О разрешимости проблемы полноты для автоматов

Д. Н. Бабин

В статье приводится обзор проблемы полноты для конечных автоматов, то есть возможности построить все автоматы из заданных, путем соединения их выходных каналов с входными. Рассмотрены две принципиально разные функциональные системы автоматов: полнота относительно суперпозиции и полнота относительно двух операций суперпозиции и обратной связи.

В первом случае мы имеем дело с бесконечными базисами, во втором — с конечными, свойсто полноты которых, в общем случае, нельзя определить. Как в первом, так и во втором случае при решении проблемы полноты, наличие булевых функций в исследуемой системе автоматов играет ключевую роль.

Введение

Понятие автомата относится к числу важнейших в математике. Оно возникло на стыке разных ее разделов, а также в технике, биологии и других областях. Содержательно автомат представляет собой устройство с входными и выходными каналами. На его входы последовательно поступает информация, которая перерабатывается им с учетом строения этой последовательности и выдается через выходные каналы. Эти устройства могут допускать соединение их каналов между собой. Отображение входных последовательностей в выходные называют автоматной функцией, а возможность получения новых таких отображений за счет соединения автоматов приводит к алгебре автоматных функций.

Первый толчок к возникновению теории автоматов дала работа Поста Э. 1921 года [1]. В ней были получены фундаментальные результаты о строении решетки замкнутых классов булевых функций, которые были в дальнейшем методически переработаны и упрощены в книге Яблонского С. В., Кудрявцева В. Б., Гаврилова Г. П. «Функции алгебры логики и классы Поста» [2].

Сами автоматы и их алгебры начали исследоваться в тридцатые годы текущего столетия, но особенно активно в период с 50-х годов. Основополагающую роль здесь сыграли работы Тьюринга, авторов знаменитого сборника «Автоматы» [3] Шеннона, Мура, Клини и других. Последующие работы по изучению алгебр автоматов велись под большим влиянием известных статей А. В. Кузнецова [4, 5] и С. В. Яблонского [6] по теории функций k-значной логики.

Функции k-значной логики P_k могут рассматриваться как автоматы без памяти, к которым применяются операции суперпозиции. Возникшие для таких функций постановки задач о выразимости, полноте, базисах, решетке замкнутых классов и другие, а также развитый аппарат сохранения предикатов как ключевой для решения этих задач, оказались весьма действенными и для алгебр автоматных функций. При этом под выразимостью понимается возможность получения функций одного множества через функции другого с помощью заданных операций, а под полнотой — выразимость всех функций через заданные.

Основу результатов для функций из P_k составляет подход А. В. Кузнецова, опирающийся на понятие предполного класса. Для конечно-порожденных систем таких функций семейство предполных классов образует критериальную систему, другими словами, произвольное множество является полным точно тогда, когда не является подмножеством ни одного предполного класса. Множество этих предполных классов оказалось конечным и из их характеризации вытекает алгоритмическая разрешимость задачи о полноте. На этом пути С. В. Яблонским путем явного описания всех предполных классов была решена задача о полноте для функций трехзначной логики. После усилий многих исследователей при $k > 3$ в P_k были описаны все семейства предполных классов. Заключительные построения в этой задаче провел Розенберг [7].

Полнота систем автоматов относительно суперпозиции

Рассмотрим функциональную систему автоматов с операцией суперпозиции. Пусть $\mathbf{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_1)$ — абстрактный конечный автомат, где A, Q, B конечные алфавиты, входной, состояний и выходной, соответственно; $\varphi : Q \times A \to Q$ и $\psi : Q \times A \to B$ суть функции переходов и выходная функция, соответственно; q_1 — начальное состояние.

Если расслоить множество автоматов P по числу состояний r, и исследовать на полноту системы $P(r)$, содержащие автоматы с r состояниями, то окажется, что при всяком r система $P(r)$ не полна, а всякая полная система бесконечна. Мы оказываемся в условиях актуально бесконечных полных систем. Примерами подобных систем являются непрерывные (или k раз диференцируемые) функции с операцией суперпозиции, а также полугруппы или группы с операцией расширения одной полугруппы с помощью другой (сплетения полугрупп). Функциональная система автоматов занимает промежуточное положение между ними и имеет свойства каждой из них.

Если расслоить множество автоматов P по числу входов l (по арности автоматной функции) и исследовать на полноту системы $P^{(l)}$, содержащие автоматы с l входами, то оказывается, что $P^{(2)}$ полная система, более того, для $l = 1$ система $P^{(1)} \cup O$ полна, где O множество всех булевых функций (автоматов без памяти). Получается, что все одноместные автоматы вместе с универсальной булевой функцией (например штрих Шеффера) — это полная система [8]. Имеет место аналогный факт для непрерывных функций, где все одноместные функции и сумма — это полная система [9].

Положительное решение вопроса об ограничении арности полных систем автоматов позволило поставить проблему Слупецкого: существует ли алгоритм проверки на полноту систем вида $P^{(1)} \cup M$, где M конечная система автоматов. Фактически проблема Слупецкого для автоматов равносильна получению простейшего автомата с одним состоянием (штриха Шеффера) из заданных сложных автоматов системы M. Проблема Слупецкого пока не решена. В работе [10] описаны предполные классы, содержащие $P^{(1)}$.

Рассмотим аналогию между функциональной системой автоматов и алгеброй конечных полугрупп. Множество $\{\varphi_a : Q \times A \to Q \mid \varphi_a(q) = \varphi(q, a),\ a \in A\}$ подстановок на состояниях автомата, индуцированных входными буквами порождает полугруппу $S_{\mathbf{A}}$ автомата $\mathbf{A}$. Суперпозиция $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ автоматов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ имеет полугруппу $S_{\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2}$, являющуюся расширением полугруппы $S_{\mathbf{A}_1}$ с помощью полугруппы $S_{\mathbf{A}_2}$.

Если под операцией деления полугруппы понимать взятие гомоморфного образа подполугруппы исходной полугруппы, то возникает алгебра полугрупп с операциями расширения и деления. Эта алгебра вкладывается в функциональную систему автоматов. Для этого нужно рассматривать, так называмые, стандартные автоматы с заданной полугруппой, имеющие максимальное число состояний и полный входной алфавит.

В теореме Крона-Роудза показано [11], что для указанной алгебры полугрупп выполнен критерий полноты, сводящийся к наличию всех *простых конечных групп* (их бесконечно много) в качестве делителей полугрупп исследуемой системы. Кроме всех простых конечных групп, требуется еще наличие в качестве делителя фиксированной конечной полугруппы, называемой полугруппой «триггера». Теорема Крона-Роудза, таким образом, выполнена для стандартных автоматов и дает критерий полноты.

Для произвольных систем автоматов теорема Крона-Роудза превращается в необходимое условие полноты. Рассмотрим еще одну опреацию над автоматами. Назовем подавтоматом автомата $\mathbf{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_1)$ автомат $\mathbf{A}' = (A', Q, B, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, q_1)$, где $A' \subset A^*$, а $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ естественные доопределения функций φ, ψ на слова из A^*. Если $A' = A^n$, то назовем $\mathbf{A}'$ n-подавтоматом автомата $\mathbf{A}$. Взятие n-подавтомата — это возможность использовать наряду с буквами длинных слов, что нарушает синхронность автоматных операций. Если вместе с операцией суперпозицией разрешить применять к автоматам операцию взятия n-подавтомата, то в такой алгебре автоматов при всех $n > 1$ условие Крона-Роудза из необходимого условия полноты превратится снова в критерий полноты [12, 13].

Оказывается, что операция взятия n-подавтомата выразима, через суперпозицию, но при наличии в исследуемом базисе подсистемы

P_0, состоящей из следующих автоматов: константные автоматы (счетчики по произвольному модулю), булевы функции, автомат «триггер» [8]. Таким образом, для систем автоматов вида $P_0 \cup M$ критерий полноты относительно операции суперпозиции состоит в наличии всех *простых конечных групп* в качестве делителей полугрупп системы M. Для некоторых систем M это условие проверяемо. В частности это верно для системы $M = P^{(1)}$. Эта техника позволяет доказать, что система P_0 не расширяется до предполного в P класса.

Эти факты описаны в работах [8, 12, 13] и докладывались на семинаре по теории автоматов и математической кибернетике на механико-математическом факультете МГУ, и поскольку у специалистов снова возник интерес к бесконечно порожденной алгебре автоматов с операцией суперпозиции, автор подготовил и сдал в печать статью с единым изложением этой проблематики.

Полнота систем автоматов относительно суперпозиции и обратной связи

Одновременно с изучением полноты автоматов относительно суперпозиции, были сделаны попытки применения аппарата предполных классов в задаче полноты для автоматов относительно двух операций суперпозиции и обратной связи. Эта алгебра является конечнопорожденной, тем не менее, Кудрявцев В. Б. показал континуальность множества предполных классов автоматных функций в ней [14]. В дальнейшем, Кратко М. И. была показана алгоритмическая неразрешимость задачи о полноте для автоматных функций [15].

Необходимость преодоления трудностей, связанных с алгоритмической неразрешимостью задачи о полноте в общем случае, привела к развитию целой системы новых подходов к задаче о полноте, описанных в работе [16]. Все они имели целью глубже разобраться в итерационных свойствах автоматов с тем, чтобы на этой основе перейти к вскрытию природы алгоритмической неразрешимости и выделить в этой задаче случаи, допускающие алгоритмическую разрешимость.

Первый подход связан с расширением понятия эквивалентности автоматов и их множеств, а именно: аппроксимационная полнота

(A-полнота, Буевич В. А., 1973 г. [17]), когда достаточно для каждого τ получить автоматную функцию, совпадающую с искомой на словах длины τ; Клини-полнота (Дассов Ю., 1978 г.), когда достаточно получить автоматную функцию, задающую то же самое регулярное множество; ε-полнота (Строгалов А. С., 1986 г.), когда достаточно получить автоматную функцию, отличающуюся от искомой на множестве меры, меньшей ε. Однако в каждом из указанных случаев задача о полноте осталась алгоритмически неразрешимой; тем самым, эти подходы вновь привели к негативным результатам.

Второй подход связан с вариацией операций, применяемых к автоматам. Относительно операции суперпозиции С. С. Марченков для автоматов с бесконечным числом состояний показал, что полные системы (естественно, бесконечные) имеют в совокупности еще и неограниченную арность. Автор для автоматов с конечным числом состояний и операцией суперпозиции показал, что существуют полные системы (естественно, бесконечные) арности два (аналог 13 проблемы Гильберта для автоматов). Более того автору удалось показать, что система, состоящая из одноместных конечных автоматов и всех булевых функций, полна относительно операции суперпозиции.

Третий подход связан с изучением полноты в подклассах автоматов. Часовских А. А. в 1985 г. [18] в классе линейных автоматов описал все предполные классы, число которых оказалось счетным и нашел, тем не менее, алгоритм распознавания полноты конечных систем. Коляда К. В. в 1984 г. [19] рассмотрел систему классов функций, определенных на регулярных множествах (функции сопряженные к автоматным) и обнаружил для одних классов алгоритмическую неразрешимость, а для других алгоритмическую разрешимость проблемы полноты. Автор в 1985 г. [12] показал неполноту относительно операции суперпозиции системы, состоящей из одноместных конечных автоматов и всех булевых функций, в классе перестановочных автоматов.

Четвертый подход связан с ограничением на исследуемые системы автоматов. Еще в 1961 г. А. А. Летичевским [20] был получен алгоритм решения задачи о полноте для конечных систем автоматов, выдающих номер своего состояния (автоматы Медведева) при наличии всех булевых функций. А в 1986 В. А. Буевич [21] показал алгоритмическую разрешимость проблемы A-полноты для конечных систем автоматов, содержащих все булевы функции. В 1992 г. автор [22] показал, что существует алгоритм распознавания полноты при наличии в рассматриваемой системе автоматов всех булевых функций.

Оказалось, что для распознавания полноты существенна роль функций без памяти, присутствующих в базисе. Если присутствуют все функции без памяти, то алгоритм распознавания полноты [22] и A-полноты [21] существует. Если присутствует, фактически, лишь тождественная функция x, то не существует алгоритма распознавания как полноты [15], так и A-полноты [17].

Для систематического исследования природы алгоритмической неразрешимости задачи о полноте автоматов В. Б. Кудрявцевым было предложено изучить алгоритмическую разрешимость и алгоритмическую неразрешимость проблемы полноты для систем автоматов вида $M = \Phi \cup \nu$, где Φ фиксированная система автоматов без памяти (булевая часть), а ν произвольная конечная система автоматов, для того, чтобы ответить на вопрос, верно, ли что по части базиса автоматов, не содержащей памяти, можно определить разрешима ли задача о полноте для систем автоматов с этой частью, и, тем самым, вскрыть природу алгоритмической неразрешимости по булевой части базиса.

Автору удалось расслоить системы конечных автоматов на иерархию классов, образующих типы, где в один тип входят все системы, содержащие заданный класс Поста автоматов без памяти. Имеет место существенное

Замечание. Если проблема полноты (A-полноты) алгоритмически неразрешима для систем вида $F_1 \cup \nu$, то она неразрешима для систем вида $F_2 \cup \nu$ и $F_1' \cup \nu$, где $F_2 \subseteq F_1$, а F_1' двойственный к F_1 замкнутый класс. Поэтому для доказательства указанной классификации достаточно проверить ее на классах $L_4, D_2, F_3^4, S_6, O_9$ (см. рисунок).

В результате получилась классификация систем автоматов по разрешимости проблемы полноты для них. Имеют место следующие теоремы.

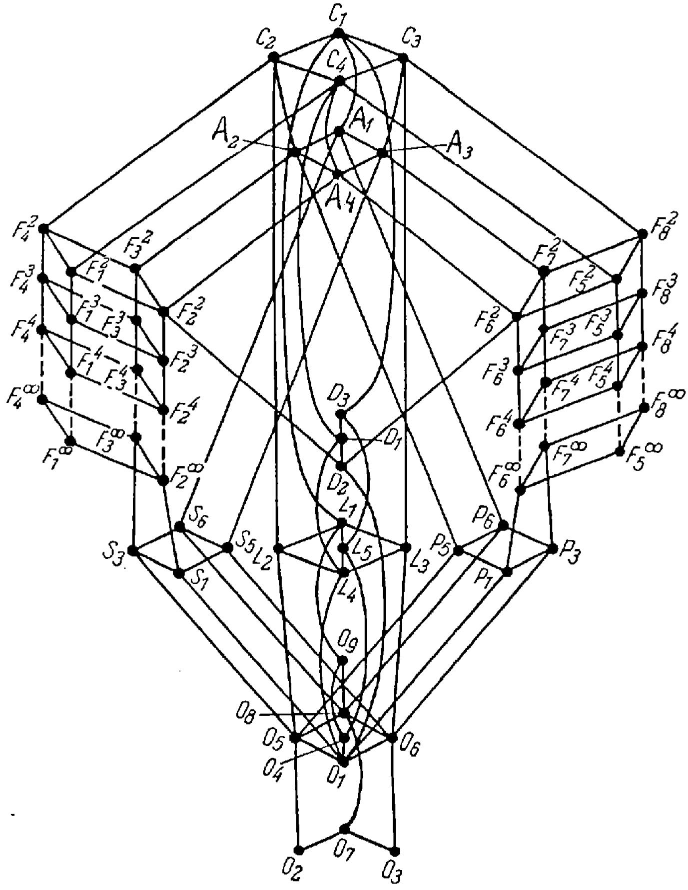

Рис. 1.

Теорема 1. *Задача о полноте для систем автоматных функций вида $M = \Phi \cup \nu$, где Φ фиксированный класс булевых функций, а ν произвольная конечная система автоматных функций алгоритмически разрешима точно тогда, когда $\Phi \supseteq D_2$ или $\Phi \supseteq L_4$.*

Теорема 2. *Задача об A-полноте для систем автоматных функций вида $M = \Phi \cup \nu$, где Φ фиксированный класс булевых функций, а ν произвольная конечная система автоматных функций алгоритмически разрешима точно тогда, когда $\Phi \supseteq D_2$ или $\Phi \supseteq L_4$.*

1. Основные определения и результаты

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, E_2^∞ — множество всех сверхслов $a(1)a(2)\ldots$, где $a(j) \in E_2$, $j = 1, 2, \ldots$; E_2^τ — множество всех слов $a(1)\ldots a(\tau)$ длины τ. Функцию $f : (E_2^\infty)^n \to (E_2^\infty)^m$ назовем автоматной функцией (а.-функцией), если она задается рекуррентно соотношениями (1),

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)), \\ b_j(t) = \psi_j(q(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)), \ \ j = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{1}$$

где $q \in Q = \{q_1, \ldots, q_r\}$. Параметр q называется состоянием а.-функции f, q_1 — ее начальным состоянием, вектор-буквы $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)\ldots$ и $b(1)b(2)\ldots$ — входным и выходным сверхсловами соответственно. Класс всех а.-функций обозначим через P_a. В этом классе введем операции суперпозиции и обратной связи. Для суперпозиции будем использовать операции:

$$\begin{cases} (\eta f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1), \\ (\varepsilon f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n), \\ (\Omega f)(x_1, \ldots, x_{n-1} = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \\ (\bigtriangledown f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}), \\ (f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{l+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_l), x_{l+1}, \ldots, x_{l+n-1}). \end{cases}$$

Операция обратной связи (о. с.), примененная к i-ой входной и j-ой выходной переменным а.-функции $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$, задает а.-функцию

$$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m),$$

вычисляемую алгоритмически следующим образом. Считаем, что о. с. применима к f в состоянии q, если ψ_j в уравнении (1) фиктивно зависит от a_i при $q(t) = q$, а вычисление $b_s(t)$ осуществляется по схеме

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), \ldots, a_{i-1}(t), \psi_j(q(t), a_1(t), \ldots, a_{i-1}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{i+1}(t), \ldots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \ldots, a_n(t)), \\ b_s(t) = \psi_s(q(t), a_1(t), \ldots, a_{i-1}(t), \psi_j(q(t), a_1(t), \ldots, a_{i-1}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{i+1}(t), \ldots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \ldots, a_n(t)), \\ s = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Считаем, что о. с. применима к f, если она применима в начальном состоянии q_1, и из ее применимости в состоянии $q(t)$ следует применимость в состоянии $q(t+1)$. Пусть $M \subseteq P_a$, обозначим через $[M]$ множество всех а.-функций, получающихся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество M называется полным, если $[M] = P_a$. Проблема полноты для P_a состоит в описании всех полных множеств M.

Пусть τ — натуральное число, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая автоматная функция,

$$f^\tau : (E_2^\tau)^n \to (E_2^\tau)^m$$

— ограничение этой функции на множество слов длины τ. Скажем, что а.-функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) \ \text{ и } \ g(x_1, \ldots, x_n)$$

τ-равны, если

$$f^\tau = g^\tau.$$

Обозначим через $[M]_\tau$ множество всех а.-функций, τ-равных получающимся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество M называется τ-полным, если

$$[M]_\tau = P_a.$$

Через $[M]_A$ обозначается множество

$$[M]_A = \bigcap_{\tau=1}^{\infty} [M]_\tau.$$

Проблема A-полноты для P_a состоит в описании всех A-полных множеств M. Очевидно, что полное множество M является A-полным.

Последовательность

$$(a(1), b(1)), (a(2), b(2)), \ldots, (a(s), b(s)),$$

где

$$\begin{gathered} a(1), \ldots, a(s) \in E_2^n; \quad q(1), \ldots, q(s+1) \in Q; \quad b(1), \ldots, b(s) \in E_2^m; \\ b(i) = \psi(q(i), a(i)); \quad q(i+1) = \varphi(q(i), a(i)), \quad i = 1, \ldots, s; \\ q(1) = q_1, \end{gathered}$$

называется s-экспериментом с а.-функцией f. Если еще для некоторого D, $1 \leqslant D < s$ выполнено

$$\varphi(q(s), a(s)) = q(D+1),$$

то s-эксперимент называется (D, s)-экспериментом. Для натуральных i, j автоматная функция f является (j, i)-зависимой на множестве указанных экспериментов, если выполнено соотношение

$$(b = \psi(q(j), a(i))) \Rightarrow (b = b(i)).$$

Имеет место утверждение о том, что свойство автомата сохранять (j, i)-зависимости инвариантно относительно операций суперпозиции и обратной связи.

Оказывается, что отсутствие всех (j, i)-зависимостей на множестве $(D, D + kN)$-экспериментов является критериальным условием выразимости счетчика по модулю N через автоматную функцию f и булевы функции, а отсутствие (j, i)-зависимостей на множестве s-экспериментов является критериальным условием A-выразимости множества всех счетчиков через f и булевы функции. Эти условия проверяемы.

Таким образом, основным объектов исследования для задач полноты вместо полугруппы подстановок состояний (в задаче полноты относительноно суперпозиции) становится комплекс: множество циклических экспериментов растущей длины s и множество инвариантных (также растущих) предикатов на них.

Определим свойство автоматной функции иметь память.

Переход от одной пары $(p,q) \in Q \times Q$ состояний а.-функции f к другой паре $(r,s) \in Q \times Q$ ее состояний может «выдавать информацию», если

$$\exists a,b \ ((\varphi(p,a)=r)\&(\varphi(q,b)=s)\&(\psi(p,a)\neq\psi(q,a)))\,,$$

и тогда этому переходу приписывается оценка $\eta((p,q),(r,s)) = 2$.

Если при переходе

$$\exists a \ ((\varphi(p,a)=r)\&(\varphi(q,a)=s)\&(\psi(p,a)=\psi(q,a))) \bigvee ((p=q)\&(r=s))\,,$$

то происходит «ожидание информации», и тогда $\eta((p,q),(r,s)) = 0$.

Переход «получает» информацию, если

$$\exists a,b \ ((\varphi(p,a)=r)\&(\varphi(q,b)=s)\&(\psi(p,a)=\psi(q,a))\&(\psi(p,b)=\psi(q,b)))\,,$$

и тогда $\eta((p,q),(r,s)) = 1$.

Полный граф $\widehat{I}_f$ с помеченными ребрами и множеством вершин $2^{Q\times Q}$, где отметки ребер заданы функцией

$$\Theta(X_1,X_2) = \widetilde{\max_{\Upsilon(X_1,X_2)}}\left(\max_{E\in\Upsilon(X_1,X_2)}(\eta(E))\right),$$

называется информационным графом а.-функции f. Здесь E некоторая четверка $((p,q),(r,s))$ состояний, а $\Upsilon(X_1,X_2)$ некоторая система четверок со свойством $(p,q)\in X_1, (r,s)\in X_2$, $\widetilde{\max}$ максимум относительно порядка $\lambda < 1 < 0 < 2$, λ пустая буква.

Автором показано, что, если для всех N больших некоторого N_0 имеется цикл «получение» информацию, «выдача» информации, «ожидание информации», то есть цикл с отметками $120\ldots0$ в информационном графе $\widehat{I}_f$, то система $\{f\}\cup\mathbf{K}$ полна [22].

Рассмотрим алгоритмическую разрешимость полноты и A-полноты конечных систем автоматных функций, содержащих булеву функцию медиану $xy+xz+yz$.

Оказывается, что не выполнение соотношений

$$((a\vee\prod_1^s a(i)^{\xi(i)})=1)\&(\bar a\&(\bigvee_1^s a(i)\bullet\eta(i))=0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow((b\vee\prod_1^s b(i)^{\xi(i)})=1)\&(\bar b\&(\bigvee_1^s b(i)\bullet\eta(i))=0),$$

$$((a\&(\bigvee_{1}^{s} a(i)\bullet\xi(i))=\mathbf{0})\&(\bar{a}\vee\prod_{1}^{s} a(i)^{\eta(i)}=\mathbf{1}))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow((b\&(\bigvee_{1}^{s} b(i)\bullet\xi(i))=\mathbf{0})\&(\bar{b}\vee\prod_{1}^{s} b(i)^{\eta(i)})=\mathbf{1})$$

с произвольными коэффициентами $\xi,\eta\in E_2^s$ на (D,s)-экспериментах при всех D,s является критериальным условием выразимости множества $\mathbf{K}\cup P_2$ через автоматную функцию f и медиану $xy+xz+yz$.

Здесь знаки $\Pi,\&$ используются для обозначения покомпонентной конъюнкции, а $\vee$ — дизъюнкции произвольного числа векторов из E_2^k при произвольном k. Для $a\in E_2^k$ и $\delta\in E_2$

$$a^\delta=\begin{cases}1 & \text{при } \delta=0\\ a & \text{при } \delta=1\end{cases},\quad a\bullet\delta=\begin{cases}0 & \text{при } \delta=0\\ a & \text{при } \delta=1\end{cases}.$$

Возможность проверки этих соотношений для счетного числа D,s основана на эквивалентности сохранения зависимостей с коэффициентами ξ,η и с коэффициентами $\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}$, где (ξ,η) и $(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})$ сравнимы по модулю предсказывающего автомата, который эффективно строится по автоматной функции f [23].

Грубая оценка числа операций перебора α необходимого для проверки этого факта таково, что

$$\log\log\log\log\alpha\leqslant|Q|^2 2^{2(m+n)}+2.$$

Имеет место алгоритмическая разрешимость полноты и A-полноты конечных систем автоматных функций, содержащих истинностную функцию $x+y+z$. Здесь вводятся определения сохранения автоматной функцией линейных уравнений на множествах экспериментов. Автоматная функция f сохраняет в j-тый момент однородные линейные уравнения с коэффициентами $\Delta\in E_2^s$, если выполнено соотношение

$$\psi(q(j),a(j)+\sum_{1}^{s} a(i)\bullet\Delta(i))=b(j)+\sum_{1}^{s} b(i)\bullet\Delta(i);$$

неоднородные линейные уравнения, если выполнено соотношение

$$\psi(q(j), a(j) + \sum_{1}^{s} a(i) \bullet \Delta(i) + \mathbf{1}) = b(j) + \sum_{1}^{s} b(i) \bullet \Delta(i) + \mathbf{1};$$

Особенностью линейного случая является тот факт, что сохранение автоматной функцией f однородных линейных уравнений не противоречит полноте системы $\{f, x+y+z\}$. При этом сохраняемые уравнения имеют коэффициенты

$$\Delta_k = 0 \ldots 0 \underbrace{\delta \ldots \delta}_{2k},$$

где k натуральное число, а множество слов δ конечно и эффективно строится по а.-функции f. Тем не менее, алгоритм проверки полноты конечных систем при использовании линейных функций существует.

Возможность проверки сохранения уравнений для счетного числа D, s, j основана на эквивалентности сохранения линейных зависимостей с коэффициентами Δ и сохранения линейных зависимостей с коэффициентами $\widetilde{\Delta}$, где слова Δ и $\widetilde{\Delta}$ сравнимы по модулю предсказывающего автомата, который эффективно строится по автоматной функции f [24].

Завершает конструкцию доказательство алгоритмической неразрешимости проблемы полноты и A-полноты конечных систем автоматных функций с истинностной частью типов O, S, P, F^3. Доказательство неразрешимости принципиально отличается от доказательства разрешимости. Здесь не конструируется критериальное условие, а происходит сведение задачи к известной алгоритмически неразрешимой проблеме — проблеме остановки процесса порождения продукций Поста.

Строятся параметрические системы функций с параметром $\xi \in D^*$.

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6, \Sigma_7, \Sigma_8.$$

Булевая часть систем такова:

$$\Sigma_1, \Sigma_4 - \bar{x} \vee y, \quad \Sigma_2, \Sigma_5 - x \vee y, 0, 1, \quad \Sigma_3, \Sigma_6 - 0, \bar{x},$$
$$\Sigma_7, \Sigma_8 - \bar{x} \vee y, x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4.$$

Роль автоматной части — свести задачу полноты для систем $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_7$ и A-полноты для систем $\Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6, \Sigma_8$ к проблеме конечности числа продукций слова ξ.

Этот подход к задаче неразрешимости встречался и раньше. В частности так был доказан факт алгоритмической неразрешимости произвольных конечных систем автоматов, что в нашем случае соответствует тривиальной булевой части, состоящей из тождественной функции x. Новизна заключается в том, что был решен нетривиальный случай, в котором булевая часть может состоять из функций произвольной арности. Это существенно меняет конструкцию сводимости автоматной схемы к цепочке продукций. Если раньше автоматная схема имела вид цепочки, копирующей цепочку продукций, то сейчас происходит сравнение схемы в виде дерева с цепочкой продукций. Результаты изложены в [25].

Следует отметить последнюю группу, в которой эти методом доказан факт алгоритмической неразрешимости систем с истинностной частью

$$\bar{x} \vee y, x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4,$$

порождающей класс F_4^3, откуда следует бесконечность числа алгоритмически неразрешимых случаев и конечность числа разрешимых случаев в рассматриваемой задаче.

В результате утверждений получилась
– верхняя граница неразрешимого случая: классы $F_4^3, F_8^3, S_6, P_6, O_9$;
– нижняя граница разрешимого случая: классы D_2, L_4; (см. рисунок).

Список литературы

[1] Post E. Two-valued iterative systems of math. logik. Prinston, 1941.

[2] Кудрявцев В. Б., Гаврилов Г. П., Яблонский С. В. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[3] Автоматы / Сборник статей под редакцией Маккарти и Шеннона. М.: ИЛ, 1956.

[4] Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды третьего всесоюз-

ного математического съезда. Т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1956. С. 145–146.

[5] Кузнецов А. В. Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Успехи математических наук. Т. 16. № 2. 1961. С. 201–202.

[6] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. АН СССР. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[7] Rosenberg J. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1965. N 260. С. 3817–3819.

[8] Бабин Д. Н. О полноте двухместных о. д.-функций относительно суперпозиции // Дискретная математика. Т. 1. Вып. 4. М.: Наука, 1989. С. 86–91.

[9] Колмогоров А. Н. О представлении непрерывнвх функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. № 5. С. 953–956.

[10] Буевич В. А. О τ-полноте систем, содержащих все одноместные детерминированные функции // Математические вопросы кибернетики. Т. 8. С. 231–255.

[11] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп / под ред. М. А. Арбиба. М.: Статистика, 1975.

[12] Бабин Д. Н. Вербальные подавтоматы и задача полноты // Вестник МГУ. Математика и механика. 1985. № 3. С. 82–85.

[13] Бабин Д. Н. Кандидатская диссертация.

[14] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // ДАН СССР. Т. 151. № 3. 1963. С. 493–496.

[15] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155. № 1. С. 35–37.

[16] Кудрявцев В. Б. О функциональных системах автоматов // Дискретная математика. Т. 7. Вып. 4. М.: Наука, 1995. С. 3–28.

[17] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для о. д.-функций // Математические заметки. Т. 12. № 6. 1972. С. 687–697.

[18] Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математическме вопросы кибернетики. 1995. № 3. С. 140–166.

[19] Коляда К. В. О полноте регулярных отображений // Проблемы кибернетики. Вып. 41. М.: Наука, 1980. С. 41–49.

[20] Летичевский А. А. Условия полноты для конечных автоматов // Вычислительная математика и математическая физика. № 4. 1961. С. 702–710.

[21] Буевич В. А. Условия A-полноты для автоматов. М.: Изд. МГУ, 1986.

[22] Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. Т. 4. Вып. 4. М.: Наука, 1992. С. 41–56.

[23] Бабин Д. Н. О разрешимости проблемы полноты для специальных систем автоматных функций // Дискретная математика. Т. 8. Вып. 4. М.: Наука, 1996. С. 79–91.

[24] Бабин Д. Н. Алгоритмическая разрешимость свойств полноты и A-полноты конечных систем автоматных функций с линейной истинностной частью // Интеллектуальные системы. Т. 3. 1998. С. 51–69.

[25] Бабин Д. Н. Конечность множества автоматных базисов Поста с разрешимой проблемой полноты // Дискретная математика. Т. 10. Вып. 3. М.: Наука, 1998. С. 57–64.