

Нечёткие модальные логики

А. М. Миронов

В статье введён и изучен класс логических исчислений, называемых **нечёткими модальными логиками**. Описана семантика данных исчислений в классе нечётких моделей Крипке, и доказана теорема полноты минимальной нечёткой модальной логики FK в классе нечётких моделей Крипке.

1. Введение

Математические методы анализа систем заключаются в построении математических моделей исследуемых систем и формальном анализе этих моделей.

Поскольку модели систем не тождественны самим системам, и являются лишь их аппроксимациями, то, следовательно, свойства исследуемых систем и свойства их моделей могут различаться. Данная ситуация приводит к существенным трудностям при предсказании свойств реальных систем на основе информации о свойствах их моделей.

Один способ нахождения точных свойств анализируемых систем заключается в построении как можно более точных и детальных их математических моделей. Во многих ситуациях данный путь приводит к большим трудностям, по причине того, что большая сложность детальных моделей может вызывать существенные вычислительные проблемы при их формальном анализе.

Другой путь исследования свойств реальных систем заключается в построении таких их приближённых математических моделей, которые, хотя и являются грубыми подобиями исследуемых систем, но имеют приемлемую вычислительную сложность. Основная возникающая здесь проблема заключается в оценке меры расхождения

между свойствами реальной системы и свойствами её приближённой модели.

Для точного оценивания данного расхождения необходим точный учёт в математической модели анализируемой системы всех предположений о нечёткости, недостоверности и неопределённости при построении данной модели, меры точности измерения параметров анализируемой системы, и т. п.

Все нечёткие компоненты математической модели анализируемой системы можно условно сгруппировать в следующие две категории.

- 1) Нечёткие компоненты, возникающие по причине *эффекта случайности*. Данный эффект имеет место например тогда, когда нечёткость в процессе измерения значения некоторого параметра анализируемой системы носит вероятностный характер, и измеряемые значения данного параметра подчиняются некоторым статистическим закономерностям.

Данный вид нечёткости исследуется методами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов.

- 2) Нечёткие компоненты, возникающие по причине *концептуальной нечёткости*. Данные компоненты могут быть связаны с неполным и недостоверным знанием об изучаемой системе.

Настоящая статья посвящена построению нового математического аппарата для исследования нечётких компонентов, относящихся ко второй категории.

Математические подходы к представлению и анализу нечётких знаний были рассмотрены во многих работах, в частности, в статьях [3]–[14]. Однако во всех них не рассматривались математические методы для анализа концептуальной нечёткости в поведении динамических систем. Настоящая работа в некоторой степени восполняет данный пробел.

Наше представление нечёткости в поведении динамических систем основывается на понятии меры близости между состояниями динамических систем. Мы представляем поведение динамических систем нечёткими моделями Крипке, которые являются обобщением известных в модальной логике моделей Крипке, широко используемых

в компьютерной науке для моделирования поведения дискретных динамических систем (см., например, [2]). Основная задача статьи заключается в построении формальных логических систем, предназначенных для разработки на их основе языков спецификации поведения нечётких динамических систем. Данные формальные системы называются в статье **нечёткими модальными логиками**. В работе описана семантика нечётких модальных логик в классе нечётких моделей Крипке, и доказана теорема полноты минимальной нечёткой модальной логики в классе нечётких моделей Крипке.

2. Нечёткие модальные логики

2.1. Шкала оценок

Напомним, что **полной решёткой** называется частично упорядоченное множество (\mathcal{B}, \leq) , такое, что для каждого подмножества $Q \subseteq \mathcal{B}$ существуют его точная нижняя грань и точная верхняя грань, то есть такие элементы $\inf(Q)$ и $\sup(Q)$ множества \mathcal{B} , что для каждого $b \in \mathcal{B}$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (\forall q \in Q \quad b \leq q) &\leftrightarrow b \leq \inf(Q), \\ (\forall q \in Q \quad q \leq b) &\leftrightarrow \sup(Q) \leq b. \end{aligned}$$

Ниже элементы $\inf(\mathcal{B})$ и $\sup(\mathcal{B})$ обозначаются символами 0 и 1 соответственно.

Для произвольного конечного подмножества

$$Q = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathcal{B}$$

элементы $\inf(Q)$ и $\sup(Q)$ будут обозначаться знакосочетаниями

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n \quad \text{и} \quad a_1 \vee \dots \vee a_n$$

соответственно. Для данных элементов также будут использоваться обозначения

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{c} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right]$$

соответственно.

Шкалой оценок называется полная решётка \mathcal{B} , в которой для каждой пары $a, b \in \mathcal{B}$ определён элемент

$$a \rightarrow b \quad (1)$$

обладающий следующим свойством: для каждого $c \in \mathcal{B}$

$$c \leq (a \rightarrow b) \quad \leftrightarrow \quad (c \wedge a) \leq b \quad (2)$$

Элемент (1) можно интерпретировать как меру истинности высказывания

$$\langle\langle a \leq b \rangle\rangle$$

В нижеследующем тексте символ \mathcal{B} обозначает некоторую фиксированную шкалу оценок.

Для каждой пары $a, b \in \mathcal{B}$ символом $a \leftrightarrow b$ будет ниже обозначаться элемент $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

2.2. Нечёткие модальные формулы

Пусть задано некоторое множество PV , элементы которого называются **пропозициональными переменными**.

Множество Fm **нечётких модальных формул** (называемых ниже просто **формулами**) определяется индуктивно следующим образом:

- Каждый элемент множества PV является формулой.
- Каждый элемент шкалы \mathcal{B} является формулой.
- Если A и B — формулы, то знакосочетания $A \wedge B$, $A \vee B$, и $A \rightarrow B$ являются формулами.
- Если A — формула, и $a \in \mathcal{B}$, то знакосочетание $\Box_a A$ является формулой.

Модальные связки вида \Box_a называются **нечёткими модальными операторами**.

При некоторых интерпретациях формул и оценок формулу вида $\Box_a A$ можно интерпретировать как высказывание

*мера убедительности факта,
выражаемого формулой A , равна a .*

Для произвольного списка A_1, \dots, A_n формул из Fm знакосочетания

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \text{ и } A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

являются сокращённой записью формул

$$A_1 \wedge (A_2 \wedge (\dots \wedge A_n) \dots) \text{ и } A_1 \vee (A_2 \vee (\dots \vee A_n) \dots)$$

соответственно. Данные формулы также будут обозначаться знакосочетаниями

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \text{ и } \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right]$$

соответственно.

Для каждой пары $A, B \in Fm$ знакосочетание $A \leftrightarrow B$ является сокращённым обозначением формулы

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

2.3. Операторы подстановки

Оператором подстановки на множестве Fm называется пара

$$\theta = ((p_1, \dots, p_n), (A_1, \dots, A_n)) \tag{3}$$

где $n \geq 1$ и

- (p_1, \dots, p_n) — список различных пропозициональных переменных,
- (A_1, \dots, A_n) — список формул.

Оператор θ индуцирует отображение множества Fm в себя, обозначаемое тем же символом θ , и определяемое индуктивно следующим образом: для каждой формулы $A \in Fm$

- если $A = p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$, то

$$\theta(A) \stackrel{\text{def}}{=} A_i,$$

- если $A \in PV \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, или $A = a \in \mathcal{B}$, то

$$\theta(A) \stackrel{\text{def}}{=} A,$$

- если A имеет вид

$$B \wedge C, \quad B \vee C, \quad B \rightarrow C, \quad \text{или} \quad \Box_a B$$

то $\theta(A)$ имеет вид

$$\theta(B) \wedge \theta(C), \quad \theta(B) \vee \theta(C), \quad \theta(B) \rightarrow \theta(C), \quad \Box_a \theta(B)$$

соответственно.

2.4. Тавтологии

Пусть A и B — некоторые формулы из Fm . Мы будем говорить, что B получена из A эквивалентным преобразованием, если

- A содержит подформулу вида

$$a \wedge b, \quad a \vee b, \quad \text{или} \quad a \rightarrow b$$

где $a, b \in \mathcal{B}$, и

- B получается из A путём замены данной подформулы на элемент шкалы \mathcal{B} , являющийся результатом применения соответствующей операции к паре a, b .

Две формулы из Fm называются **эквивалентными**, если одну из них можно получить из другой путём нескольких эквивалентных преобразований.

Пусть A — формула, не содержащая модальных операторов, и список всех пропозициональных переменных, входящих в A , имеет вид

$$(p_1, \dots, p_n).$$

Формула A называется **тавтологией**, если для каждого оператора подстановки θ вида (3), такого, что

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad A_i = a_i \in \mathcal{B}$$

формула $\theta(A)$ эквивалентна элементу $1 \in \mathcal{B}$.

2.5. Нечёткие модальные логики

Нечёткой модальной логикой называется произвольное подмножество L множества Fm , обладающее следующими свойствами:

- каждая тавтология принадлежит L
- для всех $A, B \in Fm$ и каждого $a \in \mathcal{B}$

$$\Box_a \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Box_a A \\ \Box_a B \end{array} \right\} \in L, \quad (4)$$

- для каждого $a \in \mathcal{B}$

$$a \rightarrow \Box_a 1 \in L, \quad (5)$$

- для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого $a \in \mathcal{B}$

$$\Box_a A \rightarrow a \in L, \quad (6)$$

- для всех $A, B \in Fm$

$$\begin{array}{l} \text{если } A \in L \text{ и } A \rightarrow B \in L \\ \text{то } B \in L \end{array} \quad (7)$$

- для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого оператора подстановки θ

$$\begin{array}{l} \text{если } A \in L \\ \text{то } \theta(A) \in L \end{array} \quad (8)$$

- для всех $A, B \in Fm$ и всех $a, b \in \mathcal{B}$

$$\begin{array}{l} \text{если } a \rightarrow (A \rightarrow B) \in L \\ \text{то } a \rightarrow (\Box_b A \rightarrow \Box_b B) \in L \end{array} \quad (9)$$

- для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого подмножества $\{a_i \mid i \in \mathfrak{S}\} \subseteq \mathcal{B}$

$$\begin{array}{l} \text{если } \forall i \in \mathfrak{S} \quad a_i \rightarrow A \in L \\ \text{то } \left(\sup_{i \in \mathfrak{S}} a_i \right) \rightarrow A \in L. \end{array} \quad (10)$$

Из данного определения вытекает, что существует минимальная (относительно включения) нечёткая модальная логика, которую мы будем обозначать знакосочетанием FK (которое является аббревиатурой словосочетания *Fuzzy Kripke*).

Нетрудно доказать, что для каждой нечёткой модальной логики L имеет место следующее правило вывода:

$$\begin{array}{l} \text{если } a_1 \rightarrow A_1 \in L, \dots, a_n \rightarrow A_n \in L \\ \left(\begin{array}{l} \text{где } a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B}, \text{ и} \\ A_1, \dots, A_n \in Fm \end{array} \right) \\ \text{то } \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \in L. \end{array} \quad (11)$$

Ниже вместо термина «нечёткая модальная логика» будет использоваться эквивалентный ему в данной статье термин «логика».

Для каждой формулы A и каждой логики L символ

$$\llbracket A \rrbracket_L$$

обозначает точную верхнюю грань множества

$$\{a \in \mathcal{B} \mid a \rightarrow A \in L\}. \quad (12)$$

Из данного определения и из свойства (10) следует соотношение

$$\forall a \in \mathcal{B} \quad a \rightarrow A \in L \iff a \leq \llbracket A \rrbracket_L.$$

3. Нечёткие модели Крипке

Рассматриваемые в настоящей статье

- понятие нечёткого множества, и
- связанные с ним понятия и конструкции

аналогичны

- понятию гейтингозначного множества, и
- связанным с ним понятиям и конструкциям,

введённым в [1].

3.1. Нечёткие множества

Нечётким множеством называется пара

$$W = (X, \mu) \tag{13}$$

где

- X — множество (называемое **носителем** W), и
- μ — отображение вида

$$\mu : X \times X \rightarrow \mathcal{B}$$

обладающее следующими свойствами:

$$\forall x, y \in X \quad \mu(x, y) = \mu(y, x) \tag{14}$$

$$\forall x, y, z \in X \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu(x, y) \\ \mu(y, z) \end{array} \right\} \leq \mu(x, z) \tag{15}$$

Для каждой пары $x, y \in X$ элемент $\mu(x, y)$ называется **мерой близости** x и y . Для каждого $x \in X$ элемент $\mu(x, x)$ называется **мерой принадлежности** элемента x нечёткому множеству (13).

Бинарным отношением на (13) называется произвольное отображение R вида

$$R : X \times X \rightarrow \mathcal{B}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\forall x, y, x', y' \in X \quad \left\{ \begin{array}{l} R(x, y) \\ \mu(x, x') \\ \mu(y, y') \end{array} \right\} \leq R(x', y'), \tag{16}$$

$$\forall x, y \in X \quad R(x, y) \leq \left\{ \begin{array}{l} \mu(x, x) \\ \mu(y, y) \end{array} \right\}. \tag{17}$$

Для каждой пары $(x, y) \in X \times X$ элемент $R(x, y)$ можно интерпретировать как **меру принадлежности** данной пары бинарному отношению R .

Подмножеством нечёткого множества (13) называется произвольное отображение s вида

$$s : X \rightarrow \mathcal{B}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\forall x, x' \in X \quad \left\{ \begin{array}{l} s(x) \\ \mu(x, x') \end{array} \right\} \leq s(x'), \quad (18)$$

$$\forall x \in X \quad s(x) \leq \mu(x, x). \quad (19)$$

Для каждого $x \in X$ элемент $s(x)$ можно интерпретировать как **меру принадлежности** элемента x подмножеству s .

Совокупность всех подмножеств нечёткого множества (13) обозначается символом $Sub(W)$.

Ниже для каждого нечёткого множества W его носитель будет обозначаться тем же самым символом W , и для каждой пары x, y элементов носителя мера близости x и y будет обозначаться символом $W(x, y)$. Кроме того, для каждого $x \in W$ символ $W(x)$ по определению обозначает меру принадлежности элемента x нечёткому множеству W .

3.2. Определение нечёткой модели Крипке

Нечёткой моделью Крипке называется произвольная тройка M вида

$$M = (W, \{R_a \mid a \in \mathcal{B}\}, \xi) \quad (20)$$

компоненты которой определяются следующим образом:

- 1) W — это некоторое нечёткое множество, элементы которого называются **точками**,
- 2) $\{R_a \mid a \in \mathcal{B}\}$ — это \mathcal{B} -индексированная совокупность бинарных отношений на W , называемых **отношениями достижимости**,
- 3) ξ — это отображение вида

$$\xi : PV \rightarrow Sub(W) \quad (21)$$

называемое **оценкой пропозициональных переменных**.

Ниже вместо термина «нечёткая модель Крипке» будет использоваться эквивалентный ему в данной статье термин «модель».

3.3. Оценка формул в моделях

Для каждой формулы $A \in Fm$ и каждой модели (20) **оценкой** A в M называется отображение

$$\llbracket A \rrbracket_M : W \rightarrow \mathcal{B},$$

которое сопоставляет каждому $x \in W$ оценку $\llbracket A \rrbracket_x \in \mathcal{B}$, определяемую следующим образом:

- для всех $p \in PV$

$$\llbracket p \rrbracket_x \stackrel{\text{def}}{=} \xi(p)(x), \quad (22)$$

- для всех $a \in \mathcal{B}$

$$\llbracket a \rrbracket_x \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{c} a \\ W(x) \end{array} \right\}, \quad (23)$$

-

$$\llbracket A \wedge B \rrbracket_x \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket A \rrbracket_x \wedge \llbracket B \rrbracket_x, \quad (24)$$

-

$$\llbracket A \vee B \rrbracket_x \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket A \rrbracket_x \vee \llbracket B \rrbracket_x, \quad (25)$$

-

$$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket_x \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{c} \llbracket A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket B \rrbracket_x \\ W(x) \end{array} \right\}, \quad (26)$$

-

$$\llbracket \square_a A \rrbracket_x \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{c} a \\ \inf_{y \in W} (R_a(x, y) \rightarrow \llbracket A \rrbracket_y) \\ W(x) \end{array} \right\}. \quad (27)$$

Нетрудно доказать, что отображение $\llbracket A \rrbracket_M$ является подмножеством нечёткого множества W .

3.4. Истинность формул в моделях

Формула $A \in Fm$ называется **истинной в точке** x модели (20), если имеет место соотношение

$$\llbracket A \rrbracket_x = W(x). \quad (28)$$

Формула $A \in Fm$ называется **истинной в модели** (20), если она истинна в каждой точке этой модели.

Нетрудно доказать, что каждая формула логики FK истинна в каждой модели. Это следует из того, что

- каждая тавтология истинна в любой модели,
- формулы из соотношений (4), (5) и (6) истинны в произвольной модели, и
- правила вывода (7), (8), (9) и (10) сохраняют свойство истинности в произвольной модели.

Оставшая часть статьи посвящена доказательству обратного утверждения: если формула истинна в каждой модели, то она принадлежит логике FK .

4. L -совместимые множества

4.1. Непротиворечивые логики

Логика $L \subseteq Fm$ называется **непротиворечивой**, если

$$\forall a \in \mathcal{B} \quad a \in L \Rightarrow a = 1. \quad (29)$$

Докажем, что логика FK непротиворечива.

Как было отмечено в параграфе 3.4, для каждого $a \in \mathcal{B}$, из соотношения $a \in FK$ следует, что формула a истинна в каждой модели, в частности, в модели вида (20), где W состоит из одного элемента x , и

$$W(x) = 1. \quad (30)$$

Соотношение (29) следует из (23), (28) и (30). Утверждение доказано.

Ниже под логикой понимается непротиворечивая логика.

4.2. Определение L -совместимого множества

Пусть

- L — некоторая непротиворечивая логика, и

- u — некоторое подмножество Fm .

Множество u называется **L -совместимым**, если для

- каждого конечного подмножества множества u , имеющего вид

$$\{a_1 \rightarrow A_1, \dots, a_n \rightarrow A_n\} \quad (31)$$

(где $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B}$, $A_1, \dots, A_n \in Fm$)

и

- каждого $b \in \mathcal{B}$

из соотношения

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \in L \quad (32)$$

следует соотношение

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leq b. \quad (33)$$

4.3. Свойства L -совместимых множеств

Для каждой пары u_1, u_2 подмножеств Fm неравенство

$$u_1 \leq u_2$$

означает, что

для каждой формулы вида $a \rightarrow A \in u_1$
 $a = 0$ или $\exists b \geq a : b \rightarrow A \in u_2$.

Теорема 1. Для каждой пары u_1, u_2 подмножеств Fm из неравенства

$$u_1 \leq u_2$$

следует, что если u_2 — L -совместимо, то u_1 тоже L -совместимо.

Теорема 2. Каждая непротиворечивая логика L является L -совместимым множеством.

Доказательство. Применяя правило вывода (11) к подмножеству (31) множества L , получаем соотношение

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \in L. \quad (34)$$

Из (32), (34) и (7) следует соотношение

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \rightarrow b \in L \quad (35)$$

Из (35) и (29) следует (33). Теорема доказана.

Ниже символ L обозначает произвольную непротиворечивую логику.

Теорема 3. Пусть

- u — некоторое L -совместимое множество,
- A — некоторая формула, и
- Q — множество всех элементов $a \in \mathcal{B}$, таких, что

$$u \cup \{a \rightarrow A\} \quad L\text{-совместимо.} \quad (36)$$

Тогда для каждого $a \in \mathcal{B}$ имеет место соотношение

$$a \leq \sup(Q) \quad \leftrightarrow \quad a \in Q.$$

Доказательство. Заметим, что $Q \neq \emptyset$, так как $0 \in Q$.

Импликация

$$a \in Q \quad \Rightarrow \quad a \leq \sup(Q)$$

очевидна.

Импликация

$$a \leq \sup(Q) \quad \Rightarrow \quad a \in Q$$

эквивалентна следующей паре утверждений:

1) множество

$$u \cup \{\sup(Q) \rightarrow A\} \quad (37)$$

является L -совместимым

2) если множество

$$u \cup \{a \rightarrow A\}$$

L -совместимо, то для каждого $a' \leq a$ множество

$$u \cup \{a' \rightarrow A\}$$

тоже L -совместимо.

Утверждение 2 следует из теоремы 1.

Докажем утверждение 1: для

- каждого подмножества (31) множества (37), и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как u по предположению L -совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \Rightarrow (33)$$

достаточно рассмотреть лишь случай, когда множество (31) имеет следующий вид:

- $(a_1 \rightarrow A_1) = (\sup(Q) \rightarrow A)$
- $\forall i = 2, \dots, n \quad (a_i \rightarrow A_i) \in u.$

В этом случае (33) имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup(Q) \\ a_2 \wedge \dots \wedge a_n \end{array} \right\} \leq b \quad (38)$$

(38) эквивалентно соотношению

$$\forall a \in Q \quad \left\{ \begin{array}{l} a \\ a_2 \wedge \dots \wedge a_n \end{array} \right\} \leq b \quad (39)$$

(39) следует из (36). Теорема доказана.

Элемент $\text{sup}(Q)$, который однозначно определяется по A и u , обозначается ниже символом

$$\llbracket A \rrbracket_u \quad (40)$$

Из определения элемента $\llbracket A \rrbracket_u$ вытекает, что для каждого $u \subseteq Fm$ имеет место импликация

$$\begin{aligned} u \text{ } L\text{-совместимо} &\Rightarrow \forall A \in Fm \\ u \cup \{\llbracket A \rrbracket_u \rightarrow A\} &\text{ } L\text{-совместимо} \end{aligned} \quad (41)$$

Теорема 4. Пусть u_1 и u_2 — L -совместимые множества, такие, что

$$u_1 \leq u_2.$$

Тогда для каждой формулы A

$$\llbracket A \rrbracket_{u_2} \leq \llbracket A \rrbracket_{u_1}. \quad (42)$$

Доказательство. Так как

- множество

$$u_2 \cup \{\llbracket A \rrbracket_{u_2} \rightarrow A\}$$

L -совместимо, и

- $u_1 \cup \{\llbracket A \rrbracket_{u_2} \rightarrow A\} \leq u_2 \cup \{\llbracket A \rrbracket_{u_2} \rightarrow A\}$

то из теоремы 1 следует, что множество

$$u_1 \cup \{\llbracket A \rrbracket_{u_2} \rightarrow A\} \quad (43)$$

L -совместимо.

Из L -совместимости (43) и из определения элемента $\llbracket A \rrbracket_{u_1}$ следует неравенство (42). Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть

- $u \subseteq Fm$ — некоторое L -совместимое множество, и
- A, B — пара формул, таких, что

$$A \rightarrow B \in L \quad (44)$$

Тогда имеет место неравенство

$$\llbracket A \rrbracket_u \leq \llbracket B \rrbracket_u \quad (45)$$

Доказательство. (45) эквивалентно L -совместимости множества

$$u \cup \{\llbracket A \rrbracket_u \rightarrow B\} \quad (46)$$

то есть утверждению о том, что для

- каждого подмножества (31) множества (46), и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как u по предположению L -совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \Rightarrow (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) имеет следующий вид:

- $(a_1 \rightarrow A_1) = (\llbracket A \rrbracket_u \rightarrow B)$
- для каждого $i = 2, \dots, n$

$$a_i \rightarrow A_i \in u \quad (47)$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$B \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \right) \in L \quad (48)$$

Из (44) и (48) следует соотношение

$$A \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \right) \in L \quad (49)$$

которое эквивалентно соотношению

$$\left\{ \begin{array}{c} A \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \in L \quad (50)$$

Так как множество

$$u \cup \{[A]_u \rightarrow A\}$$

является L -совместимым, то из (47) и (50) следует неравенство

$$\left\{ \begin{array}{c} [A]_u \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leq b \quad (51)$$

которое эквивалентно (33) для данного случая. Теорема доказана.

Теорема 6. *Для*

- *каждого L -совместимого множества u , u*
- *каждой формулы $A \in Ft$*

имеет место неравенство:

$$[A]_L \leq [A]_u \quad (52)$$

Доказательство. (52) эквивалентно L -совместимости множества

$$u \cup \{[A]_L \rightarrow A\} \quad (53)$$

то есть утверждению о том, что для

- *каждого подмножества (31) множества (53), и*
- *каждого $b \in \mathcal{B}$*

из (32) следует (33).

Так как u по предположению L -совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \Rightarrow (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) имеет следующий вид:

- $(a_1 \rightarrow A_1) = ([A]_L \rightarrow A)$

- для каждого $i = 2, \dots, n$

$$a_i \rightarrow A_i \in u \quad (54)$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$A \rightarrow \left(\begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right) \rightarrow b \in L \quad (55)$$

Из соотношений

$$\llbracket A \rrbracket_L \rightarrow A \in L$$

и (55) следует соотношение

$$\llbracket A \rrbracket_L \rightarrow \left(\begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right) \rightarrow b \in L \quad (56)$$

Из (56) следует соотношение

$$\left(\begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right) \rightarrow (\llbracket A \rrbracket_L \rightarrow b) \in L \quad (57)$$

Так как u по предположению L -совместимо, то из (54) и (57) следует неравенство

$$\left(\begin{array}{c} a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right) \leq \llbracket A \rrbracket_L \rightarrow b \quad (58)$$

Из (58) следует (33). Теорема доказана.

5. L -полные множества

5.1. Определение L -полного множества

Пусть x — некоторое подмножество множества Fm .

Множество x называется L -полным, если

- x является L -совместимым,
- для каждой формулы $A \in Fm$

$$\llbracket A \rrbracket_x \rightarrow A \in x. \quad (59)$$

5.2. Пополнение L -совместимых множеств

Пусть

- u — некоторое L -совместимое множество, и
- x — некоторое L -полное множество.

x называется **пополнением** u , если

$$u \leq x \tag{60}$$

Теорема 7. Для каждого L -совместимого множества u существует пополнение x .

Доказательство. Пусть последовательность

$$B_1, B_2, \dots \tag{61}$$

есть некоторое перечисление всех формул из Fm .

Определим последовательность

$$u_1, u_2, \dots$$

подмножеств множества Fm следующим образом:

- $u_1 \stackrel{\text{def}}{=} u$,
- для каждого $k \geq 1$

$$u_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} u_k \cup \{[B_k]_{u_k} \rightarrow B_k\}$$

Из данного определения и из утверждения (41) следует, что для каждого $k \geq 1$ верно утверждение:

$$\begin{aligned} &\text{если } u_k \text{ } L\text{-совместимо,} \\ &\text{то } u_{k+1} \text{ тоже } L\text{-совместимо.} \end{aligned} \tag{62}$$

Так как u_1 по предположению L -совместимо, то из (62) следует, что

$$\forall k \geq 1 \quad u_k \text{ } L\text{-совместимо}$$

Определим искомое множество x следующим образом:

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \geq 1} u_k$$

Множество x является L -совместимым, поскольку для каждого его конечного подмножества вида (31) существует номер $k \geq 1$, такой, что данное подмножество содержится в множестве u_k (которое, как было отмечено выше, является L -совместимым).

Докажем, что для каждой формулы $A \in Fm$ верно свойство (59).

По определению последовательности (61), существует номер k , такой, что $A = B_k$.

Поскольку

$$\llbracket B_k \rrbracket_{u_k} \rightarrow B_k \in x$$

то

$$\llbracket B_k \rrbracket_{u_k} \leq \llbracket B_k \rrbracket_x. \tag{63}$$

Поскольку $u_k \subseteq x$, то из теоремы 4 следует, что

$$\llbracket B_k \rrbracket_x \leq \llbracket B_k \rrbracket_{u_k}. \tag{64}$$

Объединяя (63) и (64), получаем равенство

$$\llbracket B_k \rrbracket_x = \llbracket B_k \rrbracket_{u_k}. \tag{65}$$

Следовательно,

$$\llbracket B_k \rrbracket_x \rightarrow B_k = \llbracket B_k \rrbracket_{u_k} \rightarrow B_k \in u_{k+1} \subseteq x. \tag{66}$$

Из (66) вытекает (59) (при $A = B_k$).

Таким образом, множество x является L -полным.

Докажем, что x является пополнением множества u , то есть

$$\forall (a \rightarrow A) \in u \quad a \leq \llbracket A \rrbracket_x.$$

По определению x ,

$$\exists k \geq 1 : A = B_k.$$

Так как

$$(a \rightarrow B_k) \in u \subseteq u_k$$

то

$$u_k \cup \{a \rightarrow B_k\} \quad L\text{-совместимо.} \quad (67)$$

Из (67) и (65) получаем:

$$a \leq \llbracket B_k \rrbracket_{u_k} = \llbracket B_k \rrbracket_x = A_x.$$

Теорема доказана.

6. Свойства L -полных множеств

Теорема 8. Пусть x — L -полное множество, и $a \in \mathcal{B}$. Тогда

$$\llbracket a \rrbracket_x = a. \quad (68)$$

Доказательство. Поскольку x является L -совместимым, то его одноэлементное подмножество $\{\llbracket a \rrbracket_x \rightarrow a\}$ обладает следующим свойством: для каждого $b \in \mathcal{B}$ из соотношения

$$a \rightarrow b \in L \quad (69)$$

следует неравенство

$$\llbracket a \rrbracket_x \leq b \quad (70)$$

Поскольку (69) верно для $b = a$, то (70) тоже должно быть верно для $b = a$, то есть

$$\llbracket a \rrbracket_x \leq a. \quad (71)$$

Для доказательства обратного неравенства докажем L -совместимость множества

$$x \cup \{a \rightarrow a\}. \quad (72)$$

Для этого необходимо доказать, что для

- каждого подмножества (31) множества (72), и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как x по предположению L -совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \Rightarrow (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) удовлетворяет следующим условиям:

$$(a_1 \rightarrow A_1) = (a \rightarrow a)$$

$$\forall i = 2, \dots, n \quad a_i \rightarrow A_i \in x \tag{73}$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \in L \tag{74}$$

а (33) эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leq b \tag{75}$$

(74) эквивалентно соотношению

$$\left\{ \begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow (a \rightarrow b) \in L \tag{76}$$

Из (76) и из L -совместимости x следует неравенство

$$\left\{ \begin{array}{c} a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leq a \rightarrow b \tag{77}$$

(75) следует из (77). Теорема доказана.

Во всех нижеследующих рассуждениях мы будем предполагать, что шкала \mathcal{B} обладает следующим свойством:

$$\forall a \in \mathcal{B} \quad (a \rightarrow 0) \rightarrow 0 = a. \quad (78)$$

Нетрудно доказать, что данное свойство эквивалентно тому, что \mathcal{B} является булевой алгеброй, операции в которой определяются следующим образом: для всех $a, b \in \mathcal{B}$

$$a \wedge b \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{a, b\}, \quad a \vee b \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{a, b\}, \quad \neg a \stackrel{\text{def}}{=} a \rightarrow 0.$$

Теорема 9. *Для*

- *каждого L -полного множества x , и*
- *каждой пары формул A, B*

имеет место равенство

$$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket B \rrbracket_x. \quad (79)$$

Доказательство. Для доказательства равенства (79) достаточно доказать неравенства

$$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket_x \leq \llbracket A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket B \rrbracket_x \quad (80)$$

и

$$\llbracket A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket B \rrbracket_x \leq \llbracket A \rightarrow B \rrbracket_x \quad (81)$$

Докажем неравенство (80). Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket A \rightarrow B \rrbracket_x \\ \llbracket A \rrbracket_x \end{array} \right\} \leq \llbracket B \rrbracket_x \quad (82)$$

Неравенство (82) эквивалентно L -совместимости множества

$$x \cup \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \llbracket A \rightarrow B \rrbracket_x \\ \llbracket A \rrbracket_x \end{array} \right\} \rightarrow B \right\} \quad (83)$$

то есть утверждению о том, что для

- *каждого подмножества (31) множества (83), и*

- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как x по предположению L -совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \Rightarrow (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) имеет следующий вид:

- $a_1 \rightarrow A_1 = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket A \rightarrow B \rrbracket_x \\ \llbracket A \rrbracket_x \end{array} \right\} \rightarrow B$
- для каждого $i = 2, \dots, n$

$$a_i \rightarrow A_i \in x \tag{84}$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$B \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \right) \in L \tag{85}$$

а (33) эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \llbracket A \rightarrow B \rrbracket_x \\ \llbracket A \rrbracket_x \end{array} \right\} \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leq b \tag{86}$$

Поскольку формула

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ A \rightarrow B \end{array} \right\} \rightarrow B$$

является тавтологией, то

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ A \rightarrow B \end{array} \right\} \rightarrow B \in L \tag{87}$$

Из (85) и (87) следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ A \rightarrow B \end{array} \right\} \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \right) \in L \quad (88)$$

Соотношение (88) эквивалентно соотношению

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ A \rightarrow B \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \in L \quad (89)$$

Поскольку множество x по предположению является L -полным, то

$$\llbracket A \rrbracket_x \rightarrow A \in x \quad (90)$$

и

$$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket_x \rightarrow (A \rightarrow B) \in x \quad (91)$$

Из (89), (90), (91), (84) и свойства L -совместимости множества x вытекает требуемое неравенство (86).

Теперь докажем неравенство (81). Данное неравенство эквивалентно L -совместимости множества

$$x \cup \{(\llbracket A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket B \rrbracket_x) \rightarrow (A \rightarrow B)\} \quad (92)$$

то есть утверждению о том, что для

- каждого подмножества (31) множества (92), и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Так как x по предположению L -совместимо, то для доказательства импликации

$$(32) \Rightarrow (33)$$

достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда (31) имеет следующий вид:

- $a_1 \rightarrow A_1 = ([A]_x \rightarrow [B]_x) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- для каждого $i = 2, \dots, n$

$$a_i \rightarrow A_i \in x \tag{93}$$

В этом случае (32) эквивалентно соотношению

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \left(\begin{matrix} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{matrix} \right) \rightarrow b \in L \tag{94}$$

а (33) эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{matrix} [A]_x \rightarrow [B]_x \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{matrix} \right\} \leq b \tag{95}$$

Для доказательства неравенства (95) достаточно доказать эквивалентное ему неравенство

$$\left\{ \begin{matrix} b \rightarrow 0 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{matrix} \right\} \leq \left\{ \begin{matrix} [A]_x \\ [B]_x \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \tag{96}$$

Для того, чтобы доказать неравенство (96), достаточно доказать пару неравенств:

$$\left\{ \begin{matrix} b \rightarrow 0 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{matrix} \right\} \leq [A]_x \tag{97}$$

и

$$\left\{ \begin{matrix} b \rightarrow 0 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{matrix} \right\} \leq [B]_x \rightarrow 0 \tag{98}$$

Докажем неравенство (97). Данное неравенство эквивалентно L -совместимости множества

$$x \cup \left\{ \begin{array}{l} b \rightarrow 0 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \rightarrow A \quad (99)$$

то есть утверждению о том, что для

- каждого конечного подмножества множества (99) вида

$$\{c_1 \rightarrow C_1, \dots, c_m \rightarrow C_m\}$$

такого, что

$$c_1 \rightarrow C_1 = \left\{ \begin{array}{l} b \rightarrow 0 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \rightarrow A$$

$$\forall i = 2, \dots, m \quad c_i \rightarrow C_i \in x \quad (100)$$

и

- каждого $d \in \mathcal{B}$

из соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ C_2 \\ \dots \\ C_m \end{array} \right\} \rightarrow d \in L \quad (101)$$

следует неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} b \rightarrow 0 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right) \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{array} \right\} \leq d \quad (102)$$

Для доказательства неравенства (102) достаточно доказать эквивалентное ему неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 \wedge \dots \wedge a_n \\ c_2 \wedge \dots \wedge c_m \end{array} \right\} \leq (b \rightarrow 0) \rightarrow d \quad (103)$$

Из соотношения (101) вытекает соотношение

$$A \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} C_2 \\ \dots \\ C_m \end{array} \right\} \rightarrow d \right) \in L,$$

из которого следует соотношению

$$\left(\left(\left\{ \begin{array}{l} C_2 \\ \dots \\ C_m \end{array} \right\} \rightarrow d \right) \rightarrow B \right) \rightarrow (A \rightarrow B) \in L \quad (104)$$

Из (104) и (94) следует соотношение

$$\left(\left(\left\{ \begin{array}{l} C_2 \\ \dots \\ C_m \end{array} \right\} \rightarrow d \right) \rightarrow B \right) \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \right) \in L \quad (105)$$

Поскольку формула

$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} C_2 \\ \dots \\ C_m \end{array} \right\} \right\} \rightarrow \left(\left(\left\{ \begin{array}{l} C_2 \\ \dots \\ C_m \end{array} \right\} \rightarrow d \right) \rightarrow B \right)$$

является тавтологией, то она принадлежит L . Отсюда и из (105) следует соотношение

$$\left\{ \begin{array}{l} d \rightarrow B \\ A_2 \wedge \dots \wedge A_n \\ C_2 \wedge \dots \wedge C_m \end{array} \right\} \rightarrow b \in L \quad (106)$$

Из (106), (93), (100) и из L -совместимости множества x вытекает неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket d \rightarrow B \rrbracket_x \\ a_2 \wedge \dots \wedge a_n \\ c_2 \wedge \dots \wedge c_m \end{array} \right\} \leq b$$

которое эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 \wedge \dots \wedge a_n \\ c_2 \wedge \dots \wedge c_m \end{array} \right\} \leq \llbracket d \rightarrow B \rrbracket_x \rightarrow b \quad (107)$$

Докажем, что имеет место неравенство

$$\llbracket d \rightarrow B \rrbracket_x \rightarrow b \leq (b \rightarrow 0) \rightarrow d \quad (108)$$

(108) эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket d \rightarrow B \rrbracket_x \rightarrow b \\ b \rightarrow 0 \end{array} \right\} \leq d \quad (109)$$

Так как имеет место неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket d \rightarrow B \rrbracket_x \rightarrow b \\ b \rightarrow 0 \end{array} \right\} \leq \llbracket d \rightarrow B \rrbracket_x \rightarrow 0$$

то для доказательства (109) достаточно доказать неравенство

$$\llbracket d \rightarrow B \rrbracket_x \rightarrow 0 \leq d \quad (110)$$

(110) эквивалентно неравенству

$$d \rightarrow 0 \leq \llbracket d \rightarrow B \rrbracket_x \quad (111)$$

Докажем неравенство (111). Поскольку формула

$$(d \rightarrow 0) \rightarrow (d \rightarrow B)$$

является тавтологией, то, следовательно,

$$(d \rightarrow 0) \rightarrow (d \rightarrow B) \in L \quad (112)$$

Из (112) и из теоремы 5 следует неравенство

$$\llbracket d \rightarrow 0 \rrbracket_x \leq \llbracket d \rightarrow B \rrbracket_x \quad (113)$$

Из (113) и из теоремы 8 следует неравенство (111).

Из истинности неравенства (111) следует истинность неравенства (108), а из истинности неравенств (107) и (108) следует истинность неравенства (103).

Таким образом, L -совместимость множества (99) установлена, и, следовательно, неравенство (97) доказано.

Теперь докажем неравенство (98). Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{c} \llbracket B \rrbracket_x \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right\} \leq b \tag{114}$$

(114) имеет место потому, что

1) из (94) и из соотношения

$$B \rightarrow (A \rightarrow B) \in L$$

следует соотношение

$$B \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \right) \in L,$$

которое эквивалентно соотношению

$$\left\{ \begin{array}{c} B \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \in L,$$

2) $\{(\llbracket B \rrbracket_x \rightarrow B), (a_2 \rightarrow A_2), \dots, (a_n \rightarrow A_n)\} \subseteq x$, и

3) x является L -совместимым.

Теорема доказана.

Теорема 10. Пусть

- x — некоторое L -полное множество, и
- A, B — пара формул.

Тогда имеет место равенство

$$\llbracket A \wedge B \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x \wedge \llbracket B \rrbracket_x \quad (115)$$

Доказательство. Для доказательства равенства (115) достаточно доказать неравенства

$$\llbracket A \wedge B \rrbracket_x \leq \llbracket A \rrbracket_x, \quad \llbracket A \wedge B \rrbracket_x \leq \llbracket B \rrbracket_x, \quad (116)$$

и

$$\llbracket A \rrbracket_x \wedge \llbracket B \rrbracket_x \leq \llbracket A \wedge B \rrbracket_x \quad (117)$$

Неравенства (116) следуют из соотношений

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \rightarrow A &\in L \\ (A \wedge B) \rightarrow B &\in L \end{aligned}$$

и из теоремы 5.

Неравенство (117) следует из L -совместимости множества

$$x \cup \{(\llbracket A \rrbracket_x \wedge \llbracket B \rrbracket_x) \rightarrow (A \wedge B)\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 11. Пусть

- x — некоторое L -полное множество, и
- A, B — пара формул.

Тогда имеет место равенство

$$\llbracket A \vee B \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x \vee \llbracket B \rrbracket_x. \quad (118)$$

Доказательство. Равенство (118) эквивалентно равенству

$$(\llbracket A \rrbracket_x \vee \llbracket B \rrbracket_x) \rightarrow 0 = \llbracket A \vee B \rrbracket_x \rightarrow 0 \quad (119)$$

(119) вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (\llbracket A \rrbracket_x \vee \llbracket B \rrbracket_x) \rightarrow 0 &= \left\{ \begin{array}{l} \llbracket A \rrbracket_x \rightarrow 0 \\ \llbracket B \rrbracket_x \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket 0 \rrbracket_x \\ \llbracket B \rrbracket_x \rightarrow \llbracket 0 \rrbracket_x \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \llbracket A \rightarrow 0 \rrbracket_x \\ \llbracket B \rightarrow 0 \rrbracket_x \end{array} \right\} = \llbracket \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow 0 \\ B \rightarrow 0 \end{array} \right\} \rrbracket_x = \llbracket (A \vee B) \rightarrow 0 \rrbracket_x = \\ &= \llbracket A \vee B \rrbracket_x \rightarrow \llbracket 0 \rrbracket_x = \llbracket A \vee B \rrbracket_x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 12. Пусть x — некоторое L -полное множество.

Для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого элемента $a \in \mathcal{B}$ имеет место неравенство

$$\llbracket \Box_a A \rrbracket_x \leq a. \quad (120)$$

Доказательство. Из (6) следует соотношение

$$(a \rightarrow 0) \rightarrow (\Box_a A \rightarrow 0) \in L \quad (121)$$

из которого, согласно теоремам 5 и 8, следует неравенство

$$a \rightarrow 0 \leq \llbracket \Box_a A \rightarrow 0 \rrbracket_x \quad (122)$$

Поскольку, согласно теоремам 9 и 8,

$$\llbracket \Box_a A \rightarrow 0 \rrbracket_x = \llbracket \Box_a A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket 0 \rrbracket_x = \llbracket \Box_a A \rrbracket_x \rightarrow 0 \quad (123)$$

то из (122) и (123) следует неравенство

$$a \rightarrow 0 \leq \llbracket \Box_a A \rrbracket_x \rightarrow 0, \quad (124)$$

которое эквивалентно (120). Теорема доказана.

7. Канонические модели

7.1. Определение канонической модели

Канонической моделью логики L называется модель

$$M_L \stackrel{\text{def}}{=} (W_L, \{(R_L)_a \mid a \in \mathcal{B}\}, \xi_L)$$

компоненты которой определяются следующим образом:

- W_L состоит из всех L -полных множеств.

Для каждой пары $x, y \in W_L$

$$W_L(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{A \in Fm} (\llbracket A \rrbracket_x \leftrightarrow \llbracket A \rrbracket_y) \quad (125)$$

Заметим, что из данного определения вытекает соотношение

$$\forall x \in W_L \quad W_L(x) = 1. \quad (126)$$

Нетрудно доказать, что определение W_L удовлетворяет условиям (14) и (15).

- Для каждого $a \in \mathcal{B}$ символ $(R_L)_a$ обозначает нечёткое бинарное отношение на W_L

$$(R_L)_a : W_L \times W_L \rightarrow \mathcal{B}$$

определяемое следующим образом:

$$(R_L)_a(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{A \in F_m} (\llbracket \Box_a A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket A \rrbracket_y) \quad (127)$$

Нетрудно доказать, что определение $(R_L)_a$ удовлетворяет условиям (16) и (17).

- ξ_L — это отображение вида

$$\xi_L : PV \rightarrow \text{Sub}(W_L)$$

где для каждого $p \in PV$ нечёткое подмножество

$$\xi_L(p) : W_L \rightarrow \mathcal{B}$$

определяется следующим образом:

$$\forall x \in W_L \quad \xi_L(p)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket p \rrbracket_x. \quad (128)$$

Нетрудно доказать, что для каждого $p \in PV$ отображение $\xi_L(p)$ удовлетворяет условиям (18) и (19).

7.2. Основное свойство канонических моделей

Теорема 13. Для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого $x \in W_L$

$$\llbracket A \rrbracket(x) = \llbracket A \rrbracket_x \quad (129)$$

Доказательство. Докажем данную теорему индукцией по структуре формулы A .

$$A = p \in PV$$

В этом случае равенство (129) следует из (128).

$$A = a \in \mathcal{B}$$

Из (23), (126) и (68) следуют соотношения

$$\llbracket a \rrbracket(x) = \left\{ \begin{array}{c} a \\ W_L(x) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} a \\ 1 \end{array} \right\} = a = \llbracket a \rrbracket_x$$

$$A = B \wedge C, A = B \vee C, A = B \rightarrow C$$

По индуктивному предположению,

$$\forall x \in W_L \quad \llbracket B \rrbracket(x) = \llbracket B \rrbracket_x, \quad \llbracket C \rrbracket(x) = \llbracket C \rrbracket_x.$$

Согласно теореме 10, из L -полноты множества x следует соотношение

$$\llbracket B \rrbracket_x \wedge \llbracket C \rrbracket_x = \llbracket B \wedge C \rrbracket_x.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \llbracket A \rrbracket(x) &= \llbracket B \wedge C \rrbracket(x) \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket B \rrbracket(x) \wedge \llbracket C \rrbracket(x) = \\ &= \llbracket B \rrbracket_x \wedge \llbracket C \rrbracket_x = \llbracket B \wedge C \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x. \end{aligned}$$

Случаи $A = B \vee C$ и $A = B \rightarrow C$ разбираются аналогично.

$$A = \Box_a B$$

По индуктивному предположению,

$$\forall y \in W_L \quad \llbracket B \rrbracket(y) = \llbracket B \rrbracket_y. \quad (130)$$

Докажем, что элемент

$$\llbracket \Box_a B \rrbracket(x) \quad (131)$$

совпадает с элементом

$$\llbracket \Box_a B \rrbracket_x. \quad (132)$$

Из (130), (126), и (27) следует, что элемент (131) совпадает с элементом

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ \inf_{y \in W_L} ((R_L)_a(x, y) \rightarrow \llbracket B \rrbracket_y) \end{array} \right\}. \quad (133)$$

Для доказательства равенства (132) = (133) мы докажем, что

- (132) \leq (133), и
- (132) \geq (133).

Неравенство (132) \leq (133) следует из (120) и из неравенства

$$\llbracket \Box_a B \rrbracket_x \leq \inf_{y \in W_L} ((R_L)_a(x, y) \rightarrow \llbracket B \rrbracket_y) \quad (134)$$

Для доказательства неравенства (134) достаточно доказать, что для каждого $y \in W_L$

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_L)_a(x, y) \\ \llbracket \Box_a B \rrbracket_x \end{array} \right\} \leq \llbracket B \rrbracket_y \quad (135)$$

Неравенство (135) следует из соотношения (127).

Теперь докажем неравенство (132) \geq (133). Для доказательства данного неравенства будет достаточно построить элемент $y \in W_L$, такой, что

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ (R_L)_a(x, y) \rightarrow \llbracket B \rrbracket_y \end{array} \right\} \leq \llbracket \Box_a B \rrbracket_x \quad (136)$$

Обозначим символом u множество, состоящее из всех формул вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket \Box_a A \rrbracket_x \\ \llbracket \Box_a B \rrbracket_x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \rightarrow A \quad (137)$$

а также из формулы

$$(\llbracket \Box_a B \rrbracket_x \rightarrow 0) \rightarrow (B \rightarrow 0) \quad (138)$$

Лемма 1. *Множество u является L -совместимым.*

Доказательство. Докажем, что для

- каждого конечного подмножества (31) множества u , и
- каждого $b \in \mathcal{B}$

из (32) следует (33).

Сначала рассмотрим случай, когда

$$(138) \in (31).$$

Пусть (31) имеет следующий вид:

- $a_1 \rightarrow A_1 = (138)$

- для каждого $i = 2, \dots, n$

$$a_i = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket \Box_a A_i \rrbracket_x \\ \llbracket \Box_a B \rrbracket_x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (139)$$

В этом случае (32) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow 0 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \in L \quad (140)$$

Из (140) вытекают соотношения

$$(b \rightarrow 0) \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow 0 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow 0 \right) \in L \quad \Rightarrow$$

$$(b \rightarrow 0) \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow B \right) \in L \quad \Rightarrow$$

$$(b \rightarrow 0) \rightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} \Box_a A_2 \\ \dots \\ \Box_a A_n \end{array} \right\} \rightarrow \Box_a B \right) \in L \quad \Rightarrow$$

$$b \rightarrow 0 \leq \left\{ \begin{array}{l} \llbracket \Box_a A_2 \rrbracket_x \\ \dots \\ \llbracket \Box_a A_n \rrbracket_x \end{array} \right\} \rightarrow \llbracket \Box_a B \rrbracket_x$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\{ \begin{array}{l} b \rightarrow 0 \\ \llbracket \Box_a A_2 \rrbracket_x \\ \dots \\ \llbracket \Box_a A_n \rrbracket_x \end{array} \right\} \leq \llbracket \Box_a B \rrbracket_x. \quad (141)$$

Из (141) следует неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket \Box_a B \rrbracket_x \rightarrow 0 \\ \llbracket \Box_a A_2 \rrbracket_x \\ \dots \\ \llbracket \Box_a A_n \rrbracket_x \end{array} \right\} \leq b. \quad (142)$$

Неравенство (142) эквивалентно искомому неравенству (33) для данного случая.

Теперь рассмотрим случай, когда (138) $\not\in$ (31).

Так как формула

$$\left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow 0 \\ A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\}$$

является тавтологией, то из (32) следует соотношение

$$\left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow 0 \\ A_1 \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} \rightarrow b \in L \quad (143)$$

Как уже было показано выше в данном доказательстве, из последнего соотношения вытекает неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket \Box_a B \rrbracket_x \rightarrow 0 \\ \llbracket \Box_a A_1 \rrbracket_x \\ \dots \\ \llbracket \Box_a A_n \rrbracket_x \end{array} \right\} \leq b. \quad (144)$$

Неравенство (144) эквивалентно искомому неравенству (33) для данного случая. Лемма доказана.

Пусть символ y обозначает L -пополнение множества u .

Из определения множеств u и y следует, что

$$\llbracket \Box_a B \rrbracket_x \rightarrow 0 \leq \llbracket B \rightarrow 0 \rrbracket_y = \llbracket B \rrbracket_y \rightarrow 0 \quad (145)$$

и для каждой формулы $A \in Fm$

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket \Box_a A \rrbracket_x \\ \llbracket \Box_a B \rrbracket_x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \leq \llbracket A \rrbracket_y. \quad (146)$$

Из (145) следует неравенство

$$\llbracket B \rrbracket_y \leq \llbracket \Box_a B \rrbracket_x. \quad (147)$$

Из (146) следует, что $\forall A \in Fm$

$$\llbracket \Box_a B \rrbracket_x \rightarrow 0 \leq \llbracket \Box_a A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket A \rrbracket_y \quad (148)$$

Из (148) и (127) следует неравенство

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ \llbracket \Box_a B \rrbracket_x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \leq (R_L)_a(x, y). \quad (149)$$

Искомое неравенство (136) следует из (147), (149), и из неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ \left\{ \begin{array}{l} a \\ c \rightarrow 0 \end{array} \right\} \rightarrow c \end{array} \right\} \leq c \quad (150)$$

где $c \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket \Box_a B \rrbracket_x$.

Докажем неравенство (150). Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$c \rightarrow 0 \leq \left\{ \begin{array}{l} a \\ \left\{ \begin{array}{l} a \\ c \rightarrow 0 \end{array} \right\} \rightarrow c \end{array} \right\} \rightarrow 0, \quad (151)$$

то есть

$$\left\{ \begin{array}{l} c \rightarrow 0 \\ a \\ \left\{ \begin{array}{l} a \\ c \rightarrow 0 \end{array} \right\} \rightarrow c \end{array} \right\} \leq 0, \quad (152)$$

которое, очевидно, истинно. Теорема доказана.

8. Полнота логики FK

Теорема 14. *Для каждой формулы $A \in Ft$ следующие условия эквивалентны:*

$$A \in FK \quad (153)$$

$$A \text{ истинна в каждой модели.} \quad (154)$$

Доказательство. Импликация

$$(153) \Rightarrow (154)$$

была обоснована в параграфе 3.4.

Докажем, что если $A \notin FK$, то A не является истинной в некоторой точке канонической модели логики FK .

Лемма 2. *Множество*

$$\{([A]_{FK} \rightarrow 0) \rightarrow (A \rightarrow 0)\} \quad (155)$$

является FK -совместимым.

Доказательство. Докажем, что для каждого $b \in \mathcal{B}$ из соотношения

$$(A \rightarrow 0) \rightarrow b \in FK \quad (156)$$

следует неравенство

$$[A]_{FK} \rightarrow 0 \leq b \quad (157)$$

Из (156) следуют соотношения

$$(b \rightarrow 0) \rightarrow A \in FK \Rightarrow$$

$$b \rightarrow 0 \leq [A]_{FK} \Rightarrow$$

$$[A]_{FK} \rightarrow 0 \leq b.$$

Таким образом, множество (155) FK -совместимо. Лемма доказана.

Согласно теореме 7, из FK -совместимости множества (155) следует, что

$$\exists x \in W_{FK} : [A]_{FK} \rightarrow 0 \leq [A \rightarrow 0]_x \quad (158)$$

Так как множество x является FK -полным, то согласно теореме 9 из (158) следует, что

$$\llbracket A \rightarrow 0 \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x \rightarrow \llbracket 0 \rrbracket_x = \llbracket A \rrbracket_x \rightarrow 0 \quad (159)$$

Из (129), (158) и (159) вытекает соотношение

$$\llbracket A \rrbracket_{FK} \rightarrow 0 \leq \llbracket A \rrbracket(x) \rightarrow 0 \quad (160)$$

которое эквивалентно соотношению

$$\llbracket A \rrbracket(x) \leq \llbracket A \rrbracket_{FK} \quad (161)$$

Докажем, что формула A не является истинной в точке x .

Если A истинна в x , то из (28) и (126) следует что

$$\llbracket A \rrbracket(x) = 1 \quad (162)$$

Из (161) и (162) следует равенство $\llbracket A \rrbracket_{FK} = 1$, из которого вытекает соотношение $A \in FK$, которое противоречит предположению о том, что $A \notin FK$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Goldblatt R. Topoi. The categorial analysis of logic // Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. Vol. 98. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979.
- [2] Clarke E. M., Grumberg O., Peled D. Model Checking. MIT Press, 1999.
- [3] Bendová K., Hájek P. Possibilistic logic as a tense logic // Proceedings of QUARDET'93. Barcelona, 1993.
- [4] Boutilier C. Modal logics for qualitative possibility and beliefs // Uncertainty in Artificial Intelligence VIII / D. Dubois et al., eds. Morgan Kaufmann, 1992. 17–24.
- [5] Dubois D., Lang J., Prade H. Possibilistic logic // Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Vol. 3: Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning / D. M. Gabbay, C. J. Hogger, J. A. Robinson, eds. Oxford U. P., 1994. 439–513.

- [6] Farinas del Cerro L., Herzig A. A modal analysis of possibility theory // Symbolic and Qualitative Approaches to Uncertainty. Lecture Notes in Comput. Sci. 548 / R. Kruse, P. Siegel, eds. Springer-Verlag, 1991. 58–62.
- [7] Fitting M. Many-valued modal logics // Fund. Inform. 15. 1992. 235–254.
- [8] Fitting M. Many-valued modal logics II // Fund. Inform. 17. 1992. 55–73.
- [9] Godo L., Lopez de Mantaras R. Fuzzy logic // Encyclopaedia of Computer Science. 1993.
- [10] Hájek P. On logics of approximate reasoning // Neural Network Word. 6. 1993. 733–744.
- [11] Hájek P., Harmancová D. A comparative fuzzy modal logic // Fuzzy Logic in Artificial Intelligence / E. P. Klement, W. Slany, eds. Springer-Verlag, 1993. 27–34.
- [12] Hájek P., Harmancová D., Esteva F., Garcia P., Godo L. On modal logics for qualitative possibility in a fuzzy setting // Uncertainty in Artificial Intelligence: Proceedings of the Tenth Conference / R. Lopez de Mantaras, D. Poole, eds. Seattle, WA, 1994.
- [13] Hájek P., Harmancová D., Verbrugge R. A qualitative fuzzy possibilistic logic // International Journal of Approximate Reasoning. 12. North-Holland, 1995. 1–19.
- [14] Ostermann P. Many-valued modal propositional calculi // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 34. 1988. 343–354.