

Иерархические интеллектуальные системы поддержки принятия решений в сложноструктурированных областях с использованием экспертной информации*

А. Н. Аверкин, А. Г. Беленький

Введение

Существует большое количество задач в сложно структурированных областях знаний таких, что человек не в состоянии охватить их целиком. В качестве примеров таких областей, можно представить социальные науки, экономические рынки и фонды, задачи распознавания естественного языка, геополитическую ситуацию, — те области, в которых требуется принятие решений о приоритетности тех или иных мер воздействия или их отдельных составляющих. Для обработки подобных ситуаций широко применяются информационные технологии, такие как системы поддержки принятия решений, экспертные системы, базы знаний и др.

Одними из центральных проблем в данной области являются проблемы определения приоритетности объектов, которые являются предметом исследований на этапе планирования. Основой решения данных проблем является анализ ряда трудно формализуемых задач с использованием экспертной информации. По этой причине для решения указанных проблем предлагается использовать подход, базирующийся на теории принятия решений.

*Работа частично подержана грантами РФФИ 06-01-00576 и 07-01-00782.

1. Нечеткая иерархическая модель

Одним из важнейших этапов при построении системы поддержки принятия решений является построение достоверной модели исследуемой слабо структурированной ситуации. В рамках одного и того же объекта могут быть построены разные модели ситуации в зависимости от выделяемых «элементов» (системообразующих факторов) данного объекта и рассматриваемых отношений между ними. Полезным оказывается использование теории графов для описания и анализа причинно-следственных связей системообразующих факторов. Особую роль в анализе сложных объектов играет анализ структуры графа взаимосвязей системообразующих факторов.

Так, при рассмотрении проблем функционирования или развития сложных объектов связи между системообразующими факторами часто удается представить в виде многоуровневой иерархически упорядоченной структуры (в виде графа с сетевой структурой).

Иерархия есть определенный тип системы, основанный на предположении, что элементы системы могут группироваться в несвязные множества. Элементы каждой группы находятся под влиянием некоторой вполне определенной группы, и, в свою очередь, оказывают влияние на элементы другой группы [1].

Представление в виде иерархической структуры является наиболее удобным способом представления слабо структурированной ситуации. В качестве модели используется дерево критериев, в котором общие критерии разделяются на критерии частного характера. Для каждой группы критериев определяются коэффициенты важности относительно критерия верхнего уровня.

Процесс определения коэффициентов важности в иерархических системах состоит из следующих этапов.

1.1. Построение иерархической модели

Иерархия строится методом структурной декомпозиции рассматриваемой ситуации (формирование структур «сверху»). С учетом принципов построения иерархических систем [2] предлагается построить иерархию критериев по следующим правилам:

- 1) Определить «глобальную» (генеральную) цель функционирования (развития) рассматриваемой ситуации. Данный элемент располагается на верхнем уровне строящейся иерархии. Верхний уровень в иерархии имеет 0 порядковый номер.
- 2) Далее, путем структурной декомпозиции ситуации методом дедукции определить критерии реализации глобальной цели таким образом, что критерии нижележащего уровня раскрывают смысл критериев вышележащего уровня.
- 3) Должна отсутствовать непосредственная взаимозависимость критериев, находящихся на одном и том же уровне иерархии.
- 4) Критерии, находящиеся на рассматриваемом уровне иерархии, непосредственно зависят от критериев, находящихся только на соседнем нижележащем уровне иерархии.
- 5) Смысл критерия, находящегося на данном уровне иерархии, является полностью раскрытым, если на следующем нижележащем уровне существуют все влияющие на него критерии.
- 6) Функциональная связь между критериями смежных уровней является линейной.

Отметим, что при построении иерархии критериев, одним из необходимых условий является правило 5, то есть условие полноты раскрытия критериев. В существующих работах по анализу иерархических структур (Саати, Берж, Брук, Бурков и т.д. [3, 4, 5, 6]) к пяти необходимым условиям построения иерархических систем добавляется условие так называемой «положительной связи» критериев в структуре. Это условие означает, что при построении иерархии рассматриваются лишь такие критерии, что реализация критериев, находящихся на нижележащих уровнях, не приводит к снижению возможности реализации критериев, находящихся на вышележащих уровнях. Данное условие снижает уровень адекватности модели реальной ситуации и, кроме того, вступает в противоречие с условием полноты раскрытия критериев в иерархической модели. В связи с этим решено отказаться от условия «положительной связи» критериев в иерархии. Таким образом, при построении иерархической модели необходимо качественное оценивание вида «положительно» влияет (например, критерий *A* усиливает критерий *B*), «отрицательно»

влияет (критерий A ослабляет критерий B), и, наконец, «не влияет». Информация такого типа отображается в иерархии в виде соответствующего знака, наносимого на дугу, идущую из критерия A в критерий B . Иерархия с нанесенной на дуги качественной информацией такого типа является знаковой.

Построенная с учетом указанных принципов иерархическая структура представляет собой ориентированный граф $G_r = (Z, E)$ без контуров с множеством вершин Z , совпадающим с множеством критериев, и множеством дуг E . Наличие дуги $(i, j) \in E$ означает, что критерий (вершина) i непосредственно зависит от критерия j . Граф G_r имеет структуру дерева целей и задач, если его вершины можно расположить на непересекающихся уровнях V_1, \dots, V_M так, что дуги графа соединяют только вершины смежных уровней, причем: дуги ведут сверху вниз, с уровня V_i на уровень V_{i+1} , $i = 1, \dots, M - 1$; все вершины, из которых дуги не выходят, находятся на уровне V_M . Построение иерархии оканчивается уровнем листовых критериев k_1, \dots, k_n , то есть таких критериев, что они являются далее не декомпозируемыми и для каждого из них можно построить ограниченное линейно-упорядоченное множество принимаемых значений (шкалу).

В существующих методах анализа иерархических структур за уровнем листовых критериев следует уровень альтернатив $A = \{K^J\}$, $J = 1, \dots, M$. Каждая из альтернатив K^J есть некоторое решение, характеризующееся набором атрибутов, которые совпадают с названиями листовых критериев k_i .

Возникает задача нахождения наилучшей альтернативы $K^J \in A$ (то есть наилучшего решения из множества рассматриваемых решений) относительно генеральной цели (элемента верхнего уровня иерархической структуры). Для решения задачи нахождения наилучшей альтернативы необходимо, прежде всего, определить коэффициенты относительной важности (то есть веса) критериев в построенной иерархии относительно генеральной цели (критерия 0 уровня построенной модели).

1.2. Проведение элементарных экспертиз

Элементарная экспертиза состоит в получении для некоторой вершины $i \notin V_M$ парных оценок весов дуг $(i, j) \in W$, $j \in \Gamma_i = \{k$

$(i, k) \in W\}$. Парные оценки $r_{jk}^{(i)}$ показывают, во сколько раз вклад объекта j больше вклада объекта k в решение задачи, стоящей перед объектом i ; $j, k \in \Gamma_i$.

Эти оценки могут быть:

- а) точечными ($r_{jk}^{(i)} \in \mathbb{R}_+$ — неотрицательные числа);
- б) интервальными ($r_{jk}^{(i)} = [a_{jk}^{(i)}, b_{jk}^{(i)}] \in \mathbb{R}_+$ — интервалы);
- в) нечеткими числами ($r_{jk}^{(i)} = \{(t, \mu_{jk}^{(i)}(t)) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ — замкнутые выпуклые подмножества на положительной полуоси \mathbb{R}_+ . Последний случай включает также лингвистические оценки и два предыдущих случая.

Таким образом, результатом элементарной экспертизы является взвешенное бинарное отношение $R^{(i)} = \{(j, k), r_{jk}^{(i)} \mid j, k \in \Gamma_i\}$ на множестве объектов Γ_i , задающее интенсивности превосходства объектов.

Другой удобной формой задания результатов элементарной экспертизы является взвешенный ориентированный граф $G^{(i)} = (X^{(i)}, U^{(i)}, R^{(i)})$ с множеством вершин $X^{(i)} = \Gamma_i$, множеством дуг $U^{(i)} = \{(j, k) \mid j, k \in \Gamma_i \text{ и определено } r_{jk}^{(i)}\}$ и весами $r_{jk}^{(i)}$ дуг (j, k) , задаваемыми отношением $R^{(i)}$.

Для обработки результатов элементарных экспертиз с помощью предлагаемого ниже метода необходимо, чтобы граф $G^{(i)}$ был слабо связным.

1.3. Усреднение экспертных оценок

В каждой элементарной экспертизе могут участвовать несколько экспертов, так что для некоторых пар (j, k) объектов $j, k \in \Gamma_i$ разные эксперты S могут задавать различные оценки $r_{jk}^{(i)S}$ (для их обозначения номер эксперта S будем записывать в виде верхнего индекса соответствующих величин). Как показано в [7], шкалой измерения интенсивностей превосходства является шкала лог-отношений. В связи с этим процедура усреднения экспертных оценок состоит в определении среднегеометрических оценок.

Обозначим через $E_{jk}^{(i)}$ множество экспертов, которые в i -й элементарной экспертизе оценивали пару объектов (j, k) , $\gamma(s)$ — коэффициент компетентности s -го эксперта. Тогда усредненные оценки $r_{jk}^{(i)}$ определяются следующим образом. Так как разные эксперты могут задавать оценки в различных формах — как точечные, так и интервальные или нечеткие, — то вначале запишем точечные и интервальные в виде нечетких оценок на полуоси \mathbb{R}_+ , функция принадлежности которых равна нулю, кроме одной точки (для точечных) или замкнутого интервала (для интервальных), где она равна единице.

Функция принадлежности $\mu_{jk}^{(i)}(t)$ усредненной оценки определяется в результате решения задачи

$$\mu_{jk}^{(i)}(t) = \max \min_{S \in E_{jk}^{(i)}} \mu^{(i)S}(\chi_S),$$

в которой максимум берется по всем $\chi_S > 0$, $S \in E_{jk}^{(i)}$, удовлетворяющим условию

$$t = \left(\prod_{S \in E_{jk}^{(i)}} \chi_S^{\gamma(S)} \right)^{1/a}, \quad a = \sum_{S \in E_{jk}^{(i)}} \gamma(S).$$

Если все оценки $r_{jk}^{(i)S}$ являются точечными, то процедура усреднения сводится к определению их среднегеометрического

$$r_{jk}^{(i)} = \left(\prod_{S \in E_{jk}^{(i)}} \left(r_{jk}^{(i)S} \right)^{\gamma(S)} \right)^{1/a},$$

если они являются интервальными, $r_{jk}^{(i)S} = [a_{jk}^{(i)S}, b_{jk}^{(i)S}]$, то усредненная оценка $r_{jk}^{(i)} = [a_{jk}^{(i)}, b_{jk}^{(i)}]$ определяется соотношениями

$$a_{jk}^{(i)} = \left(\prod_{S \in E_{jk}^{(i)}} \left(a_{jk}^{(i)S} \right)^{\gamma(S)} \right)^{1/a},$$

$$b_{jk}^{(i)} = \left(\prod_{S \in E_{jk}^{(i)}} \left(b_{jk}^{(i)S} \right)^{\gamma(S)} \right)^{1/a},$$

что является частным случаем усреднения нечетких оценок.

1.4. Определение весов дуг иерархии

Результат усреднения парных оценок в i -й элементарной экспертизе — точечное, интервальное или нечеткое отношение R^i с интенсивностью превосходства используется для определения весов всех дуг $(i, j) \in W$, выходящих из вершины i , с помощью метода анализа нечетких иерархий (МАНИ) [2, 8, 9, 12–15].

Если на первом уровне V_1 находятся несколько объектов, то проводят «нулевую» элементарную экспертизу — парное сравнение коэффициентов важности этих объектов. В результате обработки нулевой экспертизы определяют коэффициенты важности объектов первого уровня.

Впервые модель упорядочения объектов по точечным и интервальным оценкам была предложена Шахновым [12], который показал, что задача определения коэффициентов важности объектов сводится к поиску максимального в среднем контура в некотором взвешенном орграфе.

Определение коэффициентов важности объектов в рамках предлагаемой модели включает как трудно формализуемые этапы (построение иерархии, проведение экспертизы и получение нечеткого отношения), так и формализуемые, которые сводятся к аппроксимации исходной матрицы A с нечеткими элементами сверхтранзитивной [8] матрицей T , то есть к решению задач вида $\lambda(A, T) \rightarrow \max$.

В этой задаче λ — степень согласованности исходного нечеткого отношения, определяемого матрицей A и результирующего отношения, определяемого матрицей T ; максимум берется по всем сверхтранзитивным матрицам $T = \Omega_{st}$.

Основной этап решения этой задачи сводится к поиску собственного числа некоторой матрицы в специальной регулярированной алгебре R_A (аналогичный этап в методе Саати сводится к поиску собственных числа матрицы в обычной алгебре).

Вводится понятие единичной бикомпоненты и показывается возможность уменьшения размерности решения задач с помощью процедуры конденсации единичных бикомпонент (аналогичной процедуре конденсации бикомпонент [10]).

Отметим некоторые свойства метода МАНИ, повышающие обоснованность его применения при решении практических задач.

Метод обладает свойствами:

- содержательности, то есть инвариантности упорядочения объектов к любым допустимым преобразованиям на шкале измерений;
- положительной реакции, то есть при изменении оценок только между одной парой объектов в пользу одного из них результирующие коэффициенты важности изменяются также в пользу этого объекта.

1.5. Определение коэффициентов важности

После обработки результатов элементарных экспертиз определены коэффициенты важности z_j объектов $j \in V_i$ первого уровня иерархии и веса y_{ij} всех дуг $(i, j) \in W$. Наряду с количественными оценками интенсивности проявления критериев будем также учитывать качественные оценки влияния критериев на глобальную цель.

При учете качественных оценок получаем в качестве области допустимых значений весов критериев отрезок $[-1, 1]$. Необходимо отметить, что при этом парные оценки влияния критериев относительно критериев предыдущего уровня проводятся по абсолютной величине, то есть знак воздействия навешивается на дуги в графе. Таким образом, алгоритм получения весов критериев всех уровней иерархической модели модифицируется следующим образом:

После обработки результатов элементарных экспертиз определены веса w_j критериев $j \in V_1$ первого уровня иерархии и веса y_{ij} всех дуг $(i, j) \in W$. Далее, для каждой дуги $(i, j) \in W$ определяем знак влияния критерия нижнего уровня на критерий предыдущего уровня, обозначим $s^+(i, j)$ — положительный знак на дуге и, соответственно, $s^-(i, j)$ — отрицательный знак на дуге. Тогда веса y_{ij} всех дуг $(i, j) \in W$ определяются следующим образом:

2. Модель многокритериального выбора вариантов

Различный характер исходных данных, используемых в задачах упорядочивания альтернатив (объектов), обуславливает различия в постановках задач по их ранжированию. В данной работе основу исходных данных составляет оценки альтернатив по каждому (из некоторого конечного множества) критерию. Особенности экспертной информации заключаются в том, что от экспертов не требуются точные оценки, оценки альтернатив по каждому критерию могут быть нечеткими и задаваться соответствующими распределениями на шкалах критериев, разные эксперты могут оценивать альтернативы по разным критериям.

Обработка такой информации связана с двумя принципиальными вопросами. Во-первых, с определением способа учета многокритериальности. В данном случае вводится понятие обобщенной шкалы измерения, являющейся своего рода сверткой отдельной шкал. Введение такой шкалы допустимо, если используемые для оценки альтернатив критерии не зависимы по ценности. В то же время конкретные значения полезностей различных градаций для построения не требуется. Во-вторых, необходимо определить способ сравнения альтернатив по одному критерию для случая, когда оценки альтернатив являются нечеткими. В качестве такого способа выбрана комбинация метода Жаке-Лагреза и метода аппроксимации нечетких отношений нечеткими обратимыми квазисериями [Макеев, Шахнов, 13]. При этом, после уточнения метода Жаке-Лагреза, его обоснование приводится с иных позиций.

Пусть ранжируемые альтернативы образуют множество $X = \{1, 2, \dots, n\}$ (далее не будем различать альтернативу и ее номер). Каждая альтернатива оценивается по критериям, причем каждый ξ -й критерий задается в порядковой шкале $E^\xi = \{e_k^\xi \mid k = 1, m^\xi\}$ с дискретными градациями e_k^ξ , m^ξ — число градаций шкалы E^ξ .

Для любой альтернативы $i \in X$ по каждой шкале E^ξ экспертами задаются нечеткие оценки $\gamma^\xi(i)$ в виде распределений $\gamma^\xi(i) = \{P_{i1}^\xi, \dots, P_{ik}^\xi, \dots, P_{im^\xi}^\xi\}$.

Величина P_{ik}^ξ трактуется как достоверность того (степень уверенности в том), что оценка альтернативы i по шкале E^ξ есть e_k^ξ .

Один из способов определения оценок $\gamma^\xi(i)$ при групповом оценивании альтернатив состоит в том, что величина P_{ik}^ξ принимается пропорциональной числу голосов экспертов (или равной доле числа голосов экспертов), считающих, что оценка альтернативы i по шкале E^ξ есть e_k^ξ .

Кроме того, эти величины могут также трактоваться как значения функции принадлежности нечеткой оценки $\gamma^\xi(i)$, заданной на базовом множестве E^ξ .

Будем предполагать, что оценки $\gamma^\xi(i)$ являются распределенными величинами, то есть величина $\sum_{k=1}^{m^\xi} P_{ik}^\xi$, не зависит от i и ξ , без ограничения общности будем считать, что

$$\sum_{k=1}^{m^\xi} P_{ik}^\xi = 1, \quad \forall i \in X, \quad \xi = \overline{1, \alpha}. \quad (1)$$

Таким образом, каждая альтернатива i характеризуется α распределенными величинами $\{\gamma^1(i), \gamma^2(i), \dots, \gamma^\alpha(i)\}$.

Естественно, что определенную роль в сравнении альтернатив i и j должны играть не только их оценки $\gamma^\xi(i)$ и $\gamma^\xi(j)$ по всем шкалам E^ξ , но и относительная важность различных шкал и градаций. В связи с этим будем предполагать, что множество $\{e_k^\xi \mid k = \overline{1, m^\xi}, \xi = \overline{1, \alpha}\}$ градаций всех шкал можно упорядочить, то есть его можно разбить на классы C_1, \dots, C_m равноценных градаций, а сами эти классы стро- го упорядочить:

$$C_1 > C_2 > \dots > C_m, \quad (2)$$

где $>$ — отношение строгого превосходства.

Таким образом, если градации $e_j^{\xi_1}$ и $e_t^{\xi_2}$ равноценны, то они входят в один и тот же класс C_p , если первая градация предпочтительнее второй, то $e_j^{\xi_1} \in C_q$, $e_t^{\xi_2} \in C_r$ и $q < r$.

Существование такого разбиения на классы можно гарантировать, используя аксиоматический подход, разработанный в теории полезности.

Для определяемых таким образом классов выполняется условия:

$$\begin{aligned} \left(e_s^{\xi'}, e_t^{\xi''} \in C_i \right) &\Leftrightarrow \left(U_{\xi'}(e_s^{\xi'}) = U_{\xi''}(e_t^{\xi''}) \right), \\ \left(e_s^{\xi'} \in C_i, e_t^{\xi''} \in C_j, i \neq j \right) &\Leftrightarrow \left(U_{\xi'}(e_s^{\xi'}) > U_{\xi''}(e_t^{\xi''}) \right). \end{aligned}$$

Существенным обстоятельством здесь является то, что, вообще говоря, для построения отношения строгого превосходства $>$ при выполнении условия

$$e_s^{\xi'} >_e e_t^{\xi''} \Leftrightarrow U_{\xi'}(e_s^{\xi'}) > U_{\xi''}(e_t^{\xi''})$$

от системного аналитика требуется информация только о разбиении всех градаций $\{e_k^{\xi} \mid k = \overline{1, m^{\xi}}, \xi = \overline{1, \alpha}\}$ на классы C_1, \dots, C_m ; значение функции полезности U при этом не обязательно. Именно эту «упрощенную» информацию и предполагается получить от системного аналитика.

Итак, исходной информацией для ранжирования альтернатив являются:

$X = \{1, \dots, n\}$ — множество альтернатив;

$\gamma^{\xi}(i)$ — нечеткие оценки каждой альтернативы $i \in X$ по каждой шкале E^{ξ} ;

C_1, \dots, C_m — упорядоченные классы равноценных градаций шкал E^{ξ} , $\xi = \overline{1, \alpha}$.

Задача ранжирования состоит в построении на основе перечисленной исходной информации такого разбиения множества X на классы $K_1, \dots, K_i, \dots, K_l$ равноценных альтернатив, что альтернативы из класса K_i строго предпочтительнее альтернатив из классов K_{i+1}, \dots, K_l для любого $i = 1, 2, \dots, l - 1$.

Для того, чтобы сформулировать следующие из приведенной постановки частные задачи, обсудим в общих чертах метод предлагаемый для решения сформулированной задачи ранжирования.

Во-первых, в любой задаче принятие решения со многими критериями возникает проблема выбора обобщенного (глобального) критерия, Существует множество методов построения обобщенных критериев.

Заметим только, что во многих практических задачах нет оснований априори считать один критерий более важным, чем другой; в предлагаемом подходе принято, что на системного аналитика возлагается задача построения упорядоченных согласно (2) классов равноценных градаций C_1, \dots, C_m . Отсюда вытекает первая задача исследования: зная классы C_1, \dots, C_m и их упорядочение (2) необходимо определить понятия обобщенной шкалы и предложить способ вычисления оценок каждой альтернативы $i \in X$ на этой шкале (то есть обобщенных оценок $\gamma(i)$) на основе частных оценок $\gamma^\xi(i)$, $\xi = \overline{1, \alpha}$.

Во-вторых, необходимо предложить метод попарного сравнения любых двух альтернатив i и j из множества X на основе знания их обобщенных оценок $\gamma(i)$ и $\gamma(j)$ и определить в результате этого сравнения оценку r_{ij} степени предпочтения альтернативы i перед j .

Проведя такое сравнение для всех пар альтернатив $i, j \in X$ можно построить квадратную $n \times n$ матрицу $R = (r_{ij})$, определяющее некоторое бинарное нечеткое отношение R на X и содержащую в агрегированном виде предпочтения как системного аналитика, так и группы экспертов.

В-третьих, по нечеткому отношению R необходимо проранжировать объекты. Данная задача сводится к задаче аппроксимации R нечеткой обратимой квазисерией.

Таким образом, предлагаемый метод заключается в следующем: на основе перечисленной выше исходной информации построить исходную шкалу, вычислить обобщенные оценки альтернатив, построить на основе этих оценок бинарное нечеткое отношение предпочтения R , а затем найти ближайшую к нему обратимую квазисерию.

3. Интеграция иерархической модели и модели многокритериального оценивания

Принципиальной особенностью процесса выбора решения является использование информации об исходном состоянии факторов. Для этого вводится решающая функция, определенная на множестве возможных значений факторов и отображающая это множество во множество возможных решений. Таким образом, решающая функ-

ция это правило, по которому на основании информации об исходных состояниях факторов осуществляется выбор решений. Для выбора решающей функции необходимо ввести критерий эффективности принятия решений (систему предпочтения аналитика). Из-за неполноты количественной информации о состоянии факторов и показателей невозможно определить функционал качества принятия решений, по причине чего вводится система бинарных отношений предпочтения, вводятся порядковые шкалы для качественных критериев. Критерий эффективности соответствует целям, заданным в системе, структуре системы и определен на множестве исходных данных. В иерархической системе имеет место граф частных критериев, согласно которому организуется обмен информацией между уровнями подсистем, предусматривается распределение функций по обработке информации, при этом цели подсистем непротивоположны. Таким образом, критерий эффективности является векторным критерием. Разработанные алгоритмы анализа иерархических структур позволяют перейти к скалярным критериям, упорядоченным по важности относительно главной цели, заданной в системе.

Для упорядоченных по важности скалярных критериев разработанными методами многокритериального ранжирования строится обобщенная шкала измерения, являющейся сверткой шкал используемых количественных и качественных критериев. Таким образом, проводится оценка мероприятий (объектов) по интегрированному критерию, с использованием количественных оценок, полученных из информационно-справочной системы, и качественных оценок, полученных от экспертов.

4. Заключение

Разработанные методы и алгоритмы использованы при создании программного комплекса, предназначенного для автоматизации процесса решения задач обоснования концепции развития сложной ситуации, выбора оптимального подмножества возможных альтернатив путем упорядочения (ранжирования) объектов в системе с учетом сформированного в программе множества целей. Программа исполь-

зуется в качестве блока в автоматизированной системе, реализующей сквозную информационную технологию для мониторинга и анализа состояния рассматриваемой слабо структурированной ситуации, прогнозирования, оценки и выработки решений.

Список литературы

- [1] Ларичев О. И., Мошкович Е. М. Качественные методы принятия решений. М.: Наука, 1996.
- [2] Макеев С. П., Шахнов И. Ф. Упорядочение объектов в иерархических системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991.
- [3] Saaty T. L. The analytic hierarchy process. New York: McGraw-Hill, 1980.
- [4] Saaty T. L., Vargas L. G. Comparison of eigenvalue logarithmic least squares, and least squares methods in estimating ratios // Mathematical Modelling. Vol. 5. 1984.
- [5] Берж К. Теория графов и ее приложения. М.: ИЛ, 1962.
- [6] Брук Б. Н., Бурков В. Н. Методы экспертных оценок в задачах упорядочения объектов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1972.
- [7] Макеев С. П. Декомпозиция задачи вычисления функций от взаимодействующих нечетких переменных // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1990.
- [8] Макеев С. П. Структура транзитивных нечетких отношений // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1989.
- [9] Макеев С. П., Остапенко С. Н., Серов Г. П., Шахнов И. Ф. Аппроксимация нечетких отношений второго типа нечеткими обратимыми квазисериями // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1988.
- [10] Макеев С. П., Серов Г. П., Шахнов И. Ф. Об инвариантности упорядочения объектов относительно степенного преобразования числовой шкалы расплывчатых оценок // Сборник трудов

- 3-го научно-технического семинара «Управление при наличии расплывчатых категорий». Пермь, 1988.
- [11] Макеев С. П. Аппроксимация нечетких отношений нечеткими обратимыми квазисериями // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1989.
- [12] Шахнов И. Ф. Модель для обработки результатов попарных сравнений объектов, задаваемых в виде интервальных оценок. М.: Электроника и системы управления, 1990.
- [13] Макеев С. П., Шахнов И. Ф. Упорядочение альтернатив на основе расплывчатых оценок. М.: ВЦ АН СССР, 1989.
- [14] Аверкин А. Н. и др. Поддержка принятия решений в слабо структурированных предметных областях: анализ ситуаций и оценка альтернатив // Теория и системы управления. Известия РАН. 3. 2006
- [15] Аверкин А. Н., Титова Н. А. Гибридные интеллектуальные системы поддержки принятия решений в слабо структурированных предметных областях на основе когнитивных карт и нечетких иерархических моделях // Труды научно-практической конференции «Информационные технологии в экономике XXI века». Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова. Москва, 2007.
- [16] Averkin A. N. Titova N. V. Agrafonova T. V. Synthesis of distributed fuzzy hierarchical model in decision support systems in fuzzy environment // Proceeding of the 5th EUSFLAT Conference. Ost-rava, Czech Republic, September 11–14, 2007.
- [17] Belenki A., Ryjov A. Fuzzy Logic in Monitoring the Non-Spread of Nuclear Weapons. Fuzzy Logic and Intelligent Technologies in Nuclear Science // Proceedings of the 1st International FLINS Workshop. Mol, Belgium, September 14–16, 1994 / Edited by Da Ruan, Pierre D'hondt, Paul Govaerts, Etienne E. Kerre. World Scientific. Pp. 219–222.
- [18] Ананич И. С., Бельский А. Г., Пронин Л. Б., Рыжов А. П. Агрегирование информации в системах информационного мониторинга // Труды Международного семинара «Мягкие вычисления–96». Казань, 3–6 октября 1996. С. 43–46.