

Об асимптотическом поведении хроматического индекса случайных гиперграфов

Ю. А. Будников

В работе показано, что известная теорема Pippenger-Spencer (см. [1]) в теории гиперграфов неприменима для случая, когда длина гиперребра не является постоянной, и рассмотрена возможность выделения в случайном гиперграфе почти совершенной упаковки, а также показано, что при некоторых ограничениях хроматический индекс случайного гиперграфа G асимптотически больше cD для некоторой константы $c > 1$, где D — математическое ожидание степени вершины G .

Определение конечной проективной плоскости. Рассмотрим конечную проективную плоскость порядка q , где q — простое число. Она определяется так (см. [10]):

- 1) для любых 2-х точек существует в точности одна прямая, проходящая через них;
- 2) любая прямая содержит ровно $q + 1$ точку;
- 3) любая точка инцидентна ровно $q + 1$ прямой;
- 4) любые 2 прямые пересекаются ровно в одной точке.

Замечание 1. Эта же самая конструкция может быть построена в случае $q = p^k$, где p — простое число, k — некоторое натуральное число.

1. Теорема (N. Pippenger and J. Spencer)

Определение 1. Гиперграф $G = (V, E)$ — это пара двух множеств: V — множество вершин гиперграфа (вершина — некоторый объект,

но поскольку рассматриваем только конечные множества V , то все вершины можно занумеровать натуральными числами от 1 до $n = |V|$ и считать, что V из этих чисел и состоит) и $E \subseteq V^k$ — множество гиперребер — это подмножество множества всех k -элементных множеств, содержащих элементы из V , то есть k — длина гиперребра (число вершин в нем).

Пусть $k \geq 2$ — фиксированное натуральное число. Будем рассматривать гиперграфы $G = (V, E)$ — k -однородные, то есть каждое гиперребро которых содержит в точности k вершин, и нетривиальные, то есть содержащие хотя бы одно гиперребро. Будем для краткости называть их просто графами. Если $G = (V, E)$, то V — множество вершин графа, E — множество его ребер. $n(G) = |V(G)|$ — число его вершин, $m(G) = |E(G)|$ — число ребер G .

Определим для любой вершины v $\deg_G(v)$ — степень вершины v . $\text{codeg}_G(v, w)$ — костепень, то есть число ребер, проходящее одновременно через вершины v, w .

Обозначим:

$$D(G) = \max_{v \in V(G)} (\deg_G(v)),$$

$$d(G) = \min_{v \in V(G)} (\deg_G(v)),$$

$$C(G) = \max_{u, v \in V(G), u \neq w} (\text{codeg}_G(v, w)).$$

Упаковка в графе G — набор P непересекающихся ребер G . Покрытие графа G — набор K ребер графа, содержащий все вершины графа.

$\chi(G)$ — «хроматический индекс» графа G — минимальное число упаковок, на которые можно разбить все гиперребра G .

Существует ряд простых утверждений, касающихся введенных понятий:

Утверждение 1 ([1]). *Для любого гиперграфа G , характеризующегося введенными ранее величинами, справедливо соотношение:*

$$\chi(G) \geq D(G).$$

Доказательство. Рассмотрим вершину G , имеющую степень D . В ней по определению пересекается D ребер. Поэтому для правильной

их раскраски потребуется как минимум D цветов, а следовательно $\chi(G) \geq D(G)$.

Утверждение 2 ([1]). Для любого гиперграфа G , характеризующегося введенными ранее величинами, справедливо соотношение:

$$\chi(G) \leq k(D(G) - 1) + 1.$$

Утверждение 3 ([1]). Для любого гиперграфа G , характеризующегося введенными ранее величинами, справедливо соотношение:

$$nD(G) = m(G)k.$$

Доказательство этих фактов изложено в статье Pippenger-Spencer [1].

Сформулируем основную теорему статьи [1]:

Теорема 1. Для любых $\delta > 0$, $k \geq 2$ — фиксированное число вершин на гиперребре, существуют $\delta' > 0$, $N > 0$ такие, что из условий

$$d(G) \geq (1 - \delta')D(G), \quad (1)$$

$$C(G) \leq \delta' D(G), \quad (2)$$

для $n > N$ следует

$$\chi(G) \leq (1 + \delta)D(G). \quad (*)$$

Данную теорему можно переформулировать в терминах пределов, введя обозначения:

$f(G) \sim g(G)$ для $\lim_G f(G)/g(G) = 1$, имеется в виду, что $n(G) \rightarrow \infty$,

$f(G) < g(G)$ для $\lim_G f(G)/g(G) = 0$,

$f(G) \lesssim g(G)$ для $\lim_G f(G)/g(G) \leq 1$.

Поэтому ввиду неравенств

$$d(G) \leq D(G) \leq \chi(G)$$

можно переписать теорему так:

$$d(G) \sim D(G), \quad (1')$$

$$C(G) < D(G), \quad (2')$$

\Rightarrow

$$\chi(G) \sim D(G). \quad (*')$$

Замечание 2. В доказательстве данной теоремы использован полиномиальный вероятностный (рандомизированный) алгоритм построения $D(G)(1 - o(1))$ упаковок размера $\frac{n}{k}(1 - o(1))$: этими упаковками покрывается $n(1 - o(1))$ вершин гиперграфа G и $\chi(G) = D(1 + o(1))$. Однако задача вычисления точного значения $\chi(G)$ является NP -трудной (см. [8]).

2. Один пример

Определение 2. Пусть некоторая функция $k(n)$ возрастает по n в смысле (!), если

- 1) $N_1 < N_2$, где $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow k(N_1) \leq k(N_2)$;
- 2) $\forall N > 0: N \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \tilde{N} > N: k(\tilde{N}) > k(N)$.

Покажем, что в предыдущей теореме нельзя запустить рост числа вершин на гиперребре, то есть докажем следующее.

В тех же обозначениях теперь будем рассматривать число вершин на гиперребре k как возрастающую (в смысле (!)) функцию от n — числа вершин гиперграфа: $k(n) \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$.

Везде далее рассматриваем возрастающие функции в смысле (!). Будем далее полагать, что $k(n) = o(n)$, $n \rightarrow \infty$. Это условие существенно, так как иначе можно взять $k(n) \equiv n$. Условие (2) в определении существенно, так как для остальных функций подходит теорема (Nicholas Pippenger and Joel Spencer из [1]).

Утверждение 4. Для любых $\delta > 0$, $\delta' > 0$, для любой возрастающей в смысле (!) функции $g(n)$ можно построить возрастающую $k(n)$ — число вершин на гиперребре — так, что $k(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и класс гиперграфов $G(n)$, где n — число вершин гиперграфа с ростом максимальной степени $D(n)$: при $n = n_k$, $k = 1, 2, \dots$ — возрастающая подпоследовательность натуральных чисел — будет выполнено:

$$d(G) \geq (1 - \delta')D(G) \quad (1'')$$

$$C(G) \leq \delta' D(G) \quad (2'')$$

но

$$\chi(G(n)) = k(n)(D(G(n)) - 1) + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**)$$

Построим пример класса, подтверждающий это:

Пусть $P(q)$ — проективная плоскость порядка q . Естественно, что $k = q + 1$, всего точек в этой проективной плоскости $q^2 + q + 1 =: n_0$. Запускаем рост числа точек на гиперребре $k = k(n_0)$, $n_0 \rightarrow \infty$. Это некая возрастающая функция от n_0 порядка $O(\sqrt{n_0})$.

Наберем таких плоскостей при каждом фиксированном n_0 достаточное число $n = l(n_0) * n_0$: плоскости не пересекаются друг с другом и получается нужный фиксированный рост $k(n)$, $n \rightarrow \infty$. Поскольку $l(n_0) \in \mathbb{N}$ выбирается произвольно, то, очевидно, получим нужный рост $k(n)$, $n \rightarrow \infty$, выбрав соответствующие $l(n_0)$ при $n_0 = q^2 + q + 1$, где q — некоторое простое число (достаточно большое, выбирающееся на каждом шаге для увеличения n_0). Как раз такую подпоследовательность n и берем в качестве n_k из утверждения 4.

Поскольку при таком добавлении проективных плоскостей не изменяется длина гиперребра, степени вершин, костепени, а меняется только общее число вершин n , то утверждение 4 доказано, поскольку:

- 1) таким способом можно построить $k(n)$ любого порядка малости относительно n , определенную на соответствующей подпоследовательности $n = n_k$, $k = 1, 2, \dots$;
- 2) степень любой вершины одна и та же и является возрастающей функцией от n , тождественно равной $k(n)$ при любом n из подпоследовательности $n = n_k$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому выполнено (1^o);
- 3) костепень любой вершины равна 1 при любом n , что непосредственно следует из определения проективной плоскости. Поэтому выполнено (2^o);
- 4) $\chi(G) = k(n) \cdot (D(n) - 1) + 1$ при каждом фиксированном n , то есть максимально возможному числу (как показано в Утверждении (Nicholas Pippenger and Joel Spencer), приведенном в их статье). Поэтому выполнено (*^o);

Замечание 3. При каждом фиксированном n для некоторой подпоследовательности $n = n_k$, $k = 1, 2, \dots$ гиперграф G можно сделать связным. Берем дополнительное гиперребро и связываем им первые два несвязанных графа из $l(n_0)$ штук: $\left[\frac{k(n_0)}{2} \right]$ точек принадлежат пер-

вому графу, а оставшиеся второму. Далее аналогично связываем второй и третий графы и т. д. При этом степень каждого графа на n_0 вершинах в связке увеличивается максимум на 2, костепень — на 2, $\chi(G)$ не уменьшается. Поэтому (1'') и (2''), (*'') будут так же выполнены для такого класса уже связных гиперграфов на n вершинах для некоторой подпоследовательности нашей последовательности $n = n_k$, $k = 1, 2, \dots$, при $n_k > N(\delta, \delta')$.

Утверждение 5. Пусть в $D(G)$ — регулярном гиперграфе G с растущей относительно n функцией числа вершин на гиперребре k

- 1) $D(G) = k$;
- 2) $n = k(D(G) - 1) + 1$;
- 3) $\text{codeg}(v, w) \leq 1$, для любой пары вершин v, w .

Тогда этот G — проективная плоскость.

Замечание 4. Ранее было показано, что проективные плоскости удовлетворяют этим условиям. Покажем, что этим условиям удовлетворяют только они и никакие другие гиперграфы.

Доказательство. По известной формуле число ребер в G $m = \frac{nD(G)}{k} = n = k(D(G) - 1) + 1$. Так как все $\text{codeg}(v) \leq 1$, то любое гиперребро пересекается ровно с $k(D(G) - 1)$ гиперребром (k вершин на этом гиперребре, степень любой вершины $D(G)$, все эти гиперребра — разные, поскольку $\text{codeg}(v) \leq 1$). Это означает, что данный блок из $k(D(G) - 1) + 1$ гиперребра и есть множество всех ребер гиперграфа G , но это означает, что каждое гиперребро гиперграфа G пересекает все другие гиперребра, и доказано, что через любые две точки обязана проходить некоторая прямая. Поэтому это конечная проективная плоскость и ее хроматический индекс $\chi(G) = k(D(G) - 1) + 1$.

Замечание 5. Здесь существенным было то, что $\text{codeg}(v, w) \leq 1$. Иначе можно привести примеры гиперграфов, не являющихся конечными проективными плоскостями, но удовлетворяющих всем остальным условиям, например, просто $\frac{n}{k}$ наборов (непересекающихся) по D совпадающих ребер. Далее это понадобится.

Существенно также то, что $n = k(D(G) - 1) + 1$, иначе, например, при $k = D(G) \leq n$ можно набрать набор из многих непересекающихся проективных плоскостей — тоже не проективная плоскость.

Вывод.

Поскольку для целых классов гиперграфов при определенных соотношениях числа их вершин, длины гиперребра (возрастающей функции от числа вершин) и степени вершин невозможно расширить теорему Pirpenger-Spencer в случае растущей длины гиперребра, то имеет смысл рассмотреть не всевозможные классы гиперграфов, а оценить, на каком числе классов можно расширить теорему Pirpenger-Spencer в случае растущей длины гиперребра. Это означает, что основная цель — попробовать показать, что для большинства классов гиперграфов при определенных соотношениях на перечисленные выше параметры будет выполняться $\chi(G) \sim D(G)$, $n \rightarrow \infty$.

3. Совершенная упаковка

Определение 3. Совершенная упаковка в гиперграфе G — это упаковка G (то есть набор непересекающихся ребер), содержащая все его вершины.

Из определения следует, что совершенная упаковка G должна содержать $\frac{n}{k}$ ребер (считаем, что n делится на k нацело). Если n не делится на k нацело, то пусть какие-то $\leq k - 1$ вершин остаются непокрытыми. Это не будет иметь существенного значения для дальнейших асимптотик и приближительных алгоритмов.

Вопрос о том, существует ли в гиперграфе G совершенная упаковка, ставился уже достаточно давно.

На данный момент есть только гипотезы относительно того, можно ли в гиперграфе G найти совершенную упаковку при некоторых соотношениях на его основные характеристики. Как и ранее, рассматриваются D -регулярные, k -однородные гиперграфы, у которых $\text{codeg}(v, w) \leq D$, $n \rightarrow \infty$. Случай растущего k как функции от n ранее не рассматривался.

В случае растущего k для одних классов гиперграфов (имеются ввиду классы, определяемые некоторыми соотношениями на n, D, k) существует совершенная упаковка (например, для полных гиперграфов, решетки — эти примеры рассмотрены ранее), а для других — нет (например, проективная плоскость, в которой все гиперребра пересекаются, а, значит, размер максимальной упаковки равен 1).

Как видно, возможны некоторые взаимосвязи для проблемы хроматического индекса и совершенной упаковки, то есть эти проблемы могут быть тесно связаны для конкретных классов гиперграфов.

Если в случае растущего k проблема совершенной упаковки не рассматривалась, то в случае постоянного k проблема до сих пор не решена. Есть лишь некоторые приблизительные результаты, из которых самым фундаментальным является следствие из теоремы Pippenger-Spencer для хроматического индекса. Он формулируется следующим образом:

Следствие 1 (из теоремы Pippenger-Spencer (см. [1])). *Для любых $\delta > 0$, $k \geq 2$ — фиксированное число вершин на гиперребре, существует $\delta' > 0$, $N > 0$: из условий*

$$d(G) \geq (1 - \delta')D(G), \quad (1)$$

$$C(G) \leq \delta' D(G), \quad (2)$$

для $n > N$ следует

$$\left| |P| - \frac{n}{k} \right| < \delta,$$

где $|P|$ — размер максимальной упаковки в гиперграфе G .

Поскольку асимптотически размер этой упаковки $\frac{n}{k}$, а все гиперребра длины k , то данная упаковка будет почти совершенной, то есть покрывать $n(1 - o(1))$ вершин гиперграфа G при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 6. Данный результат был немного усилен (то есть построена упаковка, не являющаяся совершенной, но покрывающая не $n - o(n)$ вершин (как в теореме Pippenger-Spencer), а $n - O(nD^{-\frac{1}{k}} \ln^c D)$) в статье [3]. Основная теорема из этой статьи приведена ниже.

Пусть $G = (v, E)$ — $(k+1)$ -однородный гиперграф (то есть все его гиперребра содержат в точности $k+1$ вершину) на n вершинах. Пусть P — некоторая упаковка в этом гиперграфе (то есть набор непересекающихся ребер этого гиперграфа), $S = V - \bigcup P$ — те вершины гиперграфа, которые не попали в упаковку P .

Теорема 2 (Joel Spencer, [3]).

- 1) любое гиперребро G имеет постоянный размер $k + 1 \geq 3$;
- 2) $\text{codeg}(v, w) = 1 \quad \forall v, w \in V$;
- 3) $\text{deg}(v) = D \quad \forall v \in V$.

Тогда существует упаковка P с $|S| = O(nD^{-\frac{1}{k}} \ln^c D)$, где c — некоторая константа, зависящая от k .

Естественно, что в случае непостоянной длины гиперребра эти теоремы неприменимы, поскольку выше показана неприменимость теоремы Pippenger-Spencer для случая растущей длины гиперребра. В случае проективной плоскости размер максимально возможной упаковки равен 1, а, например, при $k(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ выделяется совершенная упаковка размера 1 (при $D = 1$). Поэтому в такой модели гиперграфов возможны разные варианты.

4. Случайные однородные гиперграфы

Рассмотрим полный гиперграф $G = (V, E)$ на n вершинах, k -однородный. Степень любой его вершины C_{n-1}^{k-1} , костепени — C_{n-2}^{k-2} . Число ребер — C_n^k . Его подграф $G(n, p)$ — случайный гиперграф, гиперребра которого — гиперребра G , порожденные независимо с вероятностью p . На самом деле имеется в виду стандартная вероятностная модель испытаний Бернулли, где элементарные события — это кортежи из 0, 1 длины C_n^k , где единицы на каких-то позициях соответствуют рожденным гиперребрам, а нули — не рожденным. Поэтому вводится следующая вероятностная мера:

$$P(\text{родится набор ребер } (e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \text{ и не родятся все остальные}) = \\ = p^m (1 - p)^{C_n^k - m}.$$

Очевидно, что эти элементарные события не пересекаются. В рамках данной модели был получен ряд результатов, касающихся вопроса выделения совершенной упаковки. Все эти результаты относятся к случаю постоянного k — длины гиперребра. Приведем последние результаты:

Теорема 3 (Erdos and Renyi, см. [6]). При $k = 2$, $d(n, p) = pC_{n-1}^{k-1}$ (то есть для вероятностных графов)

$$P \left(\begin{array}{l} \text{в } G(n, p) \text{ есть} \\ \text{совершенная} \\ \text{упаковка} \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } d(n, p) - \ln(n) \rightarrow -\infty, \\ e^{-e^{-c}}, & \text{если } d(n, p) - \ln(n) \rightarrow c, \\ 1, & \text{если } d(n, p) - \ln(n) \rightarrow \infty, \end{cases} \quad n \rightarrow \infty.$$

Замечание 7. $d(n, p)$, таким образом определенное, обозначает математическое ожидание степени вершины в вероятностном гиперграфе, так как можно определить индикаторные случайные величины для ребер полного гиперграфа, которые будут равны 1, если соответствующее гиперребро рождается (то есть равны 1 на всех элементарных исходах, где на месте этого гиперребра стоит 1). Степень в вероятностном гиперграфе — это случайная величина, равная сумме индикаторных с.в. ребер, проходящих через данную вершину в полном гиперграфе. Поэтому, посчитав мат. ожидание этой суммы, получаем как раз $d(n, p)$.

Есть гипотеза, что этот же результат справедлив и в случае гиперграфа с постоянной длиной гиперребра k . На данный момент доказан ряд теорем, частично это подтверждающих, например

Теорема 4 (Jeong Han Kim, см. [4]). При $k = \text{const}$, $d(n, p) = pC_{n-1}^{k-1}$: если $\frac{d(n, p)}{n^{1/(5+2/(k-1))}} \rightarrow \infty$, то $P(\text{в } G(n, p) \text{ есть совершенная упаковка}) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$.

Остановимся подробнее на случайных гиперграфах, поскольку в этой модели перспективнее получать результаты, касающиеся хроматического индекса и совершенной упаковки, в связи с тем, что рассматривать все закономерности можно с точностью почти наверное, то есть для большего числа гиперграфов, которые можно породить в этой модели, а не для всех.

Далее будет использоваться формула Стирлинга:

$$C_n^k \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Лемма 1. G — полный гиперграф на n вершинах с длиной гиперребра k . $1 \leq c \leq \frac{n}{k}$. Тогда число разных упаковок G размера $\frac{n}{kc}$ равно

$$\frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}} \left(n(1 - \frac{1}{c})\right)! \left(\frac{n}{kc}\right)!}$$

Доказательство. *Способ 1.* Выбрать упаковку из $\frac{n}{kc}$ ребер — это то же самое, что выделить $\frac{n}{c}$ точек из n имеющихся в наличии (поскольку любая упаковка размера $\frac{n}{kc}$ будет занимать ровно $\frac{n}{c}$ точек) и разделить эти выделенные точки на подмножества по k точек (гиперребра). При разных разбиениях n исходных точек на $\frac{n}{c}$ точек будем получать разные упаковки, как и при разбиениях внутри этого выделенного подмножества на подмножества по k точек. Всего возможных вариантов разбиения n точек на подмножества по $\frac{n}{c}$ точек $C_n^{\frac{n}{c}}$. Внутри подмножества из $\frac{n}{c}$ точек будем выбирать подмножества по k точек и подсчитаем число таких возможных разбиений:

- 1) занумеруем все $\frac{n}{c}$ точек номерами $1, 2, \dots, \frac{n}{c}$
- 2) зафиксируем точку с номером 1. К ней в подмножество из k точек можно добавить $k-1$ точку из оставшихся $\frac{n}{c} - 1$. Это можно сделать $C_{\frac{n}{c}-1}^{k-1}$ способами. Таким способом набрали k точек.
- 3) Зафиксируем какую-нибудь из $\frac{n}{c} - k$ оставшихся точек и добавим к ней $k-1$ точку $C_{\frac{n}{c}-k-1}^{k-1}$ способами и т. д.

В итоге получим $C_n^{\frac{n}{c}} \left(C_{\frac{n}{c}-1}^{k-1} C_{\frac{n}{c}-k-1}^{k-1} \dots C_{k-1}^{k-1}\right)$ способов выбрать упаковку размера $\frac{n}{kc}$.

$$\begin{aligned} C_n^{\frac{n}{c}} \left(C_{\frac{n}{c}-1}^{k-1} C_{\frac{n}{c}-k-1}^{k-1} \dots C_{k-1}^{k-1}\right) &= \\ &= \frac{n!}{\left(\frac{n}{c}\right)! \left(n(1 - \frac{1}{c})\right)!} \left(\frac{k}{n/c} C_{\frac{n}{c}}^k \frac{k}{\frac{n}{c} - k} C_{\frac{n}{c} - k}^k \dots C_k^k\right) = \\ &= \frac{n!}{\left(\frac{n}{c}\right)! \left(n(1 - \frac{1}{c})\right)!} \frac{k^{\frac{n}{kc}}}{\left(\frac{n}{c} - k\right) \dots k} \frac{\left(\frac{n}{c}\right)!}{(k!)^{\frac{n}{kc}}} = \frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}} \left(n(1 - \frac{1}{c})\right)! \left(\frac{n}{kc}\right)!} \end{aligned}$$

Способ 2. Можно выбирать упаковки другим способом: выбираем первое гиперребро C_n^k способами, второе — C_{n-k}^k способами (поскольку второе гиперребро не должно пересекать первое, то оно не должно

содержать те k точек первого гиперребра, поэтому выбирать новые k точек надо из оставшихся $n - k$ точек) и т. д. В итоге получаем $C_n^k C_{n-k}^k \cdots C_{n(1-\frac{1}{c})+k}^k$ вариантов, но надо учесть, что любая перестановка ребер в упаковке дает ту же самую упаковку, поэтому всего получаем вариантов:

$$\frac{C_n^k C_{n-k}^k \cdots C_{n(1-\frac{1}{c})+k}^k}{\left(\frac{n}{kc}\right)!} = \frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}} \left(n(1-\frac{1}{c})\right)! \left(\frac{n}{kc}\right)!}$$

Что и требовалось доказать.

Определение 4. $f(n) \lesssim g(n)$, если существует номер $N > 0$: $\forall n > N \Rightarrow f(n) < cg(n)$ для некоторой константы c .

$f(n) \preceq g(n)$, если существует номер $N > 0$: $\forall n > N \Rightarrow f(n) < g(n)$.

Лемма 2. Пусть в условиях нашей модели случайного гиперграфа $G(n, p)$ (k — число вершин на гиперребре — либо постоянная, либо функция от n), где $p = \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}$ и функция D — либо постоянная, либо растущая относительно n . $m > 1$ — некоторая постоянная.

Если $D \lesssim \frac{e^k}{me}$, то $P(\text{в } G(n, p) \text{ есть совершенная упаковка}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(\text{в } G(n, p) \text{ есть совершенная упаковка}) &= \\ &= P(\text{рождается какая-то упаковка размера } \frac{n}{k}) \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\text{всем упаковкам} \\ \text{размера } \frac{n}{k}}} P(\text{рождается конкретная упаковка размера } \frac{n}{k}). \end{aligned}$$

Поскольку по Лемме 1 в этой сумме будет ровно $\frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{n}{k}\right)!}$ слагаемых, то

$$\begin{aligned} P(\text{в } G(n, p) \text{ есть совершенная упаковка}) &\leq \frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{n}{k}\right)!} \left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{\frac{n}{k}} = \\ &= \frac{n! D^{\frac{n}{k}} ((k-1)!)^{\frac{n}{k}}}{(k!)^{\frac{n}{k}} ((n-1)(n-2)\dots(n-k+1))^{\frac{n}{k}} \left(\frac{n}{k}\right)!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n! D^{\frac{n}{k}}}{k^{\frac{n}{k}} n^{(k-1)\frac{n}{k}} \left(\frac{n}{k}\right)!} \left[\binom{n}{n-1} \binom{n}{n-2} \cdots \binom{n}{n-k+1} \right]^{\frac{n}{k}} \lesssim \\
 &\lesssim \frac{2 \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} D^{\frac{n}{k}} n^{\frac{n}{k}}}{k^{\frac{n}{k}} n^n \left(\frac{n}{ek}\right)^{\frac{n}{k}} \sqrt{2\pi \frac{n}{k}}} \left[1 + \frac{k-1}{n-k+1} \right]^{\frac{n}{k}(k-1)} \lesssim \frac{2 e^{\frac{n}{k}} \sqrt{k} D^{\frac{n}{k}} e^k}{e^n}.
 \end{aligned}$$

Поэтому при $D \lesssim \frac{e^k}{me}$ отсюда будет следовать утверждение леммы.

Предложение 1.

$$\frac{C^k_{n(1-\frac{1}{c})}}{C^{k-1}_{n-1}} \sim \frac{n}{k} \left(1 - \frac{1}{c} \right)^k, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \frac{C^k_{n(1-\frac{1}{c})}}{C^{k-1}_{n-1}} &= \frac{n}{k} \frac{n(1-\frac{1}{c})[n(1-\frac{1}{c})-1] \dots [n(1-\frac{1}{c})-k]}{n(n-1) \dots (n-k)} = \\
 &= \frac{n}{k} \left(1 - \frac{1}{c} \right)^k \left(\frac{n-\frac{c}{c-1}}{n-1} \right) \cdots \left(\frac{n-\frac{c}{c-1}k}{n-1} \right) \sim \\
 &\sim \frac{n}{k} \left(1 - \frac{1}{c} \right)^k \left(1 - \frac{1}{(n-\alpha(k))(c-1)} \right)^k \sim \frac{n}{k} \left(1 - \frac{1}{c} \right)^k, \quad n \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

поскольку $1 \leq \alpha(k) \leq k$. Что и требовалось доказать.

Везде далее полагаем $k = o(n)$, $n \rightarrow \infty$.

Теорема 5. Пусть в условиях нашей модели случайного гиперграфа $G(n, p)$ (k — число вершин на гиперребре — растущая функция от n), где $p = \frac{D}{C^{k-1}_{n-1}}$ и строго возрастающая по n функция $D = o(C^{k-1}_{n-1})$, $k = o(n)$, $n \rightarrow \infty$.

1) Если для некоторой константы $c > 1$

$$\frac{2 e^{\frac{n}{kc}} \sqrt{ck} (cD)^{\frac{n}{kc}} e^{\frac{k}{c}} \left(\frac{c}{c-1}\right)^{n(1-\frac{1}{c})}}{e^{\frac{n}{c}}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то $P(G(n, p) \text{ содержит упаковку размера } \frac{n}{kc}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

2) Если $D \geq e^k$, то для любой константы $c > 1$ $P(G(n, p)$ содержит упаковку размера $\frac{n}{kc}) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} 1) P(\text{в } G(n, p) \text{ есть упаковка размера } \frac{n}{kc}) &= \\ &= P(\text{рождается какая-то упаковка размера } \frac{n}{kc}) \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\text{всем упаковкам} \\ \text{размера } \frac{n}{kc}}} P(\text{рождается конкретная упаковка размера } \frac{n}{kc}). \end{aligned}$$

Поскольку по Лемме 1 в этой сумме будет ровно $\frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}} (n(1-\frac{1}{c}))! (\frac{n}{kc})!}$ слагаемых, то

$$\begin{aligned} P(\text{в } G(n, p) \text{ есть упаковка размера } \frac{n}{kc}) &\leq \\ &\leq \frac{n!}{(k!)^{\frac{n}{kc}} (\frac{n}{kc})! (n(1-\frac{1}{c}))!} \left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}} \right)^{\frac{n}{kc}} = \\ &= \frac{n! D^{\frac{n}{kc}} ((k-1)!)^{\frac{n}{kc}}}{(k!)^{\frac{n}{kc}} ((n-1)(n-2)\dots(n-k+1))^{\frac{n}{kc}} (\frac{n}{kc})! (n(1-\frac{1}{c}))!} = \\ &= \frac{n! D^{\frac{n}{kc}}}{k^{\frac{n}{kc}} n^{(k-1)\frac{n}{kc}} (\frac{n}{kc})! (n(1-\frac{1}{c}))!} \left[\binom{n}{n-1} \binom{n}{n-2} \dots \binom{n}{n-k+1} \right]^{\frac{n}{kc}} \lesssim \\ &\lesssim \frac{2 \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} D^{\frac{n}{kc}} n^{\frac{n}{kc}}}{k^{\frac{n}{kc}} n^{\frac{n}{c}} \left(\frac{n}{ekc}\right)^{\frac{n}{kc}} \sqrt{2\pi \frac{n}{kc}} \left(\frac{n(1-\frac{1}{c})}{e}\right)^{n(1-\frac{1}{c})}} \left[1 + \frac{k-1}{n-k+1} \right]^{\frac{n}{kc}(k-1)} \lesssim \\ &\lesssim \frac{2 e^{\frac{n}{kc}} \sqrt{ck} (cD)^{\frac{n}{kc}} e^{\frac{k}{c}} \left(\frac{c}{c-1}\right)^{n(1-\frac{1}{c})}}{e^{\frac{n}{c}}}. \end{aligned}$$

Отсюда будет следовать утверждение 1).

$$\begin{aligned} 2) P\left(G(n, p) \text{ содержит упаковку размера } \frac{n}{kc}\right) &= \\ &= 1 - P\left(G(n, p) \text{ не содержит упаковку размера } \frac{n}{kc}\right), \end{aligned}$$

поэтому оценим

$$\begin{aligned}
 & P\left(G(n, p) \text{ не содержит упаковку размера } \frac{n}{kc}\right) \leq \\
 & \leq \sum_{1 \leq d \leq \frac{n}{kc} - 1} P(G(n, p) \text{ содержит упаковку размера } d \\
 & \quad \text{и не содержит упаковок размера } d + 1) = \\
 & = \sum_{1 \leq d \leq \frac{n}{kc} - 1} \sum_{\text{всем упаковкам}} P(\text{рождается конкретная упаковка размера } d \\
 & \quad \text{и не рождаются все гиперребра, не пересекающие ее}) \leq \\
 & \leq \sum_{1 \leq d \leq \frac{n}{kc} - 1} \frac{n!}{(k!)^d (n - kd)! (d)!} \left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^d \left(1 - \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{C_{n-kd}^k} \leq \\
 & \leq \frac{n}{kc} \max_{1 \leq d \leq \frac{n}{kc} - 1} \frac{n!}{(k!)^d (n - kd)! (d)!} \left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^d \left(1 - \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{C_{n-kd}^k}
 \end{aligned}$$

Максимум слагаемых в этой сумме получается при $n \rightarrow \infty$ при $d = \frac{n}{kc}$, так как (произведя вычисления, аналогичные проведенным в Лемме 1) $\frac{n!}{(k!)^d (n - kd)! (d)!} \left(\frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^d \sim \left(\frac{D}{e^k}\right)^d$. Поскольку по условию пункта 2) $D \gtrsim e^k$, то этот максимум достигается при максимальном $d = \frac{n}{kc}$. Максимум $\left(1 - \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{C_{n-kd}^k}$ также достигается при $d = \frac{n}{kc}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 & P\left(G(n, p) \text{ не содержит упаковку размера } \frac{n}{kc}\right) \lesssim \\
 & \lesssim \left(\frac{D}{e^k}\right)^d e^{-C_{n(1-\frac{1}{c})}^k \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}} \sim \left(\frac{D}{e^k}\right)^d e^{-\frac{nD}{k}(1-\frac{1}{c})^k}
 \end{aligned}$$

(здесь использовали Предложение 1)

Поскольку $D \gtrsim e^k$, то $P(G(n, p) \text{ не содержит упаковку размера } \frac{n}{kc}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. Пусть в условиях нашей модели случайного гиперграфа $G(n, p)$ (k — число вершин на гиперребре — растущая функция от n), где $p = \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}$ и строго возрастающая по n функция $D = o(C_{n-1}^{k-1})$, $k = o(n)$, $n \rightarrow \infty$.

Если для некоторой константы $c > 1$

$$\frac{2 e^{\frac{n}{kc}} \sqrt{ck} (cD)^{\frac{n}{kc}} e^{\frac{k}{c}} \left(\frac{c}{c-1}\right)^{n(1-\frac{1}{c})}}{e^{\frac{n}{c}}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то $P(\chi(G(n, p)) \geq cD) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из Теоремы 5 следует, что в этих условиях нельзя выделить упаковку размера $> \frac{n}{kc}$. Отсюда следует, что $\chi(G) > cD$ асимптотически почти наверное, поскольку необходимо покрыть с помощью упаковок $\frac{nD}{k}(1-o(1))$ гиперребер гиперграфа $G(n, p)$ (именно столько гиперребер рождается асимптотически с вероятностью 1 (что следует из неравенства Чебышева (см. [3])). Для этого нам потребуются $\geq cD$ упаковок. Что и требовалось доказать.

Утверждение 6. Пусть в условиях нашей модели случайного гиперграфа $G(n, p)$ (k — число вершин на гиперребре — растущая функция от n), где $p = \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}$ и функция $D = o(C_{n-1}^{k-1})$, $n \rightarrow \infty$: $D \geq e^k$. $c > 1$ — любая постоянная. Тогда $P\left(\text{можно выделить } \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc}\right) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$.

Доказательство.

$$P\left(\text{можно выделить } \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\text{нельзя выделить } \frac{D}{k\left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc}\right)$$

поэтому оценим

$$\begin{aligned}
 & P \left(\text{нельзя выделить } \frac{D}{k \left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc} \right) \leq \\
 & \leq \sum_{1 \leq d \leq \frac{D}{k \left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}}} P(G(n, p) \text{ содержит } d \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc} \\
 & \quad \text{и не содержит } d + 1 \text{ упаковку размера } \frac{n}{kc}) = \\
 & = \sum_{1 \leq d \leq \frac{D}{k \left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}} \sum_{\substack{\text{(всем наборам из } d \\ \text{упаковок размера } \frac{n}{kc})}} P(\text{рождается конкретный} \\
 & \quad \text{набор } d \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc} \text{ и не рождаются все гиперребра,} \\
 & \quad \text{пересекающие гиперребра последней набранной упаковки}) \leq \\
 & \leq \sum_{1 \leq d \leq \frac{D}{k \left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}} \frac{n}{kc} \left[\frac{n!}{\left(\frac{n}{kc}\right)! (k!)^{\frac{n}{kc}} (n(1-\frac{1}{c}))!} \right]^d \left(1 - \frac{D}{C_{n-1}^{k-1}}\right)^{C_{n(1-\frac{1}{c})}^k} \lesssim \\
 & \lesssim \frac{n}{kc} \max_{1 \leq d \leq \frac{D}{k \left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}} \left(\frac{ecD}{e^k}\right)^{\frac{nd}{kc}} \left(\frac{c}{c-1}\right)^{nd(1-\frac{1}{c})} \frac{1}{e^{\frac{nD}{k}(1-\frac{1}{c})^k}}
 \end{aligned}$$

Поскольку $D \geq e^k$ и $d \lesssim \frac{D}{k \left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}}$, то

$$P \left(\text{нельзя выделить } \frac{D}{k \left(\frac{c}{c-1}\right)^k \ln \frac{D}{e^k}} \text{ упаковок размера } \frac{n}{kc} \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Что и требовалось доказать.

Автор хотел бы выразить особую благодарность доценту Ирматову А. А. за внимание, проявленное к работе, и оказанную помощь.

Список литературы

[1] Pippenger-Spencer. Asymptotic behaviour of the chromatic Index for Hypergraphs // Journal of combinatorial theory. Series A. 51. 24–42. 1989.

- [2] Будников Ю. А. О мощности ребер гиперграфа // Материалы IX Международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки». 2006. С. 70–72.
- [3] Spencer. Real time asymptotic packing // The electronic Journal of combinatorics. 4. No. 2. 1997.
- [4] Vu Van H. New bounds on nearly perfect matchings in hypergraphs: higher codegrees do help.
- [5] Wormald. Models of random regular graphs.
- [6] Kim Jeong Han. Perfect matchings in random uniform hypergraphs.
- [7] Kim Jeong Han, Alon Noga. A note on the degree, size and chromatic index of uniform hypergraph.
- [8] Krivelevich, Sudakov. Approximate coloring of uniform hypergraphs.
- [9] Kim Jeong Han, Alon Noga, Spencer Joel. Nearly perfect matching in regular simple hypergraphs // Israel J. Math. 100. 171–187. 1997.
- [10] Finite projective planes from axioms. <http://PlanetMaths.org>.