Функциональные системы автоматов*

В. Б. Кудрявцев

В работе приводятся основные результаты по проблемам выразимости и полноты для функциональных систем автоматов, полученные за последние более, чем сорок лет, то есть за период возникновения и становления этой теории. Описание свойств функциональных систем автоматов ведется для модельных систем, упорядоченных по мере нарастания их сложности. Сначала рассматриваются автоматы без памяти, то есть функции l-значной логики и их обобщение — неоднородные функции, затем автоматы с ограниченной памятью, то есть указанные функции с задержками, и в заключение — конечные автоматы, то есть автоматные функции; при этом нарастают по силе и соответствующие операции над автоматами.

Введение

Понятие автомата относится к числу важнейших в математике. Оно возникло на стыке разных ее разделов, а также в технике, биологии и других областях. Содержательно автомат представляет собой устройство с входными и выходными каналами. На его входы последовательно поступает информация, которая перерабатывается им с учетом строения этой последовательности и внутреннего состояния автомата и выдается через его выходные каналы. Эти устройства могут допускать соединение их каналов между собой, приводящие к сетям автоматов.

Отображение входных последовательностей в выходные называют автоматной функцией, а возможность получения новых таких

*Работа поддерживалась грантом РФФИ № 06-01-00240.

отображений за счет сетей автоматов приводит к алгебре автоматных функций.

Сами автоматы и их алгебры начали исследоваться в тридцатые годы текущего столетия, но особенно активно, — в период с 50-х годов.

Основополагающую роль здесь сыграли работы А. Тьюринга, К. Шеннона, Э. Мура, С. Клини и других авторов знаменитого сборника «Автоматы» [1]. Последующие работы по изучению алгебр автоматов велись под большим влиянием известной статьи С. В. Яблонского [2] по теории функций k-значной логики. Такие функции могут рассматриваться как автоматы без памяти, к которым применяются операции суперпозиции.

Возникшие для таких функций постановки задач о выразимости, полноте, базисах, решетке замкнутых классов и другие, а также развитый аппарат сохранения предикатов как ключевой для решения этих задач, оказались весьма действенными и для алгебр автоматов, называемых далее функциональными системами. При этом под выразимостью понимается возможность получения функций одного множества через другие с помощью заданных операций, а под полнотой — выразимость всех функций через заданные.

В обзоре изучение функциональных систем осуществляется на ряде модельных объектов, начиная с автоматов без памяти, то есть с функций l-значной логики, затем для автоматов с ограниченной памятью, то есть такого рода функций с временны́ми задержками, далее для конечных автоматов, то есть автоматных функций общего вида. В качестве операций выступают суперпозиции, а в последнем случае — еще и обратная связь.

Для автоматов без памяти приводятся фундаментальные результаты Э. Поста о строении решетки замкнутых классов булевских функций, знакомство с которыми сегодня затруднено в связи с библиографической редкостью книг [3, 4], в которых они содержатся. Затем приводятся наиболее существенные результаты для функций k-значной логики. Их основу составляет подход, развитый А. В. Кузнецовым и С. В. Яблонским и опирающийся на понятие предполного класса.

Для конечно-порожденных систем таких функций семейство предполных классов образует критериальную систему; другими словами, произвольное множество является полным точно тогда, когда не является подмножеством ни одного предполного класса. Множество этих предполных классов оказалось конечным и из их характеризации вытекает алгоритмическая разрешимость задачи о полноте. На этом пути С. В. Яблонским путем явного описания всех предполных классов была решена задача о полноте для функций трехзначной логики, а вместе с А. В. Кузнецовым найдены отдельные семейства предполных классов для произвольной конечной значности. Затем усилиями многих исследователей [5]–[9] последовательно были открыты новые такие семейства, а заключительные построения провел И. Розенберг [10]. Итоговый результат этих построений здесь также приводится.

Рассматривается также предельное обобщение функций l-значной логики в виде неоднородных функций.

Для автоматов с ограниченной памятью приводятся решения задач о полноте и выразимости, а также задачи о слабых вариантах этих постановок [11]. Под автоматом такого рода понимается пара (f, t), где f — функция k-значной логики, а t — время ее вычисления. Слабая полнота означает возможность получения из исходных пар с помощью суперпозиций любой функции хоть с какой-нибудь задержкой.

Подробно рассматривается случай функций двузначной логики с задержками. В качестве аппарата решения здесь также используются предполные классы. Отличие этого случая от автоматов без памяти состоит в том, семейство предполных классов оказалось счетным. Вместе с тем задача о слабой полноте остается алгоритмически разрешимой.

Другим обобщением автоматов без памяти является класс автоматов с операциями суперпозиции и обратной связи. Для этого класса ситуация оказывается похожей на случай автоматов с ограниченной памятью. Также удается описание всех предполных классов, которых оказывается счетное число, откуда тем не менее извлекается алгоритм распознавания полноты конечных систем автоматов [12].

Переход к общему случаю автоматов доставляет уже континуальность множества предполных классов [13] и алгоритмическую неразрешимость задачи о полноте [14]. Поэтому актуальными становятся поиски путей, связанных как с ослаблением свойств полноты, так и, наоборот, обогащением этого понятия.

Первое направление реализуется путем рассмотрения задач о τ-полноте и A-полноте, состоящих, соответственно, в проверке порождения всех отображений на словах длины τ, а также таких отображений при любом фиксированном τ. Основными результатами здесь являются явное описание всех τ- и A-предполных классов и алгоритмическая неразрешимость задачи об A-полноте [15].

Второе направление реализуется путем расслоения всех конечных систем автоматов, исследуемых на полноту, на типы. В один тип относятся все такие системы, которые содержат заданный класс Поста автоматов без памяти. Основным результатом является явное указание границы отделимости алгоритмически разрешимых случаев типов систем автоматов на диаграмме Поста. Эта же граница оказывается верной и для случая A-полноты [16].

Наряду с продвижениями в решении основных задач по проблематике, связанной с выразимостью и полнотой, в обзоре обозначаются те направления, которые еще разработаны слабо или недостаточно. Изложение ведется только для модельных случаев функциональных систем автоматов. Общие построения, осуществленные автором в [17], здесь не затрагиваются.

Автор благодарит А. В. Галатенко за большую помощь в подготовке статьи к опубликованию.

1. Основные понятия и задачи

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, \}$, $N_0 = \{0\} \cup N$, $N_1 = N \setminus \{1\}$, для h из N полагаем $N_1^h = \{1, 2, \ldots, h\}$. Рассмотрим некоторое множество M и отображение $\omega : M^n \to M$, где M^n является n-ой декартовой степенью множества M и $n \in N$. Пусть P_m — множество всех таких отображений ω при любых указанных n и $\Omega \subseteq P_M$.

Рассмотрим универсальную алгебру (у. а.) $\mathcal{M} = (M, \Omega)$, в которой M называется носителем, Ω — классом операций. С каждым подмножеством $\overline{M} \subseteq M$ свяжем последовательность множеств $\overline{M}^{(i)}$, $i \in N$, таким образом.

Положим $\overline{M}^1 = \overline{M}$. Далее, множество $\overline{M}^{(i+1)}$ состоит из всех таких элементов m из M, для которых найдутся ω из Ω и $m_1, m_2, \ldots, m_n$

из $\overline{M}^{(i)}$, что $m = \omega(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Обозначим через $I_\Omega(\overline{M})$ множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{M}^{(i)}$. Нетрудно видеть, что I_Ω является оператором замыкания на множестве $\mathcal{B}(M)$, образованном всеми подмножествами множества M. Тем самым для I_Ω всегда выполнены условия $I_\omega(\overline{M}) \supseteq \overline{M}$, $I_\omega(I_\omega(\overline{M})) = I_\omega(\overline{M})$, а также если $\overline{M} \supseteq \overline{\overline{M}}$, то $I_\omega(\overline{M}) \supseteq I_\omega(\overline{\overline{M}})$. Множество $I_\Omega(\overline{M})$ называется замыканием множества $\overline{M}$, а само $\overline{M}$ — порождающим множеством для $I_\Omega(\overline{M})$. Множество $\overline{M}$ называется замкнутым, если $\overline{M} = I_\Omega(\overline{M})$.

Пусть $\Sigma(\mathcal{M})$ — множество всех замкнутых подмножеств в $\mathcal{M}$. Говорят, что $\overline{M}$ выразимо через $\overline{\overline{M}}$, если $\overline{M} \subseteq I_\omega(\overline{\overline{M}})$. Множество $\overline{M}$ называется полным, если $I_\Omega(\overline{M}) = M$. Полное множество называется базисом, если любое его собственное подмножество не является полным.

Основными проблемами для M, которые будут интересовать нас, являются проблемы выразимости и полноты, а также базисов, решетки замкнутых классов, модификации их и некоторые примыкающие к ним вопросы.

Под проблемой выразимости понимается указание всех пар $(\overline{M}, \overline{\overline{M}})$, таких что $\overline{M}$ выразимо через $\overline{\overline{M}}$; под проблемой полноты — указание всех полных подмножеств; под проблемой базисов — описание всех базисов, если они существуют; под проблемой решетки — построение решетки всех замкнутых классов и нахождение ее свойств.

Знание решетки $\Sigma(\mathcal{M})$ дает решение проблем выразимости и полноты. Так, выразимость $\overline{M}$ через $\overline{\overline{M}}$ означает проверку $I_\omega(\overline{M}) = I_\omega(\overline{\overline{M}})$ Для решения проблемы полноты используется следующая схема. Систему $\Sigma' \subseteq \Sigma(\mathcal{M})$ назовем критериальной (k-системой), если любое множество $\overline{M}$ полно точно тогда, когда для любого $\overline{\overline{M}}$ из Σ' выполнено $\overline{M} \not\subseteq \overline{\overline{M}}$. Ясно, что если $\Sigma(\mathcal{M}) \setminus \{M\} \neq \varnothing$, что далее предполагается, то $\Sigma(\mathcal{M}) \setminus \{M\}$ является k-системой. Нетрудно видеть, что дуальные атомы решетки $\Sigma(\mathcal{M})$, называемые также предполными классами, входят в любую k-систему. Пусть $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ — множество всех предполных классов и $\Sigma_{\overline{\pi}}(\mathcal{M})$ — множество всех классов из $\Sigma(\mathcal{M}) \setminus \{M\}$, не являющихся подмножествами ни одного предполного класса из $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$. Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 1.1. *Множество* $\Sigma_\pi(\mathcal{M}) \cup \Sigma_{\overline{\pi}}(\mathcal{M})$ *образует k-систему в у. а.* $\mathcal{M}$.

Особый интерес вызывает ситуация, когда $\Sigma_{\overline{\pi}}(\mathcal{M})$ является пустым множеством, так как в этом случае система $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ образует k-систему, что означает сведение задачи о полноте к описанию всех предполных классов. Отметим один важный случай такого рода. У. а. $\mathcal{M}$ называется конечно-порожденной, если существует конечное подмножество $M' \subseteq M$, которое является полным.

Известно [18] следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Если у. а.* $\mathcal{M}$ *является конечно-порожденной, то* $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ *образует k-систему.*

Отметим, что в общем случае это утверждение не является обратимым. Рассмотрим теперь случай, когда множество M состоит из функций. Он будет для нас основным. При этом у. а. $\mathcal{M}$ будет называться функциональной системой (ф. с.)

Пусть E — некоторое множество и функция f имеет вид $f : E^n \to E$, где $n \in N$. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ — алфавит переменных u_i со значениями в E, $i \in N$. Для записи функции f будем пользоваться выражением $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})$. Класс всех таких функций обозначим через P_E. Во избежание сложных индексов у переменных u_i будем использовать для их обозначения метасимволы x, y, z, возможно, с индексами.

Следуя А. И. Мальцеву [19], введем в P_E унарные операции $\eta, \tau, \Delta, \nabla$, которые определяются следующим образом:

$$(\eta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1);$$
$$(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n);$$
$$(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \text{ если } n > 1;$$
$$(\eta f) = (\tau f) = (\Delta f) = f, \text{ если } n = 1;$$
$$(\nabla f)(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1});$$

форма этих операций уточняет операции из [13].

Введем в P_E бинарную операцию $*$ так. Для функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ полагаем $(f * g)(x_2, x_3, \ldots, x_n,$

$x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = f(g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}), x_2, \ldots, x_n)$. Описанные операции называются, соответственно, сдвигом, транспозицией, отождествлением, расширением, и подстановкой, а в совокупности — операциями суперпозиции. Множество этих операций обозначим через Ω_c. Пусть $M \subseteq P_E$ и $I_{\Omega_c}(M) = M$, тогда ф. с. $\mathcal{M} = (M, \Omega_c)$ называется итеративной ф. с. Поста (и. ф. с. Поста).

2. Функции l-значной логики

Функции из P_E называются функциями l-значной логики, если $E = E_l = \{0, 1, 2, \ldots, l-1\}$, $l \geqslant 2$. В этом случае вместо P_E употребляется символ P_l. Ф. с. $\mathcal{P}_l = (P_l, \Omega_c)$ считается одной из основных моделей итеративных ф. с. Поста (для краткости: и. ф. с.), на изучении которой формировались проблематика и методы теории ф. с. Если $\mathcal{M} = (M, \Omega_c)$ и $M \subseteq P_l$, то $\mathcal{M}$ называем и. ф. с. рода l. Кратко изложим основные итоги изучения $\mathcal{P}_l$, которые будут важны нам для рассмотрения ф. с. автоматных функций.

Для $\mathcal{P}_2$, Э. Постом [3] дано полное решение упомянутых проблем о полноте, выразимости, базисах и решетке замкнутых классов. Опишем эту решетку, сохраняя его обозначения.

Рассмотрим множество Q классов

$$C_i, A_i, D_j, L_r, O_s, S_t, P_t, F_v^m, F_v^\infty,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$; $r = 1, 2, 3, 4, 5$; $s = 1, 2, \ldots, 9$; $t = 1, 3, 5, 6$; $v = 1, 2, \ldots, 8$; $m = 1, 2, \ldots$.

Функции из P_2 называются функциями алгебры логики (ф. а. л.). Класс P_2 Э. Пост обозначает через C_1. Класс C_2 содержит все ф. а. л. f, такие что $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$; C_3 — все ф. а. л. такие, что $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$; $C_4 = C_2 \cap C_3$. Говорят, что ф. а. л. f является монотонной, если всегда из неравенства $a_i \leqslant b_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ следует, что $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Класс A_1 состоит из всех монотонных ф. а. л.; $A_2 = C_2 \cap A_1$, $A_3 = C_3 \cap A_1$, $A_4 = A_2 \cap A_3$. Класс D_3 состоит из всех ф. а. л. f таких, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$, где ф. а. л. $\overline{x}$ называется отрицанием и задается так: $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$; $D_1 = C_4 \cap D_3$, $D_2 = A_1 \cap D_3$. Класс L состоит из всех ф. а. л. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \alpha \pmod 2$; $L_2 = C_2 \cap L_1$;

$L_3 = C_3 \cap L_1$; $L_4 = L_2 \cap L_3$; $L_5 = D_3 \cap L_1$. Класс O_9 состоит из всех ф. а. л., существенно зависящих не более, чем от одного переменного; $O_8 = A_1 \cap O_9$; $O_4 = D_3 \cap O_9$; $O_5 = C_2 \cap O_9$; $O_6 = C_3 \cap O_9$; $O_1 = O_5 \cap O_6$; $O_7 = \{0, 1\}$; $O_2 = O_5 \cap O_7$; $O_3 = O_6 \cap O_7$. Класс S_6 состоит из всех ф. а. л. вида $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ и констант; $S_3 = C_2 \cap S_6$; $S_5 = C_3 \cap S_6$; $S_1 = S_3 \cap S_5$. Класс P_6 состоит из всех ф. а. л. вида $x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n$ и констант; $P_5 = C_2 \cap P_6$; $P_3 = C_3 \cap P_6$; $P_1 = P_3 \cap P_5$. Говорят, что ф. а. л. удовлетворяют условию a^μ, если любые μ наборов, на которых она равна 0, имеют общую координату 0. Аналогично с заменой 0 на 1 определяется свойство A^μ. Класс F_4^μ состоит из всех ф. а. л. со свойством a^μ; $F_1^\mu = C_4 \cap F_4^\mu$; $F_3^\mu = A_1 \cap F_4^\mu$; $F_2^\mu = F_1^\mu \cap F_3^\mu$. Класс F_8^μ состоит из всех ф. а. л. со свойством A^μ; $F_5^\mu = C_4 \cap F_8^\mu$; $F_7^\mu = A_3 \cap F_8^\mu$; $F_6^\mu = F_5^\mu \cap F_7^\mu$. Ф. а. л. удовлетворяет условию a^∞, если все наборы, на которых она равна 0, имеют общую координату 0. Аналогично с заменой 0 на 1 вводится свойство A^∞. Класс F_4^∞ состоит из всех ф. а. л. со свойством a^∞; $F_1^\infty = C_4 \cap F_4^\infty$; $F_3^\infty = A_1 \cap F_4^\infty$; $F_2^\infty = F_1^\infty \cap F_3^\infty$. Класс F_8^∞ состоит из всех ф. а. л. со свойством A^∞; $F_5^\infty = C_4 \cap F_8^\infty$; $F_7^\infty = A_3 \cap F_8^\infty$; $F_6^\infty = F_5^\infty \cap F_7^\infty$.

Теорема 2.1 ([3])**.** *Для и. ф. с. $\mathcal{P}_2$ справедливо:*

а) множество всех замкнутых классов в $\mathcal{P}_2$ счетно и совпадает с множеством Q;

б) классы из Q образуют решетку по включению, приведенную на рис. 1;

в) в каждом замкнутом классе в $\mathcal{P}_2$, кроме O_1, O_2 и O_3, предполные классы образуют k-систему и в ней не более пяти элементов;

г) каждый замкнутый класс в $\mathcal{P}_2$ имеет базис и мощность его всегда не более, чем 4;

д) проблемы полноты и выразимости для и. ф. с. рода 2 применительно к конечным множествам ф. а. л. алгоритмически разрешимы.

Теорема 2.2. *Структура по включению классов из Q имеет вид, указанный на рис. 1.*

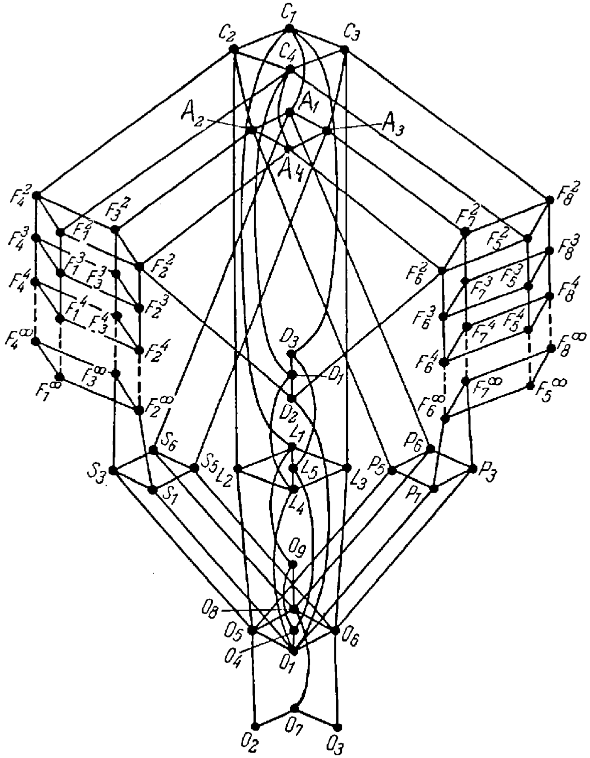

Рис. 1.

В этой структуре два класса R и R', такие что $R \supset R'$, и нет класса R'', отличного от R и R' и для которого выполнено $R \supset R'' \supset R'$, располагаются R выше R' и соединяются отрезком.

Свойства и. ф. с. рода l при $l > 2$ оказались много сложнее, как это будет следовать из приводимых ниже утверждений.

Обозначим через $P_l^{(n)}$ множество всех функций из P_l, зависящих не более, чем от n переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Ясно, что число $p_l^{(n)}$ функций в $P_l^{(n)}$ равно $\sum\limits_{i=1}^{n} C_n^i l^{l^i}$. Пусть S_l^n — множество всех функций из $P_l^{(n)}$, каждая из которых при некотором i, $i = 1, 2, \ldots, n$, равна u_i. Если $M \subseteq P_l$ и M конечно, то через $\alpha(M)$ обозначим наибольшее число переменных у функций из M.

Для конечно-порожденной и. ф. с. $\mathcal{M}$ рода l пусть $\alpha(M)$ — наименьшее такое число α', что для некоторого $M' \subseteq M$ выполнено $I_{\Omega_c}(M') = M$ и $\alpha(M') = \alpha'$. Назовем непустое множество $M' \subseteq P_l^{\alpha(M)} \cap M$ R-множеством в $\mathcal{M}$, если $I_{\Omega_c}(M') \cap P_l^{\alpha(M)} = M'$ и $M' \neq P_l^{\alpha(M)} \cap M$, обозначив его через $R^{\alpha(M)}$. Пусть $\mathcal{R}^{\alpha(M)} = (R^{\alpha(M)} \bigcup S_l^{\alpha(M)}, R^{\alpha(M)})$. Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_l сохраняет $\mathcal{R}^{\alpha(M)}$, если для любого набора функций $g_1, g_2, \ldots, g_n$ из $R^{\alpha(M)} \bigcup S_l^{\alpha(M)}$ будет выполнено $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in R^{\alpha(M)}$. Класс всех функций из M, сохраняющих $\mathcal{R}^{\alpha(M)}$, обозначим через $U(\mathcal{R}^{\alpha(M)})$. Назовем R-множество $R^{\alpha(M)}$ максимальным, если не существует такого R-множества $R_1^{\alpha(M)}$, что $U(\mathcal{R}_1^{\alpha(M)}) \supseteq U(\mathcal{R}^{\alpha(M)})$.

Пусть $\mathbb{R}(M)$ — множество всех максимальных R-множеств, $\mathbb{R}_k(M)$ — множество всех пар $\mathcal{R}^{\alpha(M)}$, для которых $R^{\alpha(M)} \in \mathbb{R}(M)$ и $U(\mathbb{R}(M))$ — множество всех классов сохранения элементов из $\mathbb{R}(M)$. Назовем и. ф. с. $\mathcal{M}$ тривиальной, если $M = I_{\Omega_c}(S_k^1)$ или $M = I_{\Omega_c}(\{c(x)\})$, где $c(x) = c, c \in E_l$. Мощность множества A обозначим через $|A|$.

Теорема 2.3 ([17]). *Если и. ф. с. $\mathcal{M} = (M, \Omega_c)$ рода l нетривиальная и конечно-порожденная, то имеет место:*

а) $U(\mathbb{R}(\mathcal{M})) = \Sigma_\pi(\mathcal{M})$;

б) $|U(\mathbb{R}(\mathcal{M}))| \leqslant 2^{P_l(\alpha(M))}$;

в) $\mathbb{R}(M)$ *строится эффективно.*

Эта теорема является развитием утверждения А. В. Кузнецова из [2].

Следствие. *Проблема полноты для конечно-порожденных и. ф. с. рода l алгоритмически разрешима для любого l.*

Теорема 2.4 ([17]). *Проблема выразимости для конечных множеств конечно-порожденной и. ф. с. рода l алгоритмически разрешима для любого l.*

Теорема 2.5 ([20]). *Для каждого $l \geqslant 3$ существуют и. ф. с. рода l, для которых выполнено:*

а) и.ф.с. имеет счетный базис;

б) и.ф.с. имеет базис заданной конечной мощности;

в) и.ф.с. не имеет базиса.

Следствие ([20]). *Для каждого $l \geqslant 3$ структура замкнутых классов в и. ф. с. $\mathcal{P}_l$ континуальна.*

Как установлено в [2], и. ф. с. $\mathcal{P}_l$ является конечно-порожденной, поэтому для нее справедливы теоремы 2.3 и 2.4, а для множества $U(\mathbb{R}(\mathcal{P}_l))$ найдено его явное описание [10]. Нам удобнее привести его в предикатной форме.

Пусть $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — h-местный предикат, аргументы которого принимают значения из E_l. Если $\rho(a_1, a_2, \ldots, a_h) = a$, то при $a = 1$ набор называем истинным, а при $a = 0$ — ложным. Множество всех истинных наборов обозначим через ρ_1, а ложных — через ρ_0. Говорим, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_l сохраняет ρ, если из истинности каждого элемента строки $\rho(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_h^1), \rho(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_h^2), \ldots, \rho(a_1^n, a_2^n, \ldots, a_h^n)$ вытекает истинность $\rho(f(a_1^1, a_2^2, \ldots, a_h^n), f(a_1^1, a_2^2, \ldots, a_h^n), \ldots, f(a_1^1, a_2^2, \ldots, a_h^n))$.

Множество M функций из P_l сохраняет ρ, если каждая функция из M сохраняет ρ. Класс всех функций, сохраняющих ρ, обозначим через $U(\rho)$. Опишем шесть специальных семейств предикатов.

Семейство P. Пусть область истинности предиката $\rho(y_1, y_2)$ является графиком подстановки $\sigma(x)$ из P_l, разлагающейся в произведение циклов одинаковой простой длины $p, p \geqslant 2$. P состоит точно из всех таких предикатов.

Семейство E. Пусть $E_l = E^1 \cup E^2 \cup \ldots \cup E^t$, где $1 < t < l$, $E^i \cap E^j = \varnothing$ при $i \neq j$. Рассмотрим предикат $\rho(y_1, y_2)$, истинный точно на тех наборах, для которых при некотором i имеет место $a, b \in E^i$. E состоит точно из всех таких предикатов для указанных разбиений.

Семейство $\mathcal{L}$. Пусть $l = p^m$, где p — простое, $G = <E_l, +>$ — абелева группа, в которой каждый ненулевой элемент имеет порядок p, то есть G является элементарной p-группой.

При $p = 2$ рассмотрим предикат $\rho_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$, истинный точно на тех наборах, для которых выполнено $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$. В этом случае $\mathcal{L}$ состоит точно из тех предикатов ρ_G, которые соответствуют всем указанным элементарным 2-группам G.

При $p \neq 2$ рассмотрим предикат $\rho_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$, истинный точно на тех наборах, когда $y_3 = 2^{-1}(y_1 + y_2)$, где 2^{-1} — такое число из E_p, для которого $2 \cdot 2^{-1} \equiv 1 \pmod p$. В этом случае $\mathcal{L}$, состоит точно из тех предикатов ρ_G, которые соответствуют всем указанным элементарным p-группам.

Семейство B. Пусть h, m — натуральные числа, такие, что $h \geqslant 3$, $m \geqslant 1$, $h^m \leqslant l$, а $\varphi(x)$ — произвольное отображение E_l на E_{h^m}. Пусть $a \in E_{h^m}$; обозначим через $[a]_l$ l-ый коэффициент в разложении

$$a = \sum_{l=0}^{m-1} [a]_l h^l, \text{где } [a]_l \in E_{h^m}.$$

Рассмотрим предикат $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, истинный точно на тех наборах, для которых набор $[\varphi(a_1)]_l, \varphi(a_2)]_l, \ldots, \varphi(a_h)]_l)$ является неразнозначным при любых l из E_m, то есть ρ определяется тройкой (h, m, φ); при этом если $\varphi(x) = x$, то ρ называется элементарным. Семейство B состоит точно из предикатов ρ, определяемых всеми указанными тройками (h, m, φ).

Семейство Z. Предикат $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$, $h \geqslant 1$, называется рефлексивным, если из неразнозначности набора значений переменных следует его истинность, и является симметричным, если для любой подстановки $t(u)$ чисел $1, 2, \ldots, h$ имеет место $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h) = \rho(y_{t(1)}, y_{t(2)}, \ldots, y_{t(h)})$. Непустое множество всех элементов c из E_l таких, что для всех значений переменных выполнено $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_{h-1}, c) = 1$, называется центром симметричного предиката ρ. Предикат ρ называется центральным, если он симметричен, рефлексивен и имеет центр C такой, что $C \subset E_l$. Z состоит точно из всех центральных предикатов $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ таких, что $1 \leqslant h \leqslant l-1$.

Семейство M. Частичный порядок на E_l с одним наибольшим и одним наименьшим элементами можно задать бинарным предикатом $\rho(y_1, y_2)$. M состоит точно из всех таких предикатов.

Пусть $W = P \cup E \cup \mathcal{L} \cup B \cup Z \cup M$ и $U(W)$ состоит из всех классов сохранения предикатов из W.

Теорема 2.6. *Имеют место соотношения*

а) $U(W) = \Sigma_\pi(\mathcal{P}_l)$;

б) $|U(W)| \sim l(l \pmod 2) + 1) \cdot 2^{C_{l-1}^{[\frac{l-1}{2}]}}$ *при* $l \to \infty$.

Часть а) этого утверждения постепенно определялась авторами [3]–[10], а заключительная работа проведена в [10]. Часть б) установлена в [21].

Резкое отличие свойств $\mathcal{P}_l$, при $l = 2$ и $l > 2$ привело к рассмотрению разных вариаций основных задач для и. ф. с. таких, как исследование на полноту систем функций с заданными свойствами, например, систем Слупецкого, содержащих все одноместные функции; изучение строения фрагментов решетки замкнутых классов и др. Кроме того, изучались обобщения $\mathcal{P}_l$ в виде и. ф. с. неоднородных функций, то есть зависящих от разных групп переменных, области определения которых различны [17], а также функций, переменные которых, как и сами функции, принимают счетное число значений.

3. Неоднородные функции

Модификацией l-значных логик является и. ф. с. $\mathcal{P}_\Sigma = (P_\Sigma, \Omega)$. Определим класс P_Σ. Пусть $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$, где $\Sigma_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$, $\Sigma_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_t\}$, $A_i = \{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{r_i}^i\}$, $B_j = \{b_1^j, b_2^j, \dots, b_{r_j}^j\}$, $A_i \neq A_k, B_j \neq B_l$ при $i \neq k$ и $j \neq l$ и пусть $X_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, \dots\}$, $1 \leqslant i,\ k \leqslant s$, $1 \leqslant j,\ l \leqslant t$. Множество X_i состоит из переменных, принимающих значения из A_i. Пусть $P_\Sigma^{B_j}$ — множество всех функций $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2, \dots, x_1^s, x_2^s, \dots, x_{n_s}^s)$, принимающих значения из B_j. Обозначим через P_Σ множество $\bigcup\limits_{j=1}^{t} P_\Sigma^{B_j}$, элементы которого называются неоднородными функциями. Операции, образующие множество Ω, является естественными обобщениями операций $\eta, \tau, \Delta, \nabla, *$ из l-значной логики. Множество значений функции g обозначим $\hat{g}$.

Каждая из операций O, $O \in \{\eta, \tau, \nabla, \Delta\}$ заменяется набором операций $O_1, O_2, \dots, O_s$ таким образом, что операция O_i действует как операция O на множестве переменных X_i функции f. Операция $*$ также заменяется на набор операций $*_{ij}$ таким образом, что для функций $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2, \dots, x_1^s, x_2^s, \dots, x_{n_s}^s)$ и $g(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{m_1}^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m_2}^2, \dots, x_1^s, x_2^s, \dots, x_{m_s}^s)$ применимость операции $*_{ij}$ означает, что $g \in P_\Sigma^{B_j}$, а $\hat{g} \subseteq A_i$. Результатом применения операции $*_{ij}$ к функциям f и g является функция $h(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{m_1+n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{m_2+n_2}^2, \ldots, x_1^s, x_2^s, \ldots, x_{m_s+n_s}^s) = f(x_{m_1+1}^1, x_{m_1+2}^1, \ldots, x_{m_1+n_1}^1, \ldots, x_{m_{i-1}+1}^{i-1}, x_{m_{i-1}+2}^{i-1}, \ldots, x_{m_{i-1}+n_{i-1}}^{i-1}, g(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{m_2}^2, \ldots, x_1^s, x_2^s, \ldots, x_{m_s}^s), \quad x_{m_i+1}^i, \ldots, x_{m_i+n_i-1}^i, x_{m_i+1}^{i+1}, x_{m_i+2}^{i+1}, \ldots, x_{m_{i+1}+n_{i+1}}^{i+1}, \ldots, x_{m_s+1}^s, x_{m_s+2}^s, \ldots, x_{m_s+n_s}^s)$.

Таким образом, имеем $\mathcal{P}_\Sigma = \langle P_\Sigma, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s, \nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_s, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s, *_{11}, *_{12}, \ldots, *_{st}\rangle$.

Операции в $\mathcal{P}_\Sigma$ по аналогии с l-значными логиками будем называть операциями суперпозиции. Естественно, далее, считать, что для $\mathcal{P}_\Sigma$ выполнено $|A_i| > 1, |B_j| > 1$, $B_j \nsubseteq B_l$ при любых i, j, l, таких, что $j \neq l$. По аналогии с l-значной логикой введем понятия замыкания, замкнутого, предполного и полного множеств в $\mathcal{P}_\Sigma$, обозначая соответствующий оператор замыкания J_{Ω_c}.

Теорема 3.1. *Множество предполных классов в $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно и строится эффективно.*

Теорема 3.2. *Существует алгоритм, который для любой $\mathcal{P}_\Sigma$ и любого конечного множества $M \subseteq P_\Sigma$ устанавливает, полно ли множество M в $\mathcal{P}_\Sigma$.*

Теорема 3.3.

а) $\mathcal{P}_\Sigma$ — правильная тогда и только тогда, когда существуют A_i в Σ_1 и B_j в Σ_2, такие, что $|A_i \cap B_j| \geqslant 2$.

б) $\mathcal{P}_\Sigma$ содержит предполные классы и замкнутые классы, отличные от P_Σ и не содержащиеся ни в одном предполном классе тогда и только тогда, когда для любых $A_i \in \Sigma_1$ и $B_j \in \Sigma_2$ справедливо $|A_i \cap B_j| \leqslant 1$ и существуют $A_{i'} \in \Sigma_1$ и $B_{j'} \in \Sigma_2$ такие, что $|A_{i'} \cap B_{j'}| = 1$.

в) $\mathcal{P}_\Sigma$ не содержит предполных классов тогда и только тогда, когда для любый $A_i \in \Sigma_1$ и $B_j \in \Sigma_2$ имеет место $A_i \cap B_j = \varnothing$.

Теорема 3.4. *$\mathcal{P}_\Sigma$ конечно-породжденная тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_\Sigma$ правильная.*

Полное множество $M \subseteq P_\Sigma$ называется базисом, если любое его собственное подмножество не полно.

Теорема 3.5. *$\mathcal{P}_\Sigma$ имеет базис тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно-порожденная.*

Теорема 3.6. *Минимальная мощность базиса в $\mathcal{P}_\Sigma$ равна $|\Sigma_2|$.*

Теорема 3.7. *Мощность множества замкнутых классов в $\mathcal{P}_\Sigma$ равна континууму тогда и только тогда, когда $\Sigma \neq (\{\{a,b\}\},\{\{a,b\}\})$, где $a \neq b$.*

Замкнутое множество $M \subseteq P_\Sigma$ называется открыто-замкнутым, если его дополнение замкнуто. По определению считаем пустое множество также замкнутым. Опишем все открыто-замкнутые множества в $\mathcal{P}_\Sigma$. На множестве Σ_2 введем отношение эквивалентности R такое, что $B_j R B_{j'}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_l}$ элементов B_{j_u} из Σ_2 такая, что $B_{j_1} \cap B_j \neq \varnothing$, $B_{j_l} \cap B_{j'} \neq \varnothing$ и для любого $p, 1 \leqslant p \leqslant l-1$, имеет место $B_{j_p} \cap B_{j_{p+1}} \neq \varnothing$. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_q$ — соответствующие классы эквивалентности. Если $f \in P_\Sigma$, то через K_f обозначим множество всех таких функций g из P_Σ, что при помощи только отождествления и переименования переменных из g может быть получена функция f. Пусть $C = (\bigcup\limits_{i=1}^{s}) \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{t})$. Элементы непустого множества C назовем абсолютными константами. Пусть Q — множество всех таких функций f из P_Σ, которые зависят только от переменных $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s$; $Q' \subseteq Q$; $C' \subseteq C$, и пусть каждое A_i содержит не более одной абсолютной константы. Обозначим через $C'(Q')$ множество всех функций из Q, которые получаются из функций множества Q' путем обязательной подстановки всех абсолютных констант из C' вместо всех возможных переменных. Далее, если $Q'' \subseteq C'(Q)$, то через $(C')^{-1}(Q'')$ обозначим множество всех тех функций f из Q, для которых $C'(\{f\}) \subseteq Q''$ (вместо $C'(\{f\})$ будем использовать обозначение $C'(f)$, понимая под ним функцию, из которой состоит множество $C'(\{f\})$). В случае, когда $C' = \varnothing$, по определению полагаем $C'(Q') = Q' = (C')^{-1}(Q')$.

Теорема 3.8. *Множество $M \subseteq P_\Sigma$ является открыто-замкнутым тогда и только тогда, когда:*

a) если каждое A_i содержит не более одной абсолютной константы, то для некоторого множества $S \subseteq C(Q)$ имеет место $M = \bigcup\limits_{f \in C^{-1}(S)} K_f$, б) *если некоторое A_i содержит более одной абсолютной константы, то для некоторого множества $T \subseteq \{1, 2, \ldots, q\}$ имеет место* $M = \bigcup\limits_{r \in T} \bigcup\limits_{B_j \in E_r} P_{\Sigma}^{B_j}$.

Теорема 3.9. *Проблема полноты для и. ф. с. $\mathcal{P}_{\Sigma}$ алгоритмически разрешима.*

Указанные результаты получены в [17], там же решены задачи о полноте для $\mathcal{P}_{\Sigma}$ при малых мощностях множеств Σ_1 и Σ_2.

4. Функции с задержками

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_l$ и $t \in N_0$. Пару $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$ называем функцией f с задержкой t и множество всех таких пар обозначаем через $\tilde{P}_l$. Распространим на $\tilde{P}_l$ операции η, τ, Δ и ∇, полагая, если μ — любая из них, что $\mu((f, t)) = (\mu(f), t)$. Введем еще одну операцию $*_c$, называемую синхронной подстановкой, полагая для пар

$$(f, t), (f_1, t'), (f_2, t'), \ldots, (f_n, t'),$$

в которых множества переменных у функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ попарно не пересекаются, выполненным соотношение

$$(f, t) *_c ((f_1, t'), (f_2, t'), \ldots, (f_n, t')) = (f(f_1, f_2, \ldots, f_n), t + t').$$

Множество операций $\eta, \tau, \Delta, \nabla, *_c$ обозначим через Ω_{cc} и назовем операциями синхронной суперпозиции. Пусть $M \subseteq \tilde{P}_l$ и $J_{\Omega_{cc}}(M) = M$, тогда ф. с. $\mathcal{M} = (M, \Omega_{cc})$ называем итеративной ф. с. Поста функций с задержками рода l (и. ф. с. ф. з.)

Коротко изложим основные итоги изучения этих ф. с. [11, 17].

Теорема 4.1. *В конечно-порожденной и. ф. с. ф. з. $\mathcal{M}$ рода l множество $\Sigma_{\pi}(\mathcal{M})$ строится эффективно для любого l.*

Теорема 4.2. *Для конечно-порожденной и. ф. с. ф. з. рода l проблемы полноты и выразимости алгоритмически разрешимы для любого l.*

Теорема 4.3. *Для каждого l из N_l существуют и. ф. с. ф. з. рода l, для которых выполнено:*

а) *имеется счетный базис;*

б) *имеется конечный базис заданной мощности;*

в) *не имеется базиса.*

Следствие. *Решетка замкнутых классов в $\tilde{\mathcal{P}}_l$ континуальна для всех l.*

Примером конечно-порожденной и. ф. с. ф. з. является

$$\tilde{\mathcal{P}}_l = (\tilde{P}_l, \Omega_{cc}).$$

Для $\tilde{\mathcal{P}}_l$ теорема 4.1. уточняется следующим образом. Обозначим через $M^{(1)}$ множество всех функций f таких, что при некотором t выполнено $(f, t) \in M$.

Теорема 4.4. *Множество $M \subseteq \tilde{P}_l$ является полным в $\tilde{\mathcal{P}}_l$ точно тогда, когда $J_{\Omega_c}(M^{(1)}) = P_l$ и $M \supseteq \{(f, 1)\}$, где $f \notin E_l$.*

Пусть $\mathcal{M} = (M, \Omega_{cc})$ и $M' \subseteq M$. Говорят, что M' является слабо полным в M, если для всякой функции f из $M^{(1)}$ найдется t, такое что $(f, t) \in J_{\Omega_{cc}}(M')$. Множество M' называется слабо предполным, если оно не слабо полное, но превращается в таковое при добавлении любой пары из $M \setminus M'$. Класс всех таких множеств обозначим через $\Sigma_{c\pi}(\mathcal{M})$. Класс $K \subseteq \Sigma(\mathcal{M})$ называем слабо критериальным, если множество M' является слабо полным точно тогда, когда для любого T из $\Sigma(\mathcal{M})$ выполнено $M' \nsubseteq T$. Очевидно, для слабо критериальной системы K всегда выполнено $K \supseteq \Sigma_{c\pi}(\mathcal{M})$.

Теорема 4.5. *Для конечно-порожденной и. ф. с. ф. з. $\mathcal{M} = (M, \Omega_{cc})$ рода l выполнены положения:*

а) *множество $\Sigma_{c\pi}(\mathcal{M})$ конечно или счетно;*

б) *множество $\Sigma_{c\pi}(\mathcal{M})$ слабо критериально;*

в) *множество $\Sigma_{c\pi}(\mathcal{M})$ строится эффективно.*

Теорема 4.6. *Для конечно-порожденных и. ф. с. ф. з. типа l проблема слабой полноты алгоритмически разрешима для любого l.*

Явное описание множества $\Sigma_{c\pi}(M)$ получено пока для $l = 2$ и много позже для $l = 3$ [11, 22]. Приведем описание случая $l = 2$.

Пусть $M \subseteq P_2$ и $M \in \{C_2, C_3, D_3, A_1, L_1\}$, обозначим через $\tilde{M}$ множество всех пар (f, t) таких, что $f \in M$ и $t \in N_0$.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_2 называется α-, β-, γ- или δ-функцией, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна x, 1, 0 или $\overline{x}$, соответственно. Пусть A, B, Γ, D суть классы всех α-, β-, γ- или δ-функций, соответственно.

Обозначим через $\tilde{C}$ множество всех пар вида $(f, t+1)$, $(\varphi, t+1)$, $(\psi, 0)$, где $f \in B$, $\varphi \in \Gamma$, $\psi \in A$, $t \in N_0$.

Пусть $i \in \{0, 1\}$, обозначим через E_i множество всех пар вида $(f, 0), (\overline{i}, t+1), (i, t)$, где $f \in C_{i+2}$, $t \in N_0$.

Назовем функцию f четной, если выполнено $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

Пусть Y — множество всех четных функций.

Пусть $\tilde{H}$ множество всех пар вида $(f, 0), (\varphi, t{+}1)$, где $\varphi \in Y$, $f \in S$, $t \in N_0$.

Для каждого r из N_0 обозначим через $\tilde{W_r}$ множество пар вида $(f, (2t+1)2^r), (\varphi, (2t+1)2^s), (\psi, 0)$, где $f \in D, \varphi \in A$, $\psi \in A$, $t \in N_0$, $s \in N_0 \setminus \{0, 1, 2, \ldots, r\}$.

Для каждого r из N_0 обозначим через $\tilde{Z}_r$ множество пар вида $(f, (2t+1)2^r), (0, t), (1, t), (\varphi, (2t+1)2^s), (\psi, 0)$, где $\overline{f} \in M$, $\varphi \in M$, $\psi \in M$, $t \in N_0$, $s \in N_0 \setminus \{0, 1, 2, \ldots, r\}$.

Пусть $\tilde{W} = \{\tilde{C_2}, \tilde{C_3}, \tilde{D_3}, \tilde{A_1}, \tilde{L_1}, \tilde{C}, \tilde{E_0}, \tilde{E_1}, \tilde{H}, \tilde{Z_0}, \tilde{Z_1}, \ldots, \tilde{W_0}, \tilde{W_1}, \ldots\}$.

Теорема 4.7 ([11]). *Имеет место равенство* $\Sigma_{c\pi}(\tilde{\mathcal{P}}_2) = \tilde{W}$.

Заметим, что явное описание $\Sigma_{c\pi}(\tilde{\mathcal{P}}_l)$ для любого l имеется пока лишь в виде отдельных семейств слабо предполных классов [17, 23].

Содержательный интерес представляют другие модификации проблемы полноты для и. ф. с. ф. з., рассмотренные в работе [17].

5. Автоматные функции

Рассмотренное в предыдущем разделе обобщение функций l-значной логики до функций с задержками является промежуточным при переходе к классу автоматных функций, свойства которого логически выглядят существенно сложнее, чем у функций с задержками.

Для введения понятия автоматной функции потребуются вспомогательные обозначения и определения.

Пусть C — конечное или счетное множество, которое называем алфавитом. Последовательность букв из C называем словом, если она конечна, и сверхсловом, если она бесконечна. Класс всех таких слов обозначим через C^*, а сверхслов — через C^ω. Пусть $\overline{C} = C^* \cup C^\omega$ и $\xi \in \overline{C}$. Слово, образованное первыми r буквами из ξ, называем префиксом для ξ и обозначаем через $\xi]r$. Пусть A и B — алфавиты и $f : A^* \to B^*$. Если $\xi = c(1)c(2)\dots c(r)$, то r называем длиной слова ξ и обозначаем через $\|\xi\|$. Пусть A и B — алфавиты и $f : A^* \to B^*$. Функцию f называем детерминированной (д. функцией), если для любого ξ из A справедливо $\|f(\xi)\| = \|\xi\|$, а для любых ξ_1 и ξ_2 из A^* и любого i такого, что $1 \leqslant i \leqslant \min(\|\xi_1\|, \|\xi_2\|)$, если $\xi_1]_i = \xi_2]_i$ то $f(\xi_1)]_i = f(\xi_2)]_i$. Известно, что д. функция f может быть рекуррентно задана с помощью так называемых канонических уравнений вида

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)), \quad t = 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{1}$$

где параметр q называется состоянием для f и принимает значения из алфавита Q. Эта рекуррентность определяется так. Если $\alpha \in A^*$, $\beta \in B^*$, $\kappa \in Q^*$ и $\alpha = a(1)a(2)\dots a(r)$, $\beta = b(1)b(2)\dots b(r)$, $\kappa = q(1)q(2)\dots q(r)$, то при $f(\alpha) = \beta$ слово β индуктивно вычисляется по α следующим образом:

а) $b(1) = \psi(q(1), a(1))$, где $q(1) = q_0$;

б) если при $1 \leqslant t \leqslant r-1$ вычислено $q(t)$, то $q(t+1) = \varphi(q(t), a(t))$ и $b(t) = \psi(q(t), a(t))$.

Часто предполагают, что алфавиты A и B являются декартовыми степенями E_l, то есть $A = (E_l)^n$ и $B = (E_l)^m$ где $n, m, p \in N$. В этом случае от рассмотрения одноместной д. функции $f(x)$ вида $f : ((E_l)^n)^* \to ((E_l)^m)^*$ удобно перейти к n-местной д. функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вида $f' : ((E_l)^n)^* \to ((E_l)^m)^*$ следующим образом.

Пусть $\zeta^n \in (E_k^*)$ и $f(\zeta^n) = \zeta'^m$, где $\zeta^n = c^n(1)c^n(2)\dots c^n r$ и $\zeta'^m = c'^m(1)c'^m(2)\dots c'^m(r)$; при этом $c^n(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))$

и $c'^m(t) = (e'_1(t), e'_2(t), \ldots, e'_m(t))$, где $1 \leqslant t \leqslant r$. Пусть $\zeta_i = e_i(1)e_i(2)\ldots e_i(r)$ и $\zeta'_j = e'_j(1)e'_j(2)\ldots e'_j(r)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$.

Теперь полагаем $f'(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = (\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_m)$. Функция f' получается из f фактически только за счет перехода от рассмотрения матриц, образованных вектор-буквами (строками) слов ζ^n и, соответственно, слов ζ'_m, к их представлению в виде столбцов. Канонические уравнения (2) для f' получаются из (1) заменой там всех параметров на соответствующие векторные значения, то есть

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), e_1(t), \ldots, e_n(t)), \\ b_j(t) = \psi(q(t), e_1(t), \ldots, e_n(t)), \quad t = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \tag{2}$$

Функцию f' считаем интерпретацией для f и называем автоматной (а. функцией).

Параметры n и m называем, соответственно, местностью и размерностью а. функции, а мощность множества значений параметра q — числом ее состояний. Содержательным толкованием а. функции $f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ является функционирование технического устройства F вида, указанного на рисунке 2. Здесь входные стрелки обозначены буквами x_i, а выходные — буквами y_j. Считается, что F функционирует в дискретные моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ В эти моменты каждые вход x_i и выход y_j могут принимать значения из E_l; само же устройство может находиться в состояниях, кодируемых значениями из Q, называемых также памятью для F. По набору

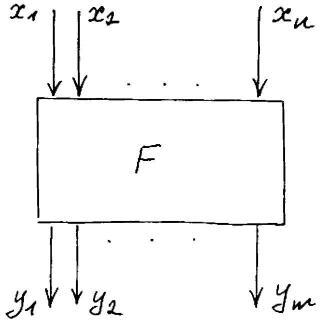

Рис. 2.

значений входов и состоянию в момент t устройства F по правилам (2) определяют значения его выходов и состояние в момент $t+1$.

Обозначим через $P_{a,l}^{n,m}$ класс всех а. функций с заданными параметрами n и m из N. Пусть $P_{a,l} = \bigcup\limits_{n,m\geqslant 1} P_{a,l}^{n,m}$.

Распространим на $P_{a,l}$ операции $\eta, \tau, \Delta, \nabla$, а также введем другие операции.

Пусть $f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_m)$, тогда $(\pi_j f')(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $f'_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совпадает со значением y_j у $f'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $f''(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+v}) = (y_{m+1}, \ldots, y_{m+w})$, тогда $(f'\sigma f'')(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+v}) = (f'(x_1, x_2, \ldots, x_n), f''(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+v})) = (y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+w})$.

Пусть u такое, что $m+1 \leqslant u \leqslant m+u$, тогда $(f' \overset{*}{\underset{u}{}} f''(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+v}) = (z_1, z_2, \ldots, z_{m+w-1})$, где $z_j = f'_j * f''_u$ при $j = 1, 2, \ldots, m$ и $z_{j'} = f''_{j'}(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+v})$ при $j' = m+2, m+3, \ldots, m+t$.

Операции π и σ называются, соответственно, проектированием и объединением, а операция вида $\overset{*}{\underset{u}{}}$ является распространением операции $*$ с одномерного случая функций на вектор-функции и попрежнему называется подстановкой.

В совокупности операции $\eta, \tau, \Delta, \nabla, \pi, \sigma$ и $\overset{*}{\underset{u}{}}$ называем операциями расширенной суперпозиции и обозначаем через Ω_{pc}.

Введем еще одну операцию над а. функциями, которую назовем обратной связью и обозначим через O.

Говорят, что а. функция f' имеет тип $i - j$, если для f' найдется система вида (2) такая, что функция $\psi_j(q, e_1, e_2, \ldots, e_n)$ фиктивно зависит от значений e_i. Пусть f' такая а. функция; рассмотрим функцию вида $(O_j^i f')(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_m)$, которая определяется так. Пусть заданы слова вида $\xi_l = e_l(1)e_l(2)\ldots e_l(r)$, где $l = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. Тогда с помощью (2) по набору $(e_l(1), e_2(1), \ldots, e_{i-1}(1), e_{i+1}(1), \ldots, e_n(1))$ можно вычислить значение $b_j(1)$. Подставим теперь в (2) вместо $e_i(1)$ значение $b_j(1)$, после чего можно вычислить наборы $(q(2))$ и $(b_1(1), b_2(1), \ldots, b_m(1))$. Далее, так же можно по набору

$(e_1(2), e_2(2), \ldots, e_{i-1}(2), e_{i+1}(2), \ldots, e_n(2))$ вычислить значение $b_j(2)$. Снова, подставив значение $b_j(2)$ вместо $e_i(2)$ в (2), можно вычислить наборы $(q(3))$ и $(b_1(2), b_2(2), \ldots, b_m(2))$ и т. д.

Теперь полагаем $(O^i_j f')(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{i-1}, \zeta_{i+2}, \ldots, \zeta_n) = (\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_{i-1}, \zeta'_{i+2}, \ldots, \zeta'_m)$, где $\zeta'_{l'} = b_{l'}(1) b_{l'}(2) \ldots b_{l'}(r)$ и $l' = 1, 2, \ldots, j-1, j+2, \ldots, m$. Положим $\Omega_{pc,O} = \Omega_{pc} \bigcup \{O\}$. Класс операций $\Omega_{c,O}$ называется композицией.

Говорят, что а. функция f' из $P_{a,l}$ является конечно-автоматной (к. а. функция), если алфавит Q некоторой системе (2), задающей эту функцию, конечен. Класс всех к. а. функций с параметрами n и m обозначим через $P^{n,m}_{a,l,k}$. Полагаем далее, что $P_{a,l,k} = \bigcup\limits_{n,m \geqslant 1} P^{n,m}_{a,l,k}$. Говорят, что а. функция является истинностной (и. а. функция), если в системе (2), задающей ее, алфавит Q — одноэлементный. Обозначим через $P^{n,m}_{a,l,\text{и}}$ и $P^{n,m}_{a,l,k,\text{и}}$ классы всех истинностных а. функции и, соответственно, истинностных к. а. функций (и. к. а. функция) с параметрами n и m. Положим, что $P_{a,l,\text{и}} = \bigcup\limits_{n,m \geqslant 1} P^{n,m}_{a,l,\text{и}}$ и $P_{a,l,k,\text{и}} = \bigcup\limits_{n,m \geqslant 1} P^{n,m}_{a,l,k,\text{и}}$.

Содержательно истинностные а.функции интерпретируются с одной стороны как функционирование устройства F без памяти, а с другой стороны могут считаться реализациями функций из P_l с учетом времени t, которое пробегает значения $1, 2, \ldots$, в каждый из которых зависимость значения функции от значений переменных одна и та же.

Таким образом, и. ф. с. (P_l, Ω_c) при расширении в них объекта P_l до множества вектор-функций l-значной логики и, соответственно, операций — до Ω_{pc}, фактически приводят к и. ф. с. $\mathcal{P}_{a,l,\text{и}} = (P_{a,l,\text{и}}, \Omega_{pc})$.

Заметим также, что функция с задержкой интерпретируется как функционирование такого устройства F с n входами и одним выходом, значение $b(t)$ которого при некоторых τ из N_0 и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_l в каждый момент $t \geqslant \tau + 1$ определяется таким соотношением $b(t) = f(a_1(t-\tau), a_2(t-\tau), \ldots, a_n(t-\tau))$, которое, очевидно, может быть описано системой вида (2).

Пусть $M \subseteq P_{a,l}$, тогда при $J_{\Omega_{pc}}(M) = M$ ф. с. $\mathcal{M} = (M, \Omega_{pc})$ и при $J_{\Omega_{pc,O}}(M) = M$ ф. с. $M = (\mathcal{M}, \Omega_{pc,O})$ называются итеративными ф. с. Поста автоматных функций (и. ф. с. а. ф.)

Примерами таких ф. с. являются ф. с. вида $\mathcal{P}_{a,l,\text{И}}$. При заданном l из N_1 назовем основными и. ф. с. а. ф. следующие

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}_{a,l,k} = (P_{a,l,k}, \Omega_{pc}) & \mathcal{P}^*_{a,l,k} = (P_{a,l,k}, \Omega_{pc,0}) \\ \mathcal{P}_{a,l} = (P_{a,l}, \Omega_{pc}) & \mathcal{P}^*_{a,l} = (P_{a,l}, \Omega_{pc,0}) \end{array} \tag{3}$$

Изложим главные результаты по нашей проблематике для и. ф. с. а. ф.

Теорема 5.1 ([24]). *Для любого l из N_1 среди основных и. ф. с. а. ф. конечно-порожденной является только ф. с. $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$.*

Теорема 5.2 ([13]). *Для любых l из N и m из N_1 в $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$ существует счетное множество базисов мощности m.*

А. функция, образующая полную систему в $\mathcal{M}$, называется Шефферовой. Дальнейшее упрощение базиса достигается за счет минимизации числа переменных, размерности и числа состояний у Шефферовой а. функции. Следующее утверждение дает окончательный ответ о виде простейших в этом смысле Шефферовых а. функций.

Теорема 5.3 ([25]). *Для любого l из N_1 в $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$ существуют Шефферовые одномерные а. функции от двух переменных и с двумя состояниями.*

Для других основных и. ф. с. а. ф. ответ по проблеме базисов дает такое утверждение.

Теорема 5.4 ([24]). *Для любого l из N_1 в $\mathcal{P}_{a,l}$ и $\mathcal{P}^*_{a,l}$ базисов не существует, в $\mathcal{P}_{a,l,k}$ существует счетный базис, а также полная система, не содержащая в себе базиса.*

По проблеме полноты ситуацию описывают следующие утверждения.

Теорема 5.5 ([17]). *Для основных и. ф. с. а. ф. множество $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ образует k-систему точно при $\mathcal{M} = \mathcal{P}^*_{a,l,k}$ для любого l из N_1.*

Теорема 5.6 ([13]). *Множество $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ континуально при $\mathcal{M} \in \{\mathcal{P}_{a,l,k}, \mathcal{P}^*_{a,l,k}\}$ и гиперконтинуально при $\mathcal{M} \in \{\mathcal{P}_{a,l}, \mathcal{P}^*_{a,l}\}$ для любого l из N_1.*

В качестве следствия заключаем, что указанными в теореме 4.6. мощностями обладают соответствующие решетки замкнутых классов в основных и. ф. с. а. ф.

Назовем систему $\Sigma' \subseteq \Sigma(\mathcal{P}^*_{a,l,k})$ k-критериальной, если всякое конечное множество $M \subseteq \mathcal{P}_{a,l,k}$ является полным точно тогда, когда для любого множества $K \in \Sigma'$ выполнено $M \nsubseteq K$.

Теорема 5.7 ([13]). *В $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$ существуют счетные k-критериальные системы вида $\Sigma' \subseteq \Sigma_\pi(\mathcal{P}^*_{a,l,k})$ для любого l из N_1.*

Отметим, что в общем случае задание а. функций из $\mathcal{P}_{a,l}$ не является эффективным, поэтому проблема выразимости и полноты может ставится лишь для эффективно задаваемых систем.

Теорема 5.8 ([14]). *Проблема выразимости для эффективно задаваемых конечных систем а. функций в основных и. ф. с. а. ф. и проблема полноты в $\mathcal{P}_{a,l}$ алгоритмически не разрешимы для любого l из N_1.*

Таким образом, расширение функциональных возможностей а. функций по отношению к функциям l-значной логики и функциям с задержками резко усложняет решение интересующих нас проблем для алгебр а. функций. Изучение природы этой сложности осуществлялось в разных направлениях.

Мы остановимся здесь на задаче о приближенной полноте и на задаче о полноте специально обогащенных систем а. функций.

Первая из этих задач имеет две модификации — задача о τ-полноте ($\tau \in N$) и задача об аппроксимационной полноте (A-полноте), которым посвящается следующий параграф. Обратим внимание на специальные ф. с. $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ и $\mathcal{P}_4$, которые являются подалгебрами соответствующих основных и. ф. с. а. ф. из (3). Каждая из них состоит из всех одноместных и одномерных а. функций из носителей указанных основных и. ф. с., а в качестве операций в них выступают те же операции, что и в соответствующих и. ф. с. а. ф., кроме операций σ и π. Как установлено в [32, 24], они не имеют базисов. Кроме того, $\mathcal{P}_1$ содержит подалгебру ${\mathcal{P}'}_1$ всех взаимнооднозначных отображений, которая является группой с операцией подстановки, моделируя частью себя группу Бернсайдовского типа [23], то есть такую конечнопорожденную группу, в которой порядки элементов конечны, но в совокупности не ограничены. Открытыми остаются вопросы о наличии базисов в $\mathcal{P}'_1$, а также задачи об алгоритмической разрешимости свойства конечности порядков ее элементов и выразимости этих элементов через другие. В заключение отметим, что теоремы 5.1, 5.2, 5.5, 5.6 и упомянутые здесь факты об одноместных алгебрах остаются справедливыми и в случае расширения значения l до счетного в ф. с. функций, которые тем самым обобщают а. функции.

6. Условия τ- и A-полноты для а. функций

Говорят, что а. функции f и g τ-эквивалентны, если они совпадают на всех входных словах длины τ (обозначение: $f\,\tau\,g$), и A-эквивалентны, если $f\,\tau\,g$ для любого τ из N.

На множестве $B(P_{a,l})$ введем отношение, полагая для $M, M' \subseteq P^*_{a,l}$ выполненным $M\Delta_\tau M'$, если для всякой функции f из M найдется g из M', что $f\,\tau\,g$. Ясно, что это отношение образует предпорядок, а, значит, может быть представлено как отношение частичного порядка на классах эквивалентности, включающих в себя все такие элементы M и M', для которых выполнены соотношения $M\Delta_\tau M'$ и $M'\Delta_\tau M$; что обозначаем $M\,\tau\,M'$, а сами элементы называем τ-эквивалентными.

На $B(P_{a,l})$ введем еще одно отношение, полагая для $M, M' \subseteq P^*_{a,l}$ выполненным $M\Delta_A M'$, если для всякого τ из N имеет место $M\,\tau\,M'$. Это отношение также является предпорядком и для представителей M и M' его класса эквивалентности, когда тем самым выполнено $M\Delta_A M'$ и $M'\Delta_A M$, пишем $M\,A\,M'$; а сами представители называем A-эквивалентными.

Теорема 6.1 ([15]). *Для любых $M \subseteq P_{a,l}$ и $\tau \in N$ выполнено $J_{\Omega_{pc}}(M)\,\tau\,J_{\Omega_{pc,O}}(M)$ и $J_{\Omega_{pc}}(M) A J_{\Omega_{pc,O}}(M)$.*

Таким образом, действия операторов $J_{\Omega_{pc}}$ и $J_{\Omega_{pc,O}}$ с точностью до τ-и A-эквивалентностей совпадают, а тем самым в этом смысле операция обратной связи O оказывается моделируемой операциями расширенной суперпозиции, чем мы в дальнейшем будем пользоваться.

Пусть $M, M' \subseteq P_{a,l}$. Говорят, что M является τ-выразимым через M', если $M \Delta_\tau J_{\Omega_{pc}}(M')$, и A-выразимым через M'', если $M \Delta_A J_{\Omega_{pc}}(M'')$.

Теорема 6.2. *Для эффективно задаваемых конечных множеств $M, M' \subseteq P_{a,l}$ отношение $M \Delta_\tau J_{\Omega_{pc}}(M')$ алгоритмически разрешимо для любого τ из N.*

Теорема 6.3 ([27]). *Для конечных множеств $M, M' \subseteq P_{a,l,k}$ отношение $M \Delta_A J_{\Omega_{pc}}(M')$ алгоритмически не разрешимо.*

Пусть $M \subseteq P_{a,l}$ и $M A J_{\Omega_{pc}}(M)$. Назовем множество $M' \subseteq M$ τ-полным в M, если $J_{\Omega_{pc}}(M') \, \tau \, M$ и A-полным, если $J_{\Omega_{pc}}(M') \, A \, M$.

Теорема 6.4. *Если $M \subseteq P_{a,l}$, $M \, A \, J_{\Omega_{pc}}(M)$, M — разрешимо, в M есть конечное A-полное подмножество и $\tau \in N$, то существует алгоритм, устанавливающий по любому конечному разрешимому подмножеству $M' \subseteq M$, является ли оно τ-полным в M.*

На самом деле, эта теорема следует из теоремы 2.2, в чем убеждаемся так. Пусть $f \in P_{a,l}$ и $\tau \in N$. Рассмотрим множество E_l^τ в предположении, что его элементы кодируются словами длины τ в алфавите E_l. Тогда, рассматривая функцию f из $P_{a,l}$ только на словах длины τ, можно считать ее принадлежащей P_l^τ. Таким образом от рассмотрения а. функций мы перешли к функциям l^τ-значной логики. Остается заметить, что операции расширенной суперпозиции в вопросах выразимости и полноты фактически редуцируются к операциям суперпозиции. Далее, из теоремы 5.9 и соотношения $P_{a,l,k} \, A \, P_{a,l}$ вытекает такое утверждение.

Теорема 6.5. *Условия τ-полноты и A-полноты соответственно совпадают для всех основных и. ф. с. а. ф.*

Отметим существенное отличие понятий τ-полноты и A-полноты, которое дается следующим предложением.

Теорема 6.6. *В каждой из основных и. ф. с. а. ф. существуют конечные A-полные системы, а также счетные A-полные системы, не содержащие конечных A-полных подсистем.*

Отличие же понятий τ-полноты и A-полноты доставляет такое утверждение.

Теорема 6.7 ([27]). *Если $M \subseteq P_{a,l,k}$ и M — конечно, то не существует алгоритма, устанавливающего по M, является ли оно A-полным в $P_{a,l,k}$.*

В то же время имеется определенное сходство понятий τ- и A-полноты и оно проявляется прежде всего в подходе к решению задач о τ- и A-полноте в терминах предполных классов.

Если $M \subseteq P_{a,l}$, $M\,A\,J_{\Omega_{pc}}(M)$ и $M' \subseteq M$, то называем множество M' τ-предполным в M, если оно не τ-полно в M, но для любой функции f из $M \setminus M'$ множество $M' \cup \{f\}$ является τ-полным в M. Аналогично вводится понятие A-предполного множества. Пусть $\Sigma_{\pi,\tau}(M)$ и $\Sigma_{\pi,A}(M)$ суть множества всех τ-предполных и A-предполных множеств в M, соответственно.

Теорема 6.8. *Если $M \subseteq P_{a,l}$ и $M\,A\,J_{\Omega_{pc}}(M)$, то $\Sigma_{\pi,A}(M) = \bigcup\limits_{\tau \geqslant 1} \Sigma_{\pi,\tau}(M)$.*

Теорема 6.9. *Если $\lambda \in \{\tau, A\}$, $\tau \in N$, $M \subseteq P_{a,l}$, $M\,A\,J_{\Omega_{pc}}(M)$, в M есть конечное λ-полное подмножество и $M' \subseteq M$, то M' является A-полным в M точно тогда, когда для любого $K \in \Sigma_{\pi,\lambda}(M)$ выполнено $M' \not\subseteq K'$.*

Это утверждение с учетом теорем 6.5 и 6.8 сводит решение задач о τ- и A-полноте в основных и. ф. с. а. ф. к описанию множества $\Sigma_{\pi,\tau}(P_{a,l})$, которое было получено в [15]. Приведем это описание.

Пусть $t \in N$, обозначим через E_l^t множество всех слов $\varepsilon = e(1)e_2 \ldots e(t)$ длины t в алфавите E_l. При $h \in N$ и $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$, где $t_i \in N$ при $t \in N_1^h$, положим $E_l^T = E_l^{t_1} \times E_l^{t_2} \times \ldots \times E_l^{t_h}$. Пусть $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — h-местный предикат, аргументы y_i которого принимают значения из $E_l^{t_i}$. Как и выше, пусть ρ_1 и ρ_0 суть, соответственно, множества истинных и ложных наборов значений переменных для ρ. Говорим, что а. функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $P_{a,l}$ сохраняет ρ, если из истинности каждого элемента строки

$$\rho(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_h^1), \rho(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_h^2), \ldots, \rho(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots, \alpha_h^n)$$

вытекает истинность выражения

$$\rho(f(\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^n), f(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_2^n), \ldots, f(\alpha_h^1, \alpha_h^2, \ldots, \alpha_h^n)).$$

Класс всех таких а. функций обозначим через $U_a(\rho)$.

Введем функцию $\nu : E_l^* \times E_l^* \to N_0$. Пусть $\varepsilon_1 = E_l^{t_1}$, $\varepsilon_2 = E_l^{t_2}$, $t = \min\{t_1, t_2\}$.

Тогда:

$$\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } e_1(1) = e_2(1), \ldots, e_1(t) = e_2(t), \\ i, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant t-1 \text{ и } \varepsilon_1(1) = \varepsilon_2(1), \ldots, \\ \qquad \varepsilon_1(t-i) = \varepsilon_2(t-i), \text{ но } e_1(t-i+1) \neq e_2(t-i+1), \\ t, \text{ если } \varepsilon_1(1) \neq \varepsilon_2(2). \end{cases}$$

На множестве E_l^T определим отношение предпорядка $\leqslant$.

Пусть $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ и $A' = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_h')$ — элементы из E_l^T. Пишем $A' \leqslant A$, если из включения $i, j \in N_1^h$, следует $\nu(\alpha_i', \alpha_j') \leqslant \nu(\alpha_i, \alpha_j)$.

Пусть $t' = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_h\}$, $h \leqslant l^t$ и $t' \geqslant 2$; если $l = 2$, то полагаем $h = 2$. Пусть в A при $h \geqslant 2$ и условии, что $i \neq j$ выполнено $\nu(\alpha_i, \alpha_j)$. Множество всех A', что $A' \leqslant A$, назовем ν-множеством, задаваемым элементом A, и обозначаем через ξ. Такое ξ разбиваем на два подмножества: $\xi^{(m)}$, состоящее из всех максимальных по $\leqslant$ элементов, и $\xi^{(\underline{m})}$, включающее остальные элементы из ξ. Так, при $h = 1$ имеем $\xi^{(\underline{m})} = \varnothing$. Ясно, что значение $\nu(\alpha_i, \alpha_j)$ не зависит от выбора A из $\xi^{(\underline{m})}$, поэтому вместо $\nu(\alpha_i, \alpha_j)$ пишем $\nu(i, j)$.

Для $l \geqslant 2$ и $t \geqslant 1$ укажем семь семейств предикатов.

Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$ и $\xi \subseteq E_l^T$. Подстановку γ чисел $1, 2, \ldots, h$ назовем ξ-подстановкой, если для $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ из ξ выполнено $\alpha_{\gamma(1)}, \alpha_{\gamma(2)}, \ldots, \alpha_{\gamma(h)}) \in \xi$.

Пусть $s \geqslant 1$, назовем множество

$$\{(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_h^1), (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_h^2), \ldots, (\alpha_1^s, \alpha_2^s, \ldots, \alpha_h^s)\}$$

элементов из $\xi^{(m)}$ ξ-совместимым, если существует совокупность ξ-подстановок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ такая, что для любых q и p из N_1^s, а также i и j из N_1^h выполнено $\nu_\xi(i, j) \leqslant \nu(\alpha_{\gamma q}^q(i), \alpha_{\gamma p}^p(j))$.

Пусть $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — предикат, для которого $\rho_1 \subseteq \xi$. Назовем ρ ξ-рефлексивным, если $\xi^{(m)} \subseteq \rho_1$, и ξ-симметричным, если для $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ из ρ_1 и ξ-подстановки γ всегда выполнено $(\alpha_{\gamma(1)}, \alpha_{\gamma(2)}, \ldots, \alpha_{\gamma(h)}) \in \rho_1$.

ξ-рефлексивный и ξ-симметричный предикат ρ называем ξ-элементарным, если множество $\xi \setminus \rho_1$ является ξ-совместимым. Для такого ρ при $A \in \xi \setminus rho_1$ и $i \in N_1^h$ определим подмножества $C_\rho^i(A)$, $Q_\rho^i(A)$ и $\varepsilon_\rho^i(A)$ множества E_l так:

а) $a \in C_\rho^i(A)$ точно тогда, когда найдется $\alpha_i' \in E_l^{ti}$, что $\nu(\alpha_i, \alpha_i') \leqslant 1$, $\alpha_i'(t_i) = a$, а любой элемент $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_h')$ из ξ содержится в ρ_1;

б) $b \in Q_\rho^i(A)$ точно тогда, когда в $\xi \setminus \rho_1$ найдется элемент $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i'', \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_h)$ такой, что $\nu(\alpha_i, \alpha_i'') \leqslant 1$ и $\alpha_i''(t_i) = b$;

в) множество $\varepsilon_\rho^i(A)$ совпадает с C_ρ^i, если $C_\rho^i \neq \varnothing$, и с $Q_\rho^i(A)$ в противном случае.

Пусть $n \geqslant 1$ и $R = \{\rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^n\}$ — произвольная система ξ-элементарных предикатов. Называем R T-совместимой, если для любых $\sigma \in N_1^n$, $i \in N_1^h$ и $A \in \xi \setminus \rho_1^\sigma$ выполнено $Q_\rho^i(A) \neq E_l$. Называем R W-совместимой, если для всех $\sigma, \sigma' \in N_1^n$, $i \in N_1^h$, $A \in \xi \setminus \rho_1^\sigma$, $A' \in \xi \setminus \rho_1^\sigma$ множества $C_\rho^{i\sigma}(A)$ и $C_\rho^{i\sigma'}(A)$ одновременно либо пусты, либо непусты, причем при $C_\rho^{i\sigma}(A) = \varnothing$ для всякого $b \in E_l$ существует $j \in N_1^h$ такое, что $t_j = t_i$, $\nu_\xi(i,j) \leqslant 1$, $a \in Q_\rho^{j\sigma}(A)$.

Пусть $n \geqslant 1$, $\sigma_i \in N_1^q$, $A_i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, $A^i \in \xi \setminus \rho_1^{\sigma_i}$ и $j_i \in N_1^h$ при $i \in N_1^n$. Тогда, если $\sigma_i \neq \sigma_i'$ при $i \neq i'$ и $t_{j_i} = t_{j_{i'}}$, а также $\nu(\alpha_{j_1}^1, \alpha_{j_{i''}}^2) \leqslant 1$ для всех $i, i' \in N_1^q$ и выполнено $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_{\rho_1^{q_i}}^{j_i}(A^i) = \varnothing$, то систему R называем Q-совместимой.

Пусть $n \geqslant 2$, $i \in N_1^n$, $\sigma_j \in N_1^q$ и $A^i \in \xi \setminus \rho_1^{\sigma_i}$. Положим, что для всех $j, j' \in N_1^n$ при $j \neq j'$ выполнено $\nu(\alpha_1^j, \alpha_1^{j'}) \neq 1$. Пусть для всех $i_j, i_{j'} \in N_1^h$ выполнено $t_{i_j} = t_{i_{j'}}$, и при $j > 1$ справедливо $\nu(\alpha_{i_{j'}}, \alpha_{i_j}) \leqslant 1$, а также имеет место $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_{\rho^{\sigma_j}}^{i_j}(A^j) = \varnothing$.

Предположим, что при этих условиях существуют $l_v \in N_1^n$, $v \in N_1^q$, что $i_{l_v} \in N_1^2$, множества A^{l_v} являются ξ-совместимыми и

$\bigcap\limits_{v=1}^{q} \varepsilon^{i_{l_v}}_{\rho^{\sigma_{l_v}}} = \varnothing$. Тогда говорим, что система R является D-совместимой.

Семейство предикатов $Z_l(\tau)$. Это семейство не пусто при $l \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Предикат ρ входит в $Z_l(\tau)$ точно тогда, когда $\rho_1 \subseteq E_l^T$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$, $h \geqslant 1$, $\max\{t_1, t_2, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$ и для некоторого $m \geqslant 1$ выполнено $\rho_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \rho_1^i$, где ρ^i является ξ-элементарным предикатом, а сами ρ^i образуют T-, W-, Q-совместимую систему, а для любых $j \in N_1^h$ и $A \in \xi \setminus \rho_1$ множество $C_\rho^i(A)$ непусто.

Семейство предикатов $J_l(\tau)$. Оно не пусто при $\tau \geqslant 1$ и $l > 2$, а также при $\tau \geqslant 2$ и $l = 2$. Предикат ρ входит в $J_l(\tau)$ точно тогда, когда $\rho_1 \subseteq \xi \subseteq E_l^T$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$, $h \geqslant 3$, $\max\{t_1, t_2, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$, для некоторого $m \geqslant 1$ выполнено $\rho_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \rho_1^i$, где ρ^i является ξ-элементарным, а сами ρ^i образуют T-, W-, Q-совместимую систему; существуют числа $i, j, l \in N_1^h$, $i \neq j, i \neq l, j \neq l$, что для A из $\xi \setminus \rho_1^1$ множество $C_\rho^u(A)$ пусто при $u \in \{i, j, l\}$.

Семейство предикатов $D_l(\tau)$. Оно не пусто при $\tau \geqslant 1$, если $l > 2$, и при $\tau \geqslant 2$, если $l = 2$. Предикат ρ входит в $D_l(\tau)$ точно тогда, когда, $\rho_1 \subseteq \xi \subseteq E_l^T$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$, $h \geqslant 2$, $\max\{t_1, t_2, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$, для некоторого $m \geqslant 1$ выполнено $\rho_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \rho_1^i$, где ρ^i является ξ-элементарным, а сами ρ^i образуют T-, W- и D-совместимую систему; для любого $A \in \xi \setminus \rho$ множества $C_\rho^1(A)$ и $C_\rho^2(A)$ пустые; если $h \geqslant 3$, то для i из N_1^h выполнено $C_\rho^i(A) \neq \varnothing$; если $h = 2$, то $\rho_1 \bigcap \xi^{(M)} \neq \varnothing$.

Пусть далее $l \geqslant 2, t \geqslant 1, T = (t, t), \xi_t \subseteq E_l^T$, ξ_t есть ν-подмножество и $\nu_{\xi_t}(1, 2) = 1$.

Семейство предикатов $M_l(\tau)$. Оно не пустое при $l \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Предикат ρ входит в $M_l(\tau)$ точно тогда, когда $\rho_1 \subset \xi_t, t \leqslant \tau$, ρ_1 совпадает с отношением частичного порядка, определенном на E_l^T и имеющим точно l^{t-1} минимальных и l^{t-1} максимальных элементов.

Семейство предикатов $S_l(\tau)$. Оно не пустое при $l \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Предикат ρ входит в $S_l(\tau)$ точно тогда, когда $\rho_1 \subset \xi_t, t \leqslant \tau$, существует подстановка σ_ρ на E_l^T, разлагающаяся в произведение циклов одинаковой простой длины $p \geqslant 2$, график которой совпадает с ρ_1, то есть если $a \in E_l^T$, то $(a, \sigma_\rho(a)) \in \rho_1$ и если $(a_1, a_2) \in \rho_1$, то $a_2 = \sigma_\rho(a_1)$.

Пусть $t \geqslant 1$, $\Phi_t^{\sim}$ — класс всех отображений φ множества E_l^T в множество подстановок на E_l. Значение φ на a обозначаем φ_a.

Пусть $\Phi_t \subseteq \Phi_t^{\sim}$ и Φ_t состоит из всех φ таких, что $\varphi_a = \varphi_{a'}$ при $\nu(a, a') \leqslant 1$. Положим $h \in \{3, 4\}$, $T_h = \{t, t, \ldots, t\}$, $K_t^h \subseteq E_l^{T_h}$ и K_t^h состоит из всех элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$ таких, что при $i, j \in N_1^h$ выполнено $\nu(a_i, a_j) \leqslant 1$.

Пусть $l = p^m$, p — простое, $m \geqslant 1$, $G =< E_l, + >$ — абелева группа, в которой каждый ненулевой элемент имеет простой порядок p.

При $p \neq 2$ пусть $l_p \in N_1^{p-1}$ и $2l_p = 1 \pmod p$.

Семейство предикатов $L_l(\tau)$. Оно не пусто только при $l = p^m$, p — простое, $m \geqslant 1$, $\tau \geqslant 1$. Предикат ρ входит в $L_l(\tau)$ точно тогда, когда для некоторого φ из Φ_t, $t \leqslant \tau$, справедливо следующее:

а) Пусть $k = p^m$, $p > 2$. Тогда $\rho_1 \subset K_t^3$ и (a_1, a_2, a_3) из K_t^3 входит в ρ_1 если только $\varphi_{a_1}(a_3(t)) = l_p(\varphi_{a_1}(a_1(t)) + \varphi_{a_1}(a_2(t)))$.

б) Пусть $k = 2^m$. Тогда $\rho_1 \subset K_t^h$ и (a_1, a_2, a_3, a_4) из K_t^4 входит в ρ_1, если только $\varphi_{a_1}(a_1(t)) + \varphi_{a_1}(a_2(t)) = \varphi_{a_1}(a_3(t)) + \varphi_{a_1}(a_4(t))$.

Отметим, что указанные семейства при $\tau = 1$ соответственно совпадают с известными семействами для P_l из раздела 2.

Пусть $t \geqslant 2$, $T = (t, t)$, $\xi_t^{\sim}$ есть ν-подмножество E_l^T такое, что $\nu_{\xi_t^{\sim}}(1, 2) = 2$.

Семейство предикатов $V_l(\tau)$. Оно не пусто при $l \geqslant 2$, $\tau \geqslant 2$. Предикат ρ входит в $V_l(\tau)$ точно тогда, когда $\rho_1 \subset \xi_t^{\sim}$, $t \leqslant \tau$, и выполнено: $(a_1, a_2) \in \xi_t^{\sim} \bigcap \rho_1$ точно тогда, когда $a_1(t) = a_2(t)$; существует φ из Φ_t такое, что включение $(a_1, a_2) \in \xi_t^{\sim(M)} \bigcap \rho_1$ эквивалентно существованию α из E_l такому, что $a_1(t) = \varphi_{a_1}(\alpha)$ и $a_2(t) = \varphi_{a_2}(\alpha)$.

Пусть $W_l(\tau) = Z_l(\tau) \cup J_l(\tau) \cup D_l(\tau) \cup M_l(\tau) \cup S_l(\tau) \cup L_l(\tau) \cup V_l(\tau)$, и $U(W_l(\tau))$ — множество классов а. функций, сохраняющих предикаты из $W_l(\tau)$.

Теорема 6.10 ([15]). *Имеет место равенство* $\Sigma_{\pi,\tau}(P_{a,l}) = U(W_l(\tau))$.

7. Условия полноты для специальных систем а. функций

Другой путь изучения свойств полноты систем а. функций достигается как за счет обогащения операций над а. функциями, так и систем а. функций, исследуемых на полноту. Остановимся на второй ситуации.

Здесь обращают на себя внимание два подхода.

Первый подход состоит в рассмотрении задачи Слупецкого для ф. с. $\mathcal{P}_{a,l,k}$, а второй — в рассмотрении таких систем а. функций из $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$, которые содержат некоторый замкнутый класс истинностных а. функций.

Следуя [28], назовем конечную систему T к. а. функций из $\mathcal{P}_{a,l,k}$ системой Слупецкого, если $J_{\Omega_{pc}}(P^{1,1}_{a,l,k} \cup T) = P_{a,l,k}$.

Теорема 7.1 ([29]). *Для любых l из N_1 системы Слупецкого к. а. функций из $P_{a,l,k}$ существуют.*

Затем в работе [30] было установлено такое предложение.

Теорема 7.2. *Для любого l из N_1 существует алгоритм, который устанавливает для конечного множества к. а. функций из $\mathcal{P}_{a,l,k}$, является ли оно системой Слупецкого.*

Предполный класс основной и. ф. с. а. ф. называем классом Слупецкого, если он содержит все однородные функции из носителя и. с. а. ф. Теоремы 7.1 и 7.2 интересно сопоставить со следующим утверждением.

Теорема 7.3. *Мощность множества классов Слупецкого равна континууму в ф. с. $\mathcal{P}_{a,l,k}$ и $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$ и равна гиперконтинууму в ф. с. $\mathcal{P}_{a,l}$ и $\mathcal{P}^*_{a,l}$ при любом l из N_1.*

Это утверждение указывает на важное отличие условии полноты в общем случае и в случае систем Слупецкого. Заметим, что свойство гиперконтинуальности в этой теореме сохраняется и для ф. с. функций, получающихся из а. функций обобщением значения параметра l до счетного.

Второй подход сначала был реализован в виде следующего факта.

Теорема 7.4 ([31]). *Для любого l из N_1 существует алгоритм, который для любого конечного множества $M \subseteq P_{a,l,k}$ устанавливает, является ли множество $M \cup P_{a,l,k}$ полным в $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$.*

Затем этот подход был развит для $l = 2$ до следующего положения. Пусть T — замкнутый класс Поста функций алгебры логики, которые будем интерпретировать как истинностные к. а. функции. Обозначим через K_T класс всех конечных множеств M к. а. функций из $P_{a,2,k}$ таких, что $M \supseteq T$. Нас будет интересовать вопрос существования алгоритма, который для любого M из K_T устанавливает, полно ли это множество в $\mathcal{P}^*_{a,2,k}$. Точнее, для каких T этот алгоритм существует. Ясно, что если для некоторого T такой алгоритм существует, то и для всякого класса Поста T' такого, что $T' \supseteq T$, он также существует. Наоборот, если такого алгоритма нет, то для всякого класса Поста $T'' \subseteq T$ его также нет. Тем самым отделимость алгоритмически разрешимых случаев от неразрешимых достигается указанием такого семейства Φ классов Поста T, для которых свойство полноты алгоритмически не разрешимо, но для любого класса Поста такого, что $T' \supset T$, оно уже разрешимо.

Теорема 7.5 ([16]). *Справедливо соотношение*

$$\Phi = \{F_1^\infty, F_2^\infty, F_3^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_8^\infty, L_2, L_3, L_5, S_6, P_6, O_9\}.$$

Наглядность этого утверждения доставляет рис. 1.

Частным случаем этого утверждения является теорема 7.4 при $l = 2$.

Отметим, что, как показывается в [16], утверждение теоремы 7.5 остается справедливым и для случая A-полноты при соответствующей интерпретации множества Φ.

8. Линейные а. функции

Назовем а. функцию из $P_{a,l,k}$ линейной (л. а. ф.), если в ее системе (1) вектор-функции φ и ψ являются линейными по модулю l относительно своих переменных. Класс всех линейных а. функций обозначим через $L_{a,l,k}$. Нетрудно видеть, что $I_{\Omega_{pc,O}}(L_{a,l,k}) = L_{a,l,k}$. Рассмотрим ф. с. $\mathcal{L}_{a,l,k} = (L_{a,l,k}, \Omega_{pc})$ и $\mathcal{L}^*_{a,l,k} = (L_{a,l,k}, \Omega_{pc,O})$.

Теорема 8.1. *Из ф. с. $\mathcal{L}_{a,l,k}$ и $\mathcal{L}^*_{a,l,k}$ конечно-порожденной является только $\mathcal{L}^*_{a,l,k}$.*

Решение задачи о полноте для $\mathcal{L}^*_{a,l,k}$ получено при $l = 2$, которое мы приводим [12], полагая далее обозначение L_a вместо $L_{a,l,k}$ и $\mathcal{L}_a$ вместо $\mathcal{L}_{a,l,k}$.

Пусть Γ_a, $a \in E_2$, — класс всех л. а. ф. $f(x_2, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, таких что $f(a, a, \ldots, a) = (a, a, \ldots, a)$.

Говорят, что л. а. ф. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ со сдвигом зависит от x_i, если в некоторой ее системе (1) в уравнениях для ψ x_i отсутствует; в противном случае x_i называем непосредственным.

Пусть V_1 класс всех л. а. ф., имеющих не более одного непосредственного переменного.

Пусть V_2 класс всех л. а. ф., имеющих нечетное число непосредственных переменных.

Обозначим через R_C класс всех л. а. ф., имеющих точно одно существенное переменное, а через R_H — класс всех л. а. ф. точно с одним непосредственным переменным.

Класс всех л. а. ф. без существенных переменных обозначим через C.

Пусть $a^s[0]$ — слово длины s вида $00\ldots0$.

Обозначим через L^0 класс всех л. а. ф. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, таких что $f(a^s[0], a^s[0], \ldots, a^s[0]) = (a^s[0], a^s[0], \ldots, a^s[0])$ для любых s из N.

Пусть L_1 класс всех л. а. ф. от одного переменного и $L^0_1 = L^0 \bigcap L_1$. Через $E_2[z]$ обозначим кольцо многочленов переменного z над полем E_2 с обычными операциями сложения и умножения многочленов. Для $\{u, v, u', v'\} \subset E_2[z]$ рассматриваем дроби $\frac{u}{v}$, $\frac{u'}{v'}$, которые считаем равными, если для некоторых u_1, u_2 из $E_2[z] \backslash \{0\}$ справедливо $uu_1 = u'u_2$ и $vu_1 = v'u_2$. Степень многочлена u обозначим через $\deg(u)$. Пусть $Q_2(z)$ — множество всех дробей $\frac{u}{v}$, причем $u \in E_2[z] \setminus \{0\}$, и если $\frac{u}{v}$ — несократимая, то v' не делится на z. Можно показать, что L^0_1 и $Q_2(z)$ изоморфны (обозначение: $\sim$) с сохранением операций умножения и сложения, поэтому допускают определенное отождествление между собой.

Пусть $\frac{u}{v} \in Q_2(z)$, $f \in L_a$ и $\frac{u}{v} \sim f$. Говорят, что f обладает O-свойством, если или $\frac{u}{v} \in R_H$ и $\deg u = \deg v$, или $\frac{u}{v} \notin R_H$ и $\deg u < \deg v$.

Будем считать многочлены p_i из $Q_2(z)$ упорядоченными по возрастанию степеней, то есть при $i \in N$ выполнено $\deg p_i \leqslant \deg p_{i+1}$, причем $p_1 = \xi$. Если $u + v$ или v делится на ξp_i, то говорим, что f обладает i-свойством. Если $\deg u < \deg v$, то f обладает o'-свойством;

если $\deg u \leqslant \deg v$, то f обладает o''-свойством. Если u делится на p_i, то f обладает i'-свойством; если v не делится на P_i, то f обладает i''-свойством.

Пусть $M_i^{(1)}$ состоит из всех л. а. ф. f, обладающих i-свойством, $i \in N_0$; $R_i^{(1)}$ — из всех л. а. ф. f с i'-свойством.

Для л. а. ф. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всегда найдутся такие функции $f_1(x_1, f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$ из L_1 и γ из C, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + \gamma \pmod 2.$$

Обозначим множество функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ через $\nu(f)$.

Пусть M_i состоит из всех таких л. а. ф. f, что $U(f) \subset M_i^{(1)}$.

Пусть для л. а. ф. f выполнено: если x_j — единственное существенное переменное, то f_j из $U(f)$ обладает i''-свойством, если же для x_j указанное свойство отсутствует, то f_j обладает i'-свойством.

Класс всех таких f обозначим через R_i^C.

Пусть для л. а. ф. f выполнено: если x_j — единственное непосредственное переменное, то f_j из $U(f)$ обладает i''-свойством, в противном случае f обладает i'-свойством.

Обозначим через J семейство, состоящее из всех классов

$$J_0, J_1, V_1, V_H, M_i, R_j^C, R_j^H \text{ при } i \in N_0, j \in N_0 \setminus \{1\}.$$

Теорема 8.2 ([12]). *Справедливо соотношение* $\Sigma_\pi(\mathcal{L}_a^*) = J$.

Тем самым в ф. с. $\mathcal{L}_a^*$ имеется лишь счетное множество предполных классов и они в силу конечной порожденности $\mathcal{L}_a^*$ образуют критериальную систему. По аналогии со случаем функций с задержками для $\mathcal{L}_a^*$ имеет место следующее утверждение.

Теорема 8.3 ([12]). *Существует алгоритм, устанавливающий для любой конечной системы л. а. ф. из* $\mathcal{L}_a^*$*, полна ли она.*

Список литературы

[1] Автоматы / Сборник статей под редакцией Маккарти и Шеннона. М.: ИЛ., 1956.

[2] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды математ. института им. В. А. Стеклова. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 5–142.

[3] Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton, 1941.

[4] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[5] Ло Чжу-Кай. Предполные классы, определяемые k-арными отношениями в k-значной логике // Asta Sci. natur. Univ. Jilinesis. 1964. V. 3.

[6] Ло Чжу-Кай, Лю Сюй Хуа. Предполные классы, определяемые бинарными отношениями в многозначной логике // Asta Sci. natur. Univ. Jilinesis. 1963. V. 4.

[7] Захарова Е. Ю. Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. Вып. 18. М.: Наука, 1967. С. 5–10.

[8] Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Наука, 1960. С. 49–60.

[9] Пан Юн-Цзе. Один разрешающий метод для отыскания всех предполных классов в многозначной логике // Asta Sci. natur. Univ. Jilinesis. 1962. V. 2.

[10] Rosenberg J. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1965. V. 260. P. 3817–3819.

[11] Кудрявцев В. Б. Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Наука, 1962. С. 91–115.

[12] Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3. М.: Наука, 1995. С. 140–166.

[13] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. Вып. 13. М.: Наука, 1965. С. 45–74.

[14] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155. № 1. С. 35–37.

[15] Буевич В. А. О τ-полноте в классе детерминированных функций // ДАН. 1992. Т. 326. № 3. С. 399–404

[16] Бабин Д. Н. Неразрешимость полноты и A-полноты автоматных функций с истинностной системой типа F^∞, S, P, O // Дискретная математика. Т. 6. Вып. 1. 1995.

[17] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: Изд-во МГУ, 1982.

[18] Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

[19] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразие Поста // Алгебра и логика, семинар. Т. 5. Вып. 2. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1966.

[20] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 144–146.

[21] Захарова Е. Ю, Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k-значных логиках // ДАН СССР. 1969. Т. 186. № 3. С. 509–512.

[22] Rosenberg I., Hikata T. Completeness for uniformly delayed circuits // Proceedings of the 13th International Symposium on Multiple-Valued Logic. Kyoto, Japan, May 23–25, 1983. P. 1–9.

[23] Алешин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. Вып. 3. С. 319–328.

[24] Кудрявцев В. Б, Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[25] Ветренникова Е. В. Один простой пример универсальной о. д. функции // Дискретный анализ. Новосибирск: Институт математики СО АНСССР, 1983. С. 5–11.

[26] Бабин Д. Н. О суперпозициях ограниченно-детерминированных функций // Мат. заметки. Вып. 3. Т. 47. 1990. С. 3–10.

[27] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для ограниченно-детерминированных функций // Математические заметки. Вып. 6. 1972. С. 687–697.

[28] Slupecki J. Kriterium petnosci wielowartosciowych systemow logoco zdan // Comptes rendus des scances de la Societe des Sciences et des Letters Varsovie. 1939. Cl. 111. T. 32. P. 102–109.

[29] Бабин Д. Н. О полноте двухместных о. д. функций относительно суперпозиций // Дискретная математика. 1989. Т. 1. Вып. 4. С. 86–91.

[30] Буевич В. А. Разрешимость проблемы Слупецкого для автоматов // Дискретная математика. 1995. Т. 4. Вып. 4.

[31] Бабин Д. Н. Неразрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. Т. 4. Вып. 4. 1992. С. 41–55.

[32] Алешин С. В. Об отсутствии базисов в некоторых классах инициальных автоматов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1970. Вып. 22. С. 67–75.