Об одной модели функционирования лёгких

Ю. Г. Гераськина

Лёгкие живых систем при огрублённом подходе могут рассматриваться как древовидная структура бронхов, в которых имеются реснички, играющие роль эскалаторного механизма вывода как внутреннего секрета, так и поступающего извне в лёгкие вещества во внешнюю среду. Бронхи имеют разные пропускные способности и разную эффективность ресничек. Чем выше от альвеол, то есть самых мелких бронхов, тем мощнее механизм передачи вещества изнутри вовне.

Схематически будем представлять лёгкие следующим образом (рис. 1).

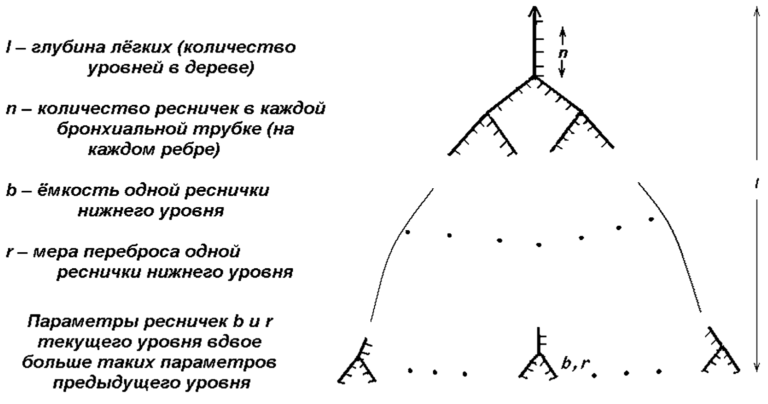

Рис. 1.

Возникает задача построения модели лёгочного механизма самоочищения как в случае чистой среды, так и в условиях возможной её запыленности.

Процесс самоочищения лёгких реализуется специальным механизмом (рис. 2). В процессе дыхания происходят два события — каждая ресничка лёгких получает массу вещества извне (вдох) и каждая ресничка лёгких перебрасывает массу вещества (или её часть), которую она имеет на соседнюю верхнюю ресничку только в том случае, если верхняя ресничка пустая (выдох).

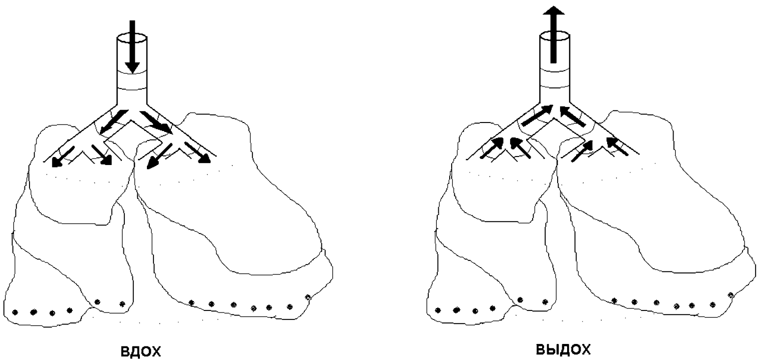

Рис. 2.

В этой связи возникают три основных проблемы для процесса самоочищения лёгких.

Первая проблема — исследование здоровых лёгких в чистой среде.

Вторая проблема — исследование здоровых лёгких в загрязнённой среде.

Третья проблема — исследование процесса самоочистки для патологических лёгких в обеих средах.

Первая проблема заключается в нахождении максимально достаточного числа выдохов $L(b, r, n, l, V')$, за которое лёгкие полностью очистятся при заданной начальной мере их запыления V' в условиях нахождения лёгких в чистой среде.

Решение этой проблемы распалось на 5 случаев a), b), c), d) и e) из-за вариации некоторых параметров лёгких. В каждом случае было найдено своё максимально достаточное количество выдохов для самоочищения лёгких, которое зависит от параметров лёгких и исходной меры их запылённости.

Рассмотрим эти случаи более подробно.

а) Пусть для меры переброса r ресничек нижнего уровня выполнено $r = 1$ и объём загрузки лёгких меньше или равен объёму одной бронхиальной трубки (ребра лёгочного дерева) нижнего уровня.

Этот случай содержит все варианты распределения вещества этого объёма в лёгких.

Среди всех вариантов таких распределений вариант распределения вещества на рис. 3 имеет максимальное число выдохов для полного самоочищения лёгких.

При указанном распределении вещества число выдохов определяется формулой

$$L(b,1,n,l,V') = \begin{cases} V' + b(n-1), & \text{если } l = 1 \text{ и } n = \left]\frac{V'}{b}\right[, \\ 2V' - \left]\frac{V'}{b}\right[+ nl - 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

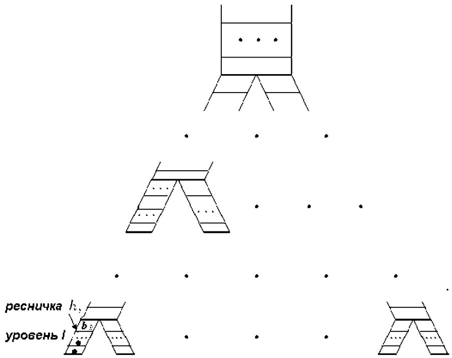

Рис. 3.

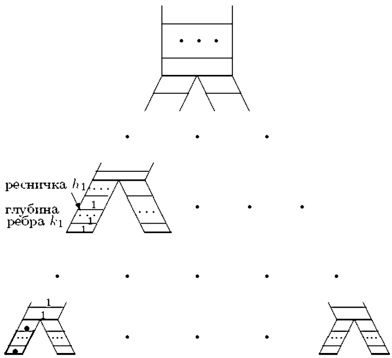

Рис. 4.

b) Пусть $r = 1$ и объём загрузки лёгких больше объёма одной бронхиальной трубки нижнего уровня, но меньше или равен объёму одного пути в лёгких, идущего от брохниальной трубки нижнего уровня до трахеи (ребра дерева, инцедентного корню), нагруженного таким образом, что реснички нижней бронхиальной трубки имеют максимальные нагрузки, а остальные реснички в этом пути имеют единичную нагрузку.

Этот случай содержит все варианты распределения вещества этого объёма в лёгких.

Среди всех вариантов таких распределений вариант распределения вещества на рис. 4 имеет максимальное число выдохов для полного самоочищения лёгких.

При указанном распределении вещества число выдохов определяется формулой

$$L(b, 1, n, l, V') = V' + n(l + b - 1) - 1.$$

c) Этот случай имеет два подслучая c' и c'', но для обоих подслучаев имеет место одно и то же «худшее» распределение.

c') Пусть $r = 1$ и объём загрузки лёгких больше объёма одного пути в лёгких, идущего от брохниальной трубки нижнего уровня до трахеи, нагруженного таким образом, что реснички нижней бронхиальной трубки имеют максимальные нагрузки, а остальные реснички в этом пути имеют единичную нагрузку, но меньше объёма полностью загруженного указанного пути.

Этот подслучай содержит все варианты распределения вещества этого объёма в лёгких.

c'') Пусть $r > 1$ и объём загрузки лёгких больше объёма одного пути в лёгких, идущего от брохниальной трубки нижнего уровня до трахеи, нагруженного таким образом, что все реснички этого пути имеют единичные нагрузки.

Этот подслучай содержит все варианты распределения вещества этого объёма в лёгких.

Среди всех вариантов таких распределений в подслучаях c' и c'' вариант распределения вещества на рис. 5 имеет максимальное число выдохов для полного самоочищения легких.

Для подслучаев c' и c'' число выдохов определяется формулой

$$L(b, r, n, l, V') = \begin{cases} \left]\frac{b_{h_3}}{2^{l-1}}\right[+ 2b(nl - 1), \text{ если } k_3 = 1 \text{ и } h_3 = 1, \\ 2\left(\left]\frac{b_{h_3}}{2^{l-k_3}}\right[+ (b-1)(n(l - k_3 + 1) - h_3) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + nl - \frac{3}{2}\right), \text{ иначе,} \end{cases}$$

где

$$k_3 = 1 + \left[l - \log_2\left(\frac{V' - nl}{(b-1)n} + 1\right)\right],$$

$$h_3 = n - \left] \frac{V' - nl - (2^{l-k_3} - 1)(b-1)n}{2^{l-k_3}(b-1)} \right[+ 1,$$

$$b_{h_3} = V' - nl - (2^{l-k_3} - 1)(b-1)n - 2^{l-k_3}(b-1)(n - h_3) + 1.$$

d) Пусть $r > 1$ и объём загрузки лёгких меньше или равен объёму одного пути в лёгких, идущего от брохниальной трубки нижнего уровня до трахеи, нагруженного таким образом, что все реснички этого пути имеют единичные нагрузки.

Этот случай содержит все варианты распределения вещества этого объёма в лёгких.

Среди всех вариантов таких распределений вариант распределения вещества на рис. 6 имеет максимальное число выдохов для полного самоочищения легких.

При указанном распределении вещества число выдохов определяется формулой

$$L(b, r, n, l, V') = V' + nl - 1.$$

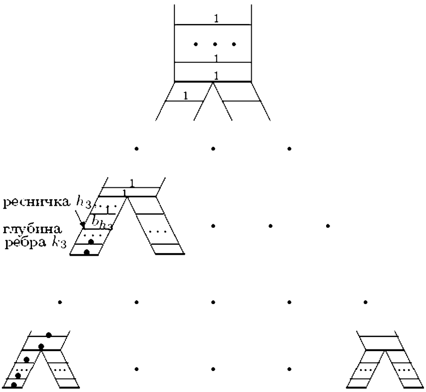

Рис. 5.

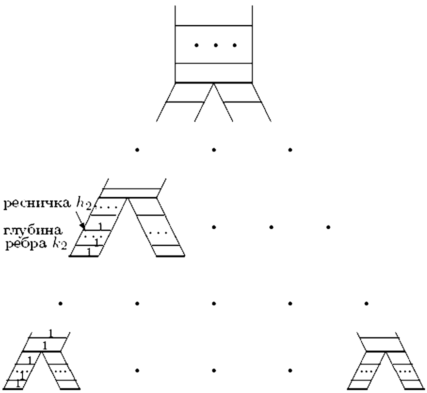

Рис. 6.

e) Этот случай содержит все варианты распределения вещества в лёгких, объем которого больше или равен объёму одного пути в лёгких, идущего от брохниальной трубки нижнего уровня до трахеи, нагруженного таким образом, что все реснички этого пути имеют максимальные нагрузки.

Среди всех вариантов таких распределений варианты распределения вещества на рис. 7 имеют максимальное число выдохов для полного самоочищения легких. То есть это все такие распределения вещества, которые содержат путь от брохниальной трубки нижнего уровня до трахеи, реснички в котором максимально загружены.

При указанных распределениях вещества число выдохов определяется формулой

$$L(b,r,n,l,V') = \left]\frac{b}{r}\right[\,(2nl-1).$$

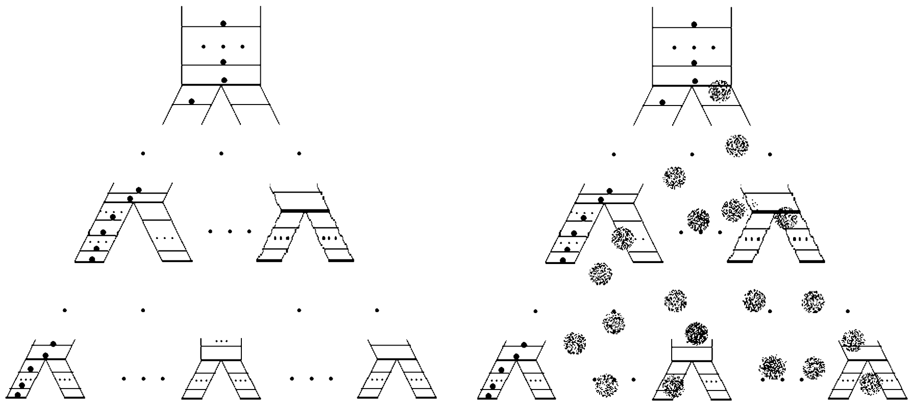

Рис. 7.

Вторая проблема заключается в следующем. Лёгкие функционируют дискретно уже в загрязнённой среде и задана допустимая мера их запыления. В каждый момент времени t в лёгкие поступает некоторая масса вещества $a(t)$ извне (вдох), затем из лёгких выбрасывается некоторая масса вещества $b(t)$ (выдох) и в них остаётся некоторая масса вещества $c(t)$.

Таким образом, вторая проблема заключается в описании всех таких последовательностей «вдохов» $a(1)a(2)\dots a(t)\dots a(m)$ (слов), что в каждый момент времени находящаяся в лёгких после вдоха и выдоха масса вещества не превышает предельно допустимого порога их запыления δV.

Пусть A^m — множество всех слов $\alpha^m = a(1)a(2)\dots a(m)$, где $a(t) \in \mathbb{N}_V \cup \{0\}$ при $t = 1, 2, \dots m$, на котором вводим отношение частичного порядка $\leqslant$, полагая $\alpha^m \leqslant \alpha'^m$, если $a(t) \leqslant a'(t)$ для всех $t = 1, 2, \dots, m$.

Для лёгких (дерева) с параметрами b, r, n, l и исходным объёмом их запылённости V' слово α^m из A^m назовем *допустимым*, если при подаче на дерево буквы $a(t)$ из α^m в каждый момент времени t выполнено $a(t)+V(t) \leqslant \delta V$, где $V(t)$ — объем загруженности этого дерева в момент t, $t = 1, 2, \dots, m$. Такое слово называется *предельно допустимым* для этого дерева, если не существует допустимого слова α'^m из A^m такого, что $\alpha'^m \geqslant \alpha^m$ и $\alpha'^m \neq \alpha^m$.

Пусть $A^* = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A^m$, а A^ω — множество всех сверхслов (то есть слов бесконечной длины) $\alpha^\omega = a(1)a(2)\dots a(t)\dots$, где $a(t) \in \mathbb{N}_0$, на котором вводим отношение частичного порядка $\leqslant$, полагая $\alpha^\omega \leqslant \alpha'^\omega$, если $a(t) \leqslant a'(t)$ для всех t из $\mathbb{N}$.

Для дерева с параметрами b, r, n, l и исходным объёмом его загруженности V' сверхслово α^ω из A^ω назовем *допустимым*, если при подаче на него буквы $a(t)$ из α^ω в каждый момент времени t всегда выполнено $a(t) + V(t) \leqslant \delta\mathbf{V}$, где $V(t)$ — объем загруженности этого дерева в момент t, $t = 1, 2, \dots$ Такое сверхслово называется *предельно допустимым* для этого дерева, если не существует допустимого сверхслова α'^ω из A^ω такого, что $\alpha'^\omega \geqslant \alpha^\omega$ и $\alpha'^\omega \neq \alpha^\omega$.

Ясно, что предельно допустимые сверхслова существуют. Например, сверхслово $(\delta V - V')\delta V \delta V \dots \delta V \dots$ при $\delta V \leqslant r$ является предельно допустимым.

Более того, можно показать, что для всякого допустимого сверхслова α^ω найдется предельно допустимое α'^ω такое, что $\alpha^\omega \leqslant \alpha'^\omega$.

Множество $A = A^* \cup A^\omega$ будем называть множеством квазислов. Распространим понятия допустимости и предельной допустимости на квазислова.

Оказалось, что все такие квазислова для некоторых лёгких с допустимой мерой их запыления δV делятся, образно говоря, на слои таким образом, как показано на рис. 8.

Следовательно, необходимо описать только все предельно допустимые квазислова для некоторых лёгких с допустимой мерой их за-

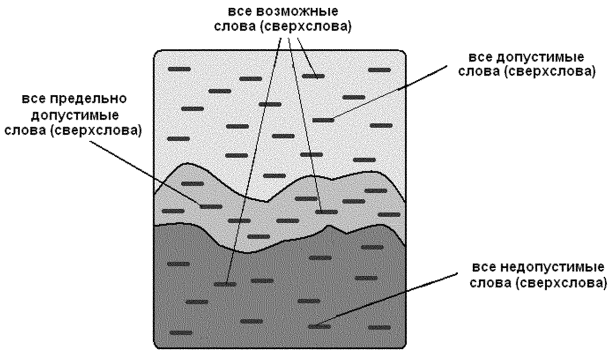

Рис. 8.

пыления δV, потому что все допустимые квазислова для них описываются предельно допустимыми, как все меньшие или равные им. И число всех предельно допустимых квазислов много меньше числа всех допустимых квазислов.

Решение этой проблемы было получено путём описания всех таких квазислов.

Занумеруем все реснички лёгких (дерева) таким образом, что ресничка с номером ijk является k-ой ресничкой j-го ребра глубины i, где $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant l-i$, $1 \leqslant k \leqslant n$, а нумерация ребер одной глубины идет слева направо. Тогда в каждый момент t распределение вещества $V'(t)$ в этом дереве можно задать набором

$$q(t) = (q_{111}(t), q_{112}(t), \ldots, q_{ijk}(t), \ldots, q_{l2^{l-1}n}(t)),$$

в котором каждая координата $q_{ijk}(t)$ равна нагрузке реснички с номером ijk в момент t, причем $0 \leqslant q_{ijk}(t) \leqslant 2^{l-i}b$ и $\sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}(t) = V'(t)$.

Пусть проекция вектора q на координату ijk есть q_{ijk}, то есть $\mathrm{pr}^{ijk} q = q_{ijk}$. Обозначим через $|q|$ сумму всех координат вектора q, то есть $|q| = \sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}$.

Показано, что слово $a(1)a(2)\ldots a(t)\ldots a(m)$ является предельно допустимым для лёгких с заданными параметрами b, r, n, l и предельно допустимым порогом δV точно тогда, когда для него выполнены следующие рекуррентные соотношения:

а) для всех $t = 1, \ldots, m-1$ имеем

$$a(t) \in \begin{cases} \{0\} \cup [2^{l-1}r,\, \delta V - |q(t)|], \text{ если } (\mathrm{pr}^{111} q(t) = 0) \wedge (|q(t)| \neq 0), \\ [2^{l-1}r \dot{-} \mathrm{pr}^{111} q(t),\, \delta V - |q(t)|], \text{ иначе,} \end{cases}$$

б) для $t = m$ имеем $a(m) = \delta V - |q(t)|$.

Также получено описание предельно допустимых сверхслов в [2].

Получен порядок логарифма числа таких слов.

Обозначим мощность множества всех предельно допустимых слов длины m через $N(m)$.

Для $N(m)$ выполнены следующие соотношения:
а) если $\delta V \leqslant 2^{l-1}r$, то $N(m) = 1$,
б) если $\delta V > 2^{l-1}r$, то $\log_2 N(m) \asymp m$ при $m \to \infty$.

Оказалось, что множества допустимых и предельно допустимых слов и сверхслов регулярны и общерегулярны соответственно, которые представляются соответствующими автоматами.

В связи с этим возникает ряд задач, относящихся уже непосредственно к автоматной реализации описанной модели лёгких. Например, описание всех состояний автомата, то есть конфигураций в лёгких, оценка их числа, вычисление функций переходов для автоматов с указанием свойств возникающей диаграммы Мура и т. п.

Для задачи нахождения количества всевозможных конфигураций распределения вещества в лёгких, то есть для величины $K(l, n, b)$, показано, что

$$b^{(2^l-1)n} 2^{(2^l-l-1)n} \leqslant K(l, n, b) \leqslant (b+1)^{(2^l-1)n} 2^{(2^l-l-1)n}.$$

Третья проблема заключается в нахождении решения первых двух проблем для лёгких с патологией.

Решение этой проблемы представлено указанием алгоритма сведения лёгких с патологией к виртуальным здоровым лёгким, но с более слабыми параметрами. Виртуальные здоровые лёгкие функционируют аналогично лёгким с патологией. Далее применяются решения первой и второй проблем для этих виртуальных здоровых лёгких.

Автор благодарит академиков В. Б. Кудрявцева и А. Г. Чучалина за научное руководство.

Список литературы

[1] Гераськина Ю. Г. Модель самоочищения легочных структур // Интеллектуальные системы. 2003. Т. 7. Вып. 1–4. С. 41–54.

[2] Гераськина Ю. Г. Модель процесса дыхания живых организмов // Интеллектуальные системы. 2004. Т. 8. Вып. 1–4. С. 429–456.

[3] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.