal{A}_1^1, \ldots, \mathcal{A}_{13}^1, \mathcal{B}_1^1, \ldots, \mathcal{B}_{13}^1)$, $K_2(R, V) = (W_1^2, \ldots, W_{26}^2) = (\mathcal{A}_1^2, \ldots, \mathcal{A}_{13}^2, \mathcal{B}_1^2, \ldots, \mathcal{B}_{13}^2)$ и $K_3(R, V) = (W_1^3, \ldots, W_{24}^3) = (\mathcal{A}_1^3, \ldots, \mathcal{A}_{12}^3, \mathcal{B}_1^3, \ldots, \mathcal{B}_{12}^3)$, соответственно. Покажем, что K_i удовлетворяют условию теоремы.

При $i = 1, 2$ подколлектив $(\mathcal{A}_1^i, \ldots, \mathcal{A}_{13}^i)$ функционирует так же, как коллектив K_i', только, возможно, с большим числом пауз в работе всех автоматов, кроме $\mathcal{A}_{11}^i$, а подколлектив $(\mathcal{A}_1^3, \ldots, \mathcal{A}_{12}^3)$ функционирует так же, как коллектив K_3', только, возможно, с большим числом пауз в работе всех автоматов, кроме $\mathcal{A}_{11}^3$. Однако, как следует из доказательств лемм 7, 9, 11, и приведенных выше построений, эти паузы не влияют на факт обнаружения коллективом K_i' $(i = 1, 2, 3)$ любой жертвы. Пусть в некоторый такт τ_0 уже поймано h жертв $(0 \leqslant h \leqslant n-1)$. Проведем доказательство от противного, то есть, предположим, что после этого ни одна жертва не будет поймана. Обозначим следующий после τ_0 момент, когда автомат $\mathcal{A}_1^i$ перемещается в следующую клетку, как τ_1. Тогда не позднее, чем в такт $\max\{\tau_1, \tau_0 + \tau_2\}$, каждый хищник $\mathcal{B}_j^i$ $(i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, 14$, либо $i = 3,\ j = 1, \ldots, 13)$ окажется в той же клетке и в том же состоянии, что и $\mathcal{A}_j^i$. Здесь под τ_2 понимается максимальное время, которое требуется $\mathcal{B}_j^i$ для возвращения к $\mathcal{A}_j^i$ после обнаружения жертвы, при всех $i = 1, 2$, $j \in \{1, 10, 11, 12, 13, 14\}$, а также при $i = 3$, $j \in \{1, 10, 11, 12, 13, 13\}$ (все эти величины подсчитаны выше). После этого, хищники $\mathcal{A}_j^i$ и $\mathcal{B}_j^i$ передвигаются совместно, пока не обнаружат (согласно лемме 11) некоторую жертву. Как указано выше, в такой ситуации W_i'' начнет преследовать обнаруженную жертву, и поймает некоторую жертву. Это противоречит предположению о том, что никакая новая жертва не будет поймана. Это противоречие доказывает теорему. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва, Ижевск, 2004.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. Наука, 1985.

[3] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. Т. 15. Вып. 2. 2003.

[4] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. Т. 15. Вып. 3. 2003.

[5] Грунская В. И. О динамическом взаимодействии автоматов // Математическая кибернетика и ее приложения к биологии. М.: МГУ, 1987. С. 8–18.

[6] Волков Н. Ю. Об автоматной модели преследования // Дискретная математика. Т. 19. Вып. 2. С. 131–160. 2007.