Системы автоматов в лабиринтах*

В. Б. Кудрявцев, Г. Килибарда (Сербия),
Ш. Ушчумлич (Сербия)

Анализируется развитие сравнительно нового направления теории автоматов — поведение автоматов в лабиринтах, по тематике которого имеется уже более ста публикаций. Выделяются основные понятия, проблематика, достижения, методы решения задач и открытые проблемы по этой области. Основные утверждения в ряде случаев приводятся в более сильном виде, чем у авторов.

Введение

В последние десятилетия все большее внимание привлекает тематика, связанная с автоматным анализом геометрических сред, изображений, графов, формальных языков и других дискретных структур. В этом направлении уже опубликовано более ста научных статей.

Одна из основных проблем этого направления теории автоматов — нахождение выхода из лабиринта — уходит своими корнями в античность и связана с общеизвестным мифом о Тезее, который решает аналогичную задачу по отношению к Кносскому лабиринту. Эта основная задача постепенно усложнялась, появлялись новые, тесно связанные с ней проблемы, а вместе с ними и новые понятия, возникали новые вопросы, расширялись сферы применимости. Интерес к этому кругу проблем особенно усилился с развитием кибернетики.

Важную роль в становлении этого направления сыграла работа К. Шеннона [61]. В ней рассматривается модель мыши в виде автомата, которая должна найти определенную цель в лабиринте. Это

*Работа поддерживалась грантом РФФИ № 06-01-00240.

в значительной мере определило тематику исследований на многие годы.

Другим источником направления можно считать рассмотрение вычислительных систем с внешней памятью в виде дискретной плоскости или дискретного пространства П. Фишера [23].

Однако идеи, предложенные в этих работах, довольно долго не получали дальнейшего развития. Это было связано с рядом причин. В первом случае автомат-мышь действовал в геометрической среде, в то время как еще не вполне было ясно, как автомат преобразует свою входную полугруппу слов, не имеющих никакой интерпретации. Выяснению этого и были посвящены основные усилия исследователей в области теории автоматов.

Во втором случае внимание специалистов быстро было переключено на многоленточные вычислители, что и вытеснило модель Фишера.

Активное изучение поведения автоматов в лабиринтах и на графах началось после появления работ К. Деппа [19, 20]. В них была уточнена модель К. Шеннона: в качестве лабиринта рассматривалась подобная шахматной доске конфигурация клеток на плоскости или аналогичных кубиков в пространстве (шахматные лабиринты), а в качестве автоматов — конечные автоматы, которые, обозревая некоторую окрестность клетки, в которой они находятся, могут перемещаться в соседнюю клетку в одном из координатных направлений. В [19, 20] получены некоторые результаты по задаче обхода таких лабиринтов автоматами, и как актуальный выделен вопрос о существовании автомата, обходящего все лабиринты; приведены соображения в пользу того, что в случае пространственного лабиринта для автомата можно построить лабиринт-ловушку. Х. Мюллеру [48] удалось построить для заданного автомата плоскую ловушку в виде 3-графа, а Л. Будах [10] решил более сложный случай этой проблемы — построение шахматной ловушки для любого заданного конечного автомата, однако его обоснование оказалось слишком громоздким. А. С. Подколзин [95, 96] значительно упростил доказательство этого факта, а Г. Килибарда [40, 89] дает другое, методически более наглядное решение этой проблемы, техника которого позволила решить и некоторые другие задачи типа задач обхода. Х. Антельман [2] оценил сложность такой ловушки по числу клеток в ней, а Х. Мюллер [49] указал, что всегда в качестве ловушки можно выбрать r-связный лабиринт, причем $r \leqslant 3$. Затем Х. Антельман, Л. Будах и Х. Роллик [1] построили конечную ловушку для конечной системы автоматов и бесконечную ловушку сразу для всех конечных систем автоматов.

Характеризацию специальных типов графов-лабиринтов, «правильно» укладывающихся в плоскость, которые появляются в упомянутых выше работах, дали Ф. Хофман и К. Кригел [35], а также независимо от них подобную характеризацию получили Г. Вияян и А. Вигдерсон в работе [67].

Наряду с результатами, указывающими на ограниченность возможностей автоматов, были построены примеры классов лабиринтов, которые обходятся одним автоматом (Г. Ассер [3], Р. Данецки и М. Карпински [18], К. Депп [19, 20], Г. Килибарда [84, 88], Г. Килибарда и Ш. Ушчумлич [90] и др.). А. Н. Зыричев [81] установил, что класс всех плоских шахматных лабиринтов, имеющих дыры ограниченного диаметра, обходится одним автоматом. А. А. Золотых [80] расширил этот класс, показав, что можно рассматривать ограниченность дыр лишь по фиксированному направлению. В работах [80, 81, 88, 90] содержатся также оценки времени обхода этих лабиринтов и числа состояний для автоматов.

Невозможность обхода всех плоских шахматных лабиринтов одним автоматом выдвинула вопрос об изучении возможных усилений модели автомата, уже решающей задачу обхода. Исследовано несколько вариантов таких усилений. Главным из них является система взаимодействующих автоматов, называемая коллективом. В отличие от системы независимых автоматов коллектив анализирует лабиринты с учетом положения его «членов» в них. Другое усиление возможностей одного автомата восходит к Р. Фишеру [23] и состоит в разрешении автомату делать отметки в лабиринте. В случае, когда такие отметки могут ставиться и стираться, получаем машину Тьюринга общего типа и потому рассматриваемые здесь задачи легко решаемы. Значит, надо ограничивать право автомата на отметки. Здесь возникли случаи нестираемых, иерархичных, а также «мерцающих» отметок и др., [74, 75, 111, 113]. Содержательно, возможность делать такие отметки означает, что автомат обладает внешней неограниченной памятью. Поскольку автомат может в принципе, не считаясь с какими-то конкретными ограничениями, делать бесконечное количество таких отметок, то эти отметки в упомянутых работах называются красками. Таким образом, как и следовало ожидать, возможности автоматов резко усилились.

Оказалось, например, что для заданной размерности пространства n существует автомат с одной нестираемой краской, который обходит любой n-мерный прямоугольный лабиринт [112].

Кроме задачи обхода рассматривалась и другая, тесно связанная с ней проблема, — проблема остановки автомата в лабиринте. Она состоит в следующем: существует ли для некоторых содержательно интересных классов лабиринтов, имеющих хотя бы один универсальный обходчик, автомат, который после обхода любого лабиринта из этого класса останавливается в нем. М. Бул и А. Хемерлинг [15] показали, что при решении проблемы остановки, автоматы являются еще более бессильными моделями, чем при решении проблемы обхода.

Как выяснилось, независимая система автоматов оказалась слишком слабой при решении значительной части задач, возникающих в этой области. Поэтому предлагались различные усиления этой модели вплоть до модели машины Тьюринга (в ее обобщенном виде). Поскольку машина Тьюринга легко решает рассматриваемые данным направлением задачи, то самым интересным и главным усилением модели независимой системы автоматов оказывается коллектив автоматов.

В отличие от независимых систем автоматов коллектив автоматов анализирует лабиринты с учетом положения его «членов» в лабиринте. Коллективы автоматов могут быть снабжены камнями, играющими роль ограниченной внешней памяти для коллективов. Камень — это флажок-метка, который может быть или «на руках» у любого автомата, или в некоторой вершине обследуемого коллективом лабиринта. Автомат может забирать или оставлять камень в вершине, в которой оказался, но общее количество камней у данного коллектива всегда является постоянным. Камни можно рассматривать также как автоматы простейшего вида, перемещение которых полностью определяется другими автоматами коллектива. Ф. Хофман [33, 34] установил, что коллектив из одного автомата и одного камня не может обойти все конечные плоские мозаичные лабиринты; М. Блюм и Д. Козен [7] показали, что коллектив из одного автомата и двух камней решает эту задачу, отметив при этом, что коллектив из двух автоматов также решает эту задачу. Наряду с этим в работах А. Хемерлинга [27] и К. Кригела [43] показано, что класс указанных лабиринтов допускает естественное расслоение, такое, что для любого его слоя найдется коллектив из одного автомата с камнем, обходящий этот слой; в качестве параметра расслоения здесь выступает число дыр в лабиринте.

Аналогичный вопрос для класса всех (конечных и бесконечных) плоских мозаичных лабиринтов исследуется в работах М. Блюма и У. Сакоды [6], З. Хабасинского и М. Карпинского [25], А. Шепитовского [63], Г. Килибарды [40, 89] и др. В них установлены некоторые простейшие по числу автоматов и камней коллективы, обходящие все такие лабиринты. Г. Килибарда в работах [40, 89] практически завершил описание всех таких коллективов (открытой проблемой остался только случай коллектива, состоящего из одного автомата и 4 камней); в этих же работах приведено решение указанной задачи для лабиринтов, не содержащих бесконечные дыры.

Для лабиринтов более общего вида М. Блюмом, У. Сакодой [6] и А. Хемерлингом [30] показано наличие ловушки уже в трехмерном случае. Установлено наличие бесконечной трехмерной ловушки сразу для всех коллективов автоматов [87]. При этом коллективы остаются в шаре ограниченного радиуса в этой ловушке. Подобные результаты оказываются верными и в планарном случае, для лабиринтов, имеющих вид кубического графа [55].

Специальными классами лабиринтов являются так называемые сигнатурные лабиринты и лабиринты Савича. Для первого вида в работе Г. Л. Курдюмова [108] описан коллектив автоматов, находящий специальную вершину в этих лабиринтах. Для второго вида установлено, что проблема выхода из них по специальным путям эквивалентна открытой проблеме совпадения языков, распознаваемых детерминированными и недетерминированными линейно ограниченными машинами Тьюринга, что свидетельствует о больших потенциальных трудностях тематики [58, 59].

Начато исследование задачи о встрече коллективов автоматов в лабиринтах. Одним из возможных толкований этой задачи может быть описание для заданного класса лабиринтов всех пар коллективов, которые встречаются в любом лабиринте из этого класса. А. Пултр и Й. Улехла [53] показали, что два коллектива, каждый из которых состоит из одного автомата и двух камней, могут решить задачу о встрече на плоскости, а в работе А. В. Анджанса [72] указаны простейшие типы коллективов автоматов, решающих задачу о встрече на прямой и в плоскости.

В работе В. И. Грунской ([77]) рассмотрен вариант задачи о встрече двух автоматов, находящихся в отношении «хищник — жертва», где «автомат-хищник» пытается догнать «автомат-жертву», а «автомат-жертва» стремится убежать от него; взаимодействие происходит в квадратном лабиринте. Приводятся условия, при которых указанная встреча происходит. В работах У. Койа [17], М. Була и А. Хемерлинга [15], А. В. Анджанса [72] и других авторов рассматривались возможности более общих моделей автоматов в лабиринтах. Так, например, в работе [17] показано, что автомат с магазинной памятью не может обойти все лабиринты, имеющие вид кубических графов, а в [72] приведены примеры автоматов со счетчиками, со стеками и магазинами, обходящих мозаичную плоскость. Установлено также, что существует автомат с магазином, который обходит любой конечный плоский односвязный шахматный лабиринт и останавливается после его обхода [15].

Задача анализа для автоматов и лабиринтов изучалась в работах многих авторов: М. Блюм и К. Хюит [5], М. Ейсмонт [21], К. Иноуе, И. Таканами и А. Накамура [36], К. Иноуе и А. Накамура [37], К. Иноуе и И. Таканами [38], Е. В. Кинбер [41], Д. Л. Милиграм и А. Розенфелд [46], Д. Л. Милиграм [47], Й. Милопулос [51], У. Савич [58, 59] и др. Она состоит для заданного коллектива автоматов в описании всех лабиринтов, которые обходятся этим коллективом при возможных дополнительных соглашениях типа требования остановки после обхода. Попытки описать эти лабиринты в виде алгебры Клини встретили затруднения [36]; трудности возникли также при выяснении отношений между классами лабиринтов, представляющих решение задачи анализа для заданных коллективов автоматов [38]. В работе [5] показано, что классы лабиринтов, обходимые автоматами с камнями, неограниченно возрастают с увеличением числа камней. Анализу свойств нагруженных графов посвящена работа Г. Ю. Кудрявцева [104], в которой устанавливается, с какой сложностью может быть решена задача эквивалентности поведения автоматов в таких графах. В работах [46, 52] устанавливается связь между классами лабиринтов и формальными языками, что приводит к переплетению проблематики и переходу к решению задач для автоматов в лабиринтах и для языков.

Как видно из перечисленных результатов, основная проблематика для автоматов в лабиринтах группируется вокруг задач, условно называемых задачами синтеза и анализа.

Задача синтеза состоит в описании тех автоматов и коллективов автоматов, которые обходят лабиринты из заданного класса. Главными объектами здесь выступают конечные автоматы с камнями, коллективы автоматов, автоматы с магазинной памятью и другие, а также конечные или бесконечные плоские мозаичные лабиринты, различные классы таких лабиринтов (как, например, лабиринты ограниченной связности, специальной геометрической формы), плоские, но немозаичные, мозаичные в пространстве, конечные и бесконечные лабиринты и их подклассы и обобщения. В случае, когда для класса лабиринтов отсутствуют автоматы заданного типа, обходящие эти лабиринты, возникают такие задачи, как выделение тех лабиринтов, в которых автоматы не решают задачу обхода, то есть лабиринтов-ловушек или просто ловушек, и нахождение среди этих ловушек таких, которые обладают некоторыми свойствами, например, являются простейшими.

Задача анализа, как уже было сказано выше, состоит в описании по заданному автомату или коллективу автоматов всех лабиринтов или всех лабиринтов определенного вида, которые обходятся этими автоматами. В качестве автоматов и лабиринтов выступают объекты, указанные в задаче синтеза. Продвижение в решении этой задачи в сравнении с задачей синтеза значительно скромнее и состоит, по-существу, в построении различных позитивных и негативных примеров возможных соответствий между конкретными множествами лабиринтов и автоматов, обходящих в точности эти лабиринты, или же отсутствие таковых и т. п.

К числу задач, примыкающих к указанным задачам синтеза и анализа, относится поиск конкретных целей в лабиринтах, например, специальных областей или других автоматов; установление определенных свойств лабиринтов, например, наличие специальных циклов, сильной связности и прочее. Сюда же могут быть отнесены и проблемы распознавания свойств геометрических изображений, допускающих описание с помощью формальных языков, и др.

В качестве главной модели выступают конечные автоматы в конечных плоских мозаичных и бесконечных плоских мозаичных лабиринтах.

Эта статья является развитием основных положений предыдущей работы авторов [44, 97] 1992 г. Здесь нашли отражение как новые результаты, так и уточнение ситуаций, описанных ранее.

В первых двух разделах даются основные понятия, связанные с данной тематикой и с приводимыми здесь результатами. В последнем разделе подробно рассматривается случай поведения независимых систем конечных автоматов в указанных классах лабиринтов и в некоторых их обобщениях.

1. Лабиринты. Основные классы лабиринтов

Обозначим множество всех натуральных чисел через $\mathbb{N}$, целых чисел — через $\mathbb{Z}$, действительных чисел — через $\mathbb{R}$, множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$ — через $\mathbb{N}_0$. Через $\mathbb{Z}^+$ и $\mathbb{R}^+$ обозначим, соответственно, множества положительных целых чисел и положительных действительных чисел. Также для любого $n \in \mathbb{N}$ положим, что $\overline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть X — некоторое множество. Через $|X|$ обозначим мощность множества X, через $\mathfrak{B}(X)$ — булеан множества X, то есть совокупность всех подмножеств множества X, а через $\mathfrak{B}_0(X)$ — совокупность всех непустых подмножеств множества X. Также для любого $m \in \mathbb{N}$ через $\mathfrak{B}^{\leqslant m}(X)$ $(\mathfrak{B}_0^{\leqslant m}(X))$ обозначим совокупность всех (непустых) подмножеств Y множества X, таких, что $|Y| \leqslant m$, а через $\mathfrak{B}^{=m}(X)$ — совокупность всех подмножеств Y множества X, таких, что $|Y| = m$.

Пусть $\{X_a : a \in A\}$ — некоторое индексированное семейство множеств X_a. Тогда для любого $a_0 \in A$ через $\mathbf{p}_{a_0}$ обозначим отображение проектирования произведения $\prod_{a\in A} X_a$ на сомножитель X_{a_0}.

Пусть A — конечный алфавит. Множество всех слов в алфавите A обозначаем через A^*, а множество всех непустых слов из A^* — через A^+. Если α — некоторое слово в A, то через $|\alpha|$ обозначим его длину; длина пустого слова Λ равна 0.

Поскольку лабиринт, по существу, является графом определенного вида, то ниже мы дадим некоторые необходимые сведения из теории графов. Кроме того, поскольку в литературе по теории графов одни и те же термины определяются по-разному, необходимо определить, что именно мы будем иметь в виду под некоторыми понятиями. Определения всех остальных понятий теории графов, которые упоминаются в тексте, но не определяются здесь, можно найти, например, в [82, 118].

Пусть V и E, $V \cap E = \varnothing$, — некоторые конечные или счетные множества, $\iota_1 : E \to V$ и $\iota_2 : E \to V$ — два произвольных отображения множества E в множество V, такие, что $(\iota_1)^{-1}(v)$ и $(\iota_2)^{-1}(v)$ конечные множества для любого $v \in V$. Тот факт, что $\iota_1(e) = v_1$ и $\iota_2(e) = v_2$ для некоторого $e \in E$, будем записывать более кратко через $e := (v_1, v_2)$. Пусть также $\bar{\cdot} : E \to E$ — некоторое частичное отображение множества E в себя (если определено значение этой функции для некоторого $e \in E$, то обозначим его через $\overline{e}$), которое удовлетворяет следующим условиям:

1) если $\overline{e} := (v_2, v_1)$ и $v_1 \neq v_2$, то $e := (v_1, v_2)$;
2) если $e := (v, v)$ и существует $\overline{e}$, то $\overline{e} := (v, v)$ и $e \neq \overline{e}$;
3) если $\bar{\cdot}$ определено на дуге e, то оно определено и на дуге $\overline{e}$, и $\overline{\overline{e}} = e$.

Тогда набор $G = (V, E, \iota_1, \iota_2, \bar{\cdot})$ называется *ориентированным графом* или *орграфом*. Элементы из V назовем *вершинами*, а элементы из E — *дугами* орграфа G. Дуга $e \in E$, у которой $\iota_1(e) = \iota_2(e)$, называется (*ориентированной*) *петлей*. Вершина v и дуга e *инцидентны*, если $\iota_1(e) = v$ или $\iota_2(e) = v$. Если для дуги e определено $\overline{e}$, то множество $<e> = \{e, \overline{e}\}$ называется *ребром*; про пару дуг e и $\overline{e}$ говорим также, что она является парой *противоположных* дуг. Если e — петля, то $<e>$ называется (*неориентированной*) *петлей.* Через $<E>$ обозначим множество всех ребер орграфа G.

В дальнейшем вместо $(V, E, \iota_1, \iota_2, \bar{\cdot})$ пишем (V, E), если, конечно, специально не оговаривается, о каких именно функциях ι_1, ι_1 и $\bar{\cdot}$ идет речь. В любом случае, несмотря на то, что из-за краткости в обозначениях будем опускать обозначения функций ι_1, ι_1 и $\bar{\cdot}$, мы предполагаем, что они существуют и заданы каким-то способом. Также, часто в последующем множество вершин орграфа G будем обозначать через $V(G)$, а множество его дуг — через $E(G)$.

Если существует $\overline{e}$ для любой $e \in E(G)$, то орграф G называется *симметрическим орграфом.*

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый орграф. Для любых $v_1, v_2 \in V$ обозначим $E_{v_1,v_2} = \{e \in E \,|\, e := (v_1, v_2)\}$. В случае, когда $v_1 = v_2 = v$, вместо E_{v_1,v_2} пишем также E_v°. Обозначим через E_v множество $\{e \in E \,|\, \iota_1(e) = v\}$. Орграф $G = (V, E)$ называется *орграфом без петель*, если $E_v^\circ = \varnothing$ для любого $v \in V$. Орграф $G = (V, E)$ называется *орграфом без кратных дуг*, если:

1) $|E_{v_1,v_2}| \leqslant 1$ для любых различных $v_1, v_2 \in V$;
2) $|E_v^\circ| \leqslant 2$ для любого $v \in V$, причем если $|E_v^\circ| = 2$, то множество E_v° состоит из пары противоположных петель.

Если заменим используемое выше для множества дуг обозначение E на обозначение $E(G)$, то тогда вместо обозначений E_{v_1,v_2}, E_v° и E_v будем писать, соответственно, $E_{v_1,v_2}(G)$, $E_v^\circ(G)$ и $E_v(G)$.

В орграфе G без кратных дуг и без петель дуги будем отождествлять с соответствующими упорядоченными парами точек, то есть пишем $e = (\iota_1(e), \iota_2(e))$ для любой $e \in E(G)$.

Пусть V и E, $V \cap E = \varnothing$, — некоторые конечные или счетные множества, $\iota : E \to \mathfrak{B}_0^{\leqslant 2}(V)$ — произвольное отображение множества E в множество $\mathfrak{B}_0^{\leqslant 2}(V)$, такое, что множество $E_v = \{e \in E \,|\, v \in \iota(e)\}$ конечно для любого $v \in V$. Тогда набор $G = (V, E, \iota)$ называется *графом.* Элементы множества V называем *вершинами*, а элементы множества E *ребрами* графа G. Тот факт, что $\iota(e) = b$, $b \in \mathfrak{B}_0^{\leqslant 2}(V)$, будем записывать более кратко через $e := b$. Ребро вида $e := \{v\}$ для некоторого $v \in V$ называется *петлей*. Вершина v и ребро e *инцидентны*, если $v \in \iota(e)$.

В дальнейшем вместо (V, E, ι) пишем (V, E), если, конечно, специально не оговаривается, о какой именно функции ι идет речь. В любом случае, несмотря на то, что из-за краткости в обозначениях будем опускать обозначение функции ι, мы предполагаем, что она существует и задана каким-то способом. Также, часто в последующем множество вершин графа G будем обозначать через $V(G)$, а множество его дуг — через $E(G)$.

Аналогичным способом, как и в случае орграфа, можно определить *граф без петель* и *граф без кратных ребер*.

Любая последовательность вида $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$, где $v_0, v_1, \ldots, v_n$ — вершины, а $e_1, \ldots, e_n$ — (ребра) дуги данного (графа) орграфа G, такая, что ($e_i := \{v_{i-1}, v_i\}$) $e_i := (v_{i-1}, v_i)$ для любого $i \in \overline{n}$, называется (*маршрутом*) *путем* или *ориентированным маршрутом* в G.

Каждому симметрическому орграфу $G = (V, E)$ можно вполне естественным образом сопоставить соответствующий граф $\overline{G}$: каждую пару противоположных дуг надо заменить ребром. И, наоборот, если G — граф и если каждое его ребро заменить парой противоположных дуг, то получаем симметрический орграф $\vec{G}$.

Пусть $G' = (V', E', \iota_1', \iota_2', \bar{\cdot})$ и $G'' = (V'', E'', \iota_1'', \iota_2'', \bar{\cdot})$ — два орграфа. Они являются *изоморфными*, если существует биекция $\vartheta : V' \cup E' \to V'' \cup E''$ такая, что $\vartheta(V') = V''$, $\vartheta(E') = E''$, $\overline{\vartheta(e)} = \vartheta(\overline{e})$ и $\vartheta(\iota_i(e)) = \iota_i(\vartheta(e))$ для любого $i \in \overline{2}$; функция ϑ в таком случае называется *изоморфизмом* орграфа G' на орграф G''. Аналогичным способом можно ввести понятие изоморфизма графов.

Пусть G — орграф, и пусть X и Y — некоторые множества. Если заданы некоторые функции $f : V(G) \to X$ и $g : E(G) \to Y$, то тройка (G, f, g) называется *нагруженным орграфом*, где X — множество *отметок вершин*, Y множество *отметок дуг*, g — *разметка вершин* и f — *разметка дуг* орграфа G. Для любых $u \in V(G)$ и $e \in E(G)$ значения $f(u)$ и $g(e)$ называются соответственно *отметкой вершины* u и *отметкой дуги* e в нагруженном орграфе (G, f, g). Если ясно, о каких функциях f и g идет речь, то для любых $u \in V(G)$ и $e \in E(G)$ вместо $f(u)$ пишем $|u|_G$, а вместо $g(e)$ пишем $|e|_G$. Также для любого

$v \in V(G)$ через $[v]_G$ обозначим множество $\{|e| \mid e \in E_v(G)\}$. Если из контекста ясно, о каком именно орграфе идет речь, то вместо $|u|_G$, $|e|_G$ и $[v]_G$ пишем соответственно $|u|$, $|e|$ и $[v]$.

Через $\mathcal{G}(X,Y)$ обозначим класс всех нагруженных орграфов с множеством X в качестве множества отметок вершин и Y в качестве множества отметок дуг этих орграфов.

Нагруженный орграф $(G_1, f_1, g_1) \in \mathcal{G}(X,Y)$ называется *частью* нагруженного орграфа $(G, f, g) \in \mathcal{G}(X,Y)$, если выполнены условия:

1) $V(G_1) \subseteq V(G)$ и $E(G_1) \subseteq E(G)$;
2) $f_1(u) = f(u)$ и $g_1(e) = g(e)$ для любых $u \in V(G_1)$ и $e \in E(G_1)$.

Часть (G_1, f_1, g_1) нагруженного орграфа (G, f, g) называется *подорграфом* (*подорграфом, порожденным множеством вершин* $V(G_1)$), если из $u, v \in V(G_1)$ следует, что $E_{u,v}(G) \subseteq E(G_1)$.

Нагруженные орграфы $(G_1, f_1, g_1) \in \mathcal{G}(X_1, Y_1)$ и $(G_2, f_2, g_2) \in \mathcal{G}(X_2, Y_2)$ называются *изоморфными*, $(G_1, f_1, g_1) \simeq (G_2, f_2, g_2)$, если существует изоморфизм ϑ орграфа G_1 на орграф G_2 такой, что

1) $(\forall v', v'' \in V(G_1)) \quad f_1(v') = f_1(v'') \Leftrightarrow f_2[\vartheta(v')] = f_2[\vartheta(v'')]$;
2) $(\forall e', e'' \in E(G_1)) \quad g_1(e') = g_1(e'') \Leftrightarrow g_2[\vartheta(e')] = g_2[\vartheta(e'')]$.

Пусть I — закрытый единичный интервал (со стандартной топологией, определенной на нем) и X — некоторое хаусдорфовое топологическое пространство. Непрерывное отображение $f : I \to X$ отрезка I в пространство X называется *путем* в X; точка $f(0)$ называется *начальной* точкой пути f, точка $f(1)$ — *конечной* точкой пути f, а обе эти точки — *концевыми* точками пути f.

Пусть Θ — конечное или счетное множество путей в X, таких, что выполнены следующие условия:

1) для любого $f \in \Theta$ и любых $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant 1$, если $f(r_1) = f(r_2)$, то $r_1 = 0$ и $r_2 = 1$ (f является путем в X без самопересечения, но может быть замкнутым — начальная и конечные точки могут совпадать);
2) множество $\{f \in \Theta \mid f(0) = x$ или $f(1) = x\}$ конечно для любого $x \in X$;

3) для любых $f, g \in \Theta$, если $f(I) \neq g(I)$, то $f[(0,1)] \cap g[(0,1)] = \varnothing$ (если образы двух путей из Θ не тождественны, то кроме, может быть, концевых, у них нет других общих точек);
4) для любой $f \in \Theta$ существует не более одной $g \in \Theta$, $g \neq f$, такой, что $f(I) = g(I)$, причем, если такое g существует, то f и g являются путями «противоположной ориентации», то есть существует строго убывающая функция $\alpha : I \to I$, такая, что, $f = g \circ \alpha$.

Под X-*орграфом*, определенным множеством Θ, подразумеваем орграф $G(\Theta) = (V(\Theta), E(\Theta))$, где

1) $V(\Theta) = \{f(0) \,|\, f \in \Theta\} \cup \{f(1) \,|\, f \in \Theta\}$, $E(\Theta) = \Theta$, $\iota_1(f) = f(0)$ и $\iota_2(f) = f(1)$;
2) для любого $f \in \Theta$ имеет место $\overline{f} = g$, если существует $g \in \Theta$, $g \neq f$, такое, что $g(I) = f(I)$; в противном случае $\overline{f}$ не определено,

Если $X = \mathbb{R}^2$, то этот орграф также называется *плоским орграфом.* *Носителем* X-орграфа $G(\Theta)$ называется множество $\cup_{f\in\Theta} f(I)$, а *помеченным носителем* — пара $(V(\Theta), \cup_{f\in\Theta} f(I))$. Часто в последующем, если ясно из контекста или если не хотим подчеркивать, о каком именно множестве Θ идет речь, обозначение этого множества опускается в обозначении X-орграфа.

Пусть G — некоторый орграф. Множество Θ (а также и соответствующий X-орграф $G(\Theta)$) называется X-*реализацией* орграфа G или *укладкой* орграфа G в пространстве X, если X-орграф $G(\Theta)$ изоморфен G. В случае, когда $X = \mathbb{R}^2$, то вместо X-реализация говорим *плоская реализация* или *плоская укладка* орграфа G. Орграф называется *планарным*, если существует его плоская реализация.

Пусть G — некоторый конечный симметрический орграф, и $G(\Theta)$ — некоторая его X-реализация. Тогда ясно, что помеченный носитель этой реализации определяет единственным способом орграф G (определяет его функции инциденции ι_1 и ι_2). Следовательно, в дальнейшем конечный планарный симметрический орграф часто будем изображать в виде помеченного носителя некоторой его плоской реализации.

Заметим, что понятие плоской реализации (или любой другой X-реализации) орграфа нельзя путать с наглядным изображением любого орграфа в плоскости в виде набора точек и стрелок, связывающих эти точки.

Если в (графе) орграфе для любых двух его вершин существует (маршрут) путь, связывающий эти точки, то он называется (*связным графом*) *сильно связным орграфом.*

Система следования η в орграфе $G = (V, E)$ есть множество $\eta = \{\eta_v \,|\, v \in V\}$, где η_v — бинарное отношение в E_v для любого $v \in V$. Если η_v — всюду определенное функциональное отношение при любом $v \in V$, то есть, $|\{e' \in E_v \,|\, (e, e') \in \eta_v\}| = 1$ для любых $v \in V$ и $e \in E_v$, то для любого $v \in V$ можно определить функцию $\tilde{\eta}_v : E_v \to E_v$ такую, что $(e, \tilde{\eta}_v(e)) \in \eta_v$ для любой дуги $e \in E_v$. Если $\tilde{\eta}_v$ определено и является циклической подстановкой для любого $v \in V$, то η называется *системой вращения.* Исходя из вышесказанного, систему вращения будем задавать не множеством отношений, но множеством циклических подстановок, то есть под системой вращения будем понимать семейство $\eta = \{\eta_v | v \in V\}$, такое, что η_v является циклической подстановкой множества E_v для любого $v \in V$. Пару (G, η) назовем *орграфом G с системой следования* η, а если η — система вращения, то — *орграфом G с системой вращения* η. Аналогичным способом можно и для графов ввести понятие системы следования и системы вращения. Если (G, η) симметрический орграф G с системой следования (системой вращения) η, то через $\overline{\eta}$ обозначим соответствующую систему следования (систему вращения) для графа $\overline{G}$. И наоборот, если (G, η) — граф G с системой следования (системой вращения) η, то через $\vec{\eta}$ обозначим соответствующую систему следования (систему вращения) для орграфа $\vec{G}$.

Пусть Ω, Ω_1, Σ и Σ_1 — конечные множества, такие, что любое из этих множеств содержит пустой символ Λ, и (G, η) — некоторый сильно связный орграф G с системой следования η. Даны отображения $f : V(G) \to \Omega$, $g : E(G) \to \Sigma$. Набор $L = (G, f, g, \eta, \Omega_1, \Sigma_1)$ называется (Ω_1, Σ_1)-*лабиринтом* с множеством отметок вершин Ω и множеством отметок дуг Σ. Множество Ω называем также множеством *ориентиров*, а множество Σ — системой *направлений.* Если $\Omega_1 = \{\Lambda\}$, $\Sigma_1 = \{\Lambda\}$, то вместо $(\{\Lambda\}, \{\Lambda\})$-лабиринт говорим просто *лабиринт* и вместо $L = (G, f, g, \eta, \{\Lambda\}, \{\Lambda\})$ пишем $L = (G, f, g, \eta)$, то есть рассматриваем лабиринт просто как нагруженный орграф с системой следования. Под состоянием (Ω_1, Σ_1)-лабиринта подразумеваем любую пару вида (f_1, g_1), где $f_1 : V(G) \to \Omega_1$ и $g_1 : E(G) \to \Sigma_1$. Обозначим через $\mathcal{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$ класс всех (Ω_1, Σ_1)-лабиринтов, а через $\mathcal{L}(\Omega; \Sigma)$ — всех лабиринтов с множеством ориентиров Ω и системой направлений Σ. Если дан лабиринт $L = (G, f, g, \eta, \Omega_1, \Sigma_1)$, то G, $V = V(G)$, $E = E(G)$, f, g и η обозначаем, соответственно, через $G(L)$, $V(L)$, $E(L)$, f_L, g_L и η_L. Если специально не оговариваем, о каких f, g и η идет речь, то вместо $(G, f, g, \eta, \Omega_1, \Sigma_1)$ пишем (G, Ω_1, Σ_1), а если еще $\Omega_1 = \{\Lambda\}$ и $\Sigma_1 = \{\Lambda\}$, то пишем просто, что $L = (V(L), E(L))$. Как и в случае нагруженных орграфов, мы вместо $f(u)$, $f_1(u)$, $g(e)$ и $g_1(e)$ будем часто писать, соответственно, $|u|$, $||u||$, $|e|$ и $||e||$; $u \in V(L)$, $e \in E(L)$. Также, как и выше, для любого $v \in V(L)$ через $[v] = [v]_L$ обозначим множество $\{|e| \mid e \in E_v(L)\}$.

Приписывание (дуге) вершине пустого символа можно интерпретировать как не отмечание (дуги) вершины вообще, то есть функции f, f_1, g и g_1 можно рассматривать как частичные функции.

Поскольку множества Ω, Ω_1, Σ и Σ_1 конечные, то в качестве этих множеств можно брать множества $\overline{m} \cup \{0\}$, $\overline{m}_1 \cup \{0\}$, $\overline{n} \cup \{0\}$ и $\overline{n}_1 \cup \{0\}$ (роль пустого символа играет число 0), и, следовательно, выше вместо (Ω_1, Σ_1)-лабиринта можем писать $(\overline{m}_1 \cup \{0\}, \overline{n}_1 \cup \{0\})$-лабиринт, и даже (m_1, n_1)-лабиринт.

В лабиринте L могут быть выделены два непересекающиеся множества вершин V_1 и V_2 (второе из этих множеств может быть пустым). Вершины множества V_1 называем *начальными* (*входами*), а V_2 — *конечными* (*выходами*). Лабиринт L в таком случае обозначаем $L_{V_1}^{V_2}$ или $(L; V_1, V_2)$. Если множества V_1 и V_2 одноэлементные, то вместо $L_{\{v_1\}}^{\{v_2\}}$ пишем $L_{v_1}^{v_2}$, то есть $(L; v_1, v_2)$. Если $V_2 = \emptyset$, то вместо введенных пользуемся обозначениями L_{V_1} или $(L; V_1)$, а в случае когда $|V_1| = 1$, обозначениями L_{v_1} или $(L; v_1)$. Лабиринт, у которого выделено множество начальных вершин (множество начальных вершин мощности n), называется *инициальным* (*n-инициальным*). Часто, если из контекста ясно, о каком лабиринте идет речь, вместо «1-инициальный лабиринт» будем говорить «инициальный лабиринт».

Лабиринт $L_1 \in \mathcal{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$ называется *частью* (*подлабиринтом*) лабиринта $L \in \mathcal{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$, если нагруженный орграф $(G(L_1), f_{L_1}, g_{L_1})$ является частью (подорграфом) нагруженного орграфа $(G(L), f_L, g_L)$ и если для любых $v \in V(L_1)$ и $e, e_1, e_2 \in E(L_1)$ выполнено:

1) $||v||_{L_1} = ||v||_L$ и $||e||_{L_1} = ||e||_L$;
2) $(e_1, e_2) \in (\eta_{L_1})_v$ тогда и только тогда, когда существует последовательность дуг $e'_1 = e_1, e'_2, \ldots, e'_m = e_2$ из $E_v(L)$, такая, что $e_i \notin E_v(L_1)$ для всех i, $2 \leqslant i \leqslant m-1$, и $(e'_j, e'_{j+1}) \in (\eta_L)_v$ для любого $1 \leqslant j \leqslant m-1$.

Пусть L — некоторый (Ω_1, Σ_1)-лабиринт из $\mathcal{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$, удовлетворяющий условию, что $|e_1| \neq |e_2|$ для любых $e_1, e_2 \in E_v(L)$, $e_1 \neq e_2$, и $v \in V(L)$. Также, пусть $u \in V(L)$ и $\alpha \in \Sigma^*$. Если в L существует путь $u = u_0, e_1, u_1, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n$, такой, что $|e_1| \ldots |e_n| = \alpha$, то вершину u_n обозначим через $v_L(u; \alpha)$; если такой путь не существует, то $v_L(u; \alpha)$ не определено. В случае, когда $\alpha = \Lambda$, полагаем, что $v_L(u; \alpha) = u$. Если ясно из контекста, о каком лабиринте L идет речь, то часто вместо $v_L(u; \alpha)$ будем просто писать $u\alpha$.

Лабиринты $(L_1; V_1^1, V_2^1) \in \mathcal{L}(\Omega, \Omega_1; \Sigma, \Sigma_1)$ и $(L_2; V_1^2, V_2^2) \in \mathcal{L}(\Omega', \Omega'_1; \Sigma', \Sigma'_1)$ называются *изоморфными*, $(L_1; V_1^1, V_2^1) \simeq (L_2; V_1^2, V_2^2)$, если для нагруженных орграфов $(G(L_1), f_{L_1}, g_{L_1})$ и $(G(L_2), f_{L_2}, g_{L_2})$, существует изоморфизм ϑ такой, что

1) $|\Omega_1| = |\Omega'_1|$, $|\Sigma_1| = |\Sigma'_1|$, $\vartheta(V_1^1) = V_1^2$ и $\vartheta(V_2^1) = V_2^2$,
2) для любой вершины $v \in V(L_1)$ и любых дуг $e_1, e_2 \in E_v(L_1)$ имеет место $(e_1, e_2) \in (\eta_L)_v$ тогда и только тогда, когда $(\vartheta(e_1), \vartheta(e_2)) \in (\eta_{L_1})_{\vartheta(v)}$.

Определим класс n-мерных лабиринтов, поскольку большая часть работ касается лабиринтов именно этого класса или некоторых его подклассов.

Пусть $\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)$ — единичные векторы евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\mathbf{D}_n = \{-\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. В случае $n = 2$ и $n = 3$ вместо стандартных обозначений для единичных векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и векторов $-\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{j}, -\boldsymbol{k}$ будем, соответственно, пользоваться обозначениями $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{d}$.

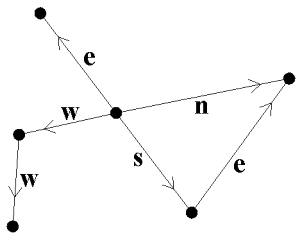


Рис. 1.

Лабиринт $L = (G, f, g, \eta) \in \mathcal{L}(\{\Lambda\}, \mathbf{D}_n \cup \{\Lambda\})$ называется *n-мерным евклидовым лабиринтом* или просто *n-мерным лабиринтом*, $n \geqslant 2$, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) G является симметрическим орграфом без кратных дуг и петель;
2) для любого $e \in E(L)$ имеет место $|e| \in \mathbf{D}_n$ и $|\overline{e}| = -|e|$;
3) при любом $v \in V(L)$, для любых $e_1, e_2 \in E_v(L)$, $e_1 \neq e_2$, выполнено условие: $|e_1| \neq |e_2|$;
4) $\eta_v = \varnothing$ для любого $v \in V(L)$.

В последующем в обозначении (G, f, g, η) n-мерного лабиринта L будем опускать g, считая, конечно, что в любом конкретном случае g задана, а также будем опускать f и η, поскольку $f(v) = \Lambda$ и $\eta_v = \varnothing$ для любого $v \in V(L)$, и будем писать $L = (V, E)$, где $V = V(L) = V(G)$ и $E = E(L) = E(G)$. Например, лабиринт на рис. 1 является примером 2-мерного лабиринта (чтобы не перегружать рисунок, на нем изображено только по одной дуге любого ребра с ее направлением, при этом подразумевается существование противоположных дуг с соответствующими отметками).

В последующем нам будет нужен один специальный класс n-мерных лабиринтов — класс змеевидных n-мерных лабиринтов. *Змеевидным n-мерным лабиринтом* называется n-мерный лабиринт L, у которого $\overline{G(L)}$ является связным графом, неизоморфным простому циклу, у которого у всех вершин степень меньше или равна 2. Ясно, что если L — конечный лабиринт (множество $V(L)$ является конечным), то у него точно две концевые вершины, а если бесконечный, то у него есть одна концевая вершина или вообще нет концевых вершин.

Пусть M и N, $M \neq N$, — некоторые точки в $\mathbb{R}^n$. Говорим, что вектор $\overrightarrow{MN}$ является *ω-вектором* ($\omega \in \mathbf{D}_n$), если $\overrightarrow{MN} = \alpha\omega$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}^+$; в таком случае говорим также, что вектор $\overrightarrow{MN}$ *идет в направлении ω*. Через $\overline{MN}$ обозначим отрезок в $\mathbb{R}^n$, связывающий точки M и N.

Множество T отрезков в $\mathbb{R}^n$ называется *регулярной конфигурацией отрезков* (в $\mathbb{R}^n$), если любые два разных отрезка из этого множества могут иметь не больше одной общей точки, причем, если она есть у них, то она обязательно является концевой для обоих отрезков. Понятие регулярной конфигурации отрезков очень близко к понятию одномерного комплекса. В самом деле, если множеству T добавить и все одноэлементные подмножества множества всех концевых вершин отрезков из T, то полученное семейство множеств является одномерным комплексом.

n-мерный лабиринт $L = (V, E)$, где $V \subseteq \mathbb{R}^n$, назовем *прямоугольным n-мерным лабиринтом*, если

1) для любых $u, v \in V$ из $(u, v) \in E$ следует, что $\overrightarrow{uv}$ идет в направлении $|(u, v)|$;
2) $T = \{\overline{uv} \mid (u, v) \in E\}$ — регулярная конфигурация отрезков.

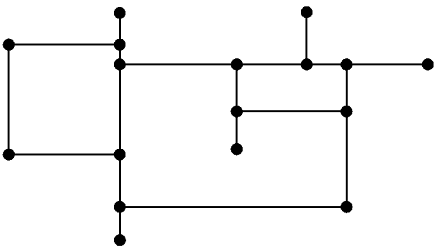


Рис. 2.

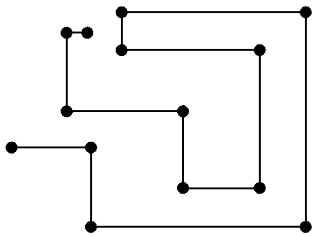


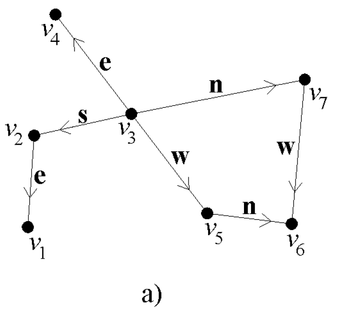
Рис. 3.

Пусть $L = (V, E)$ — n-мерный прямоугольный лабиринт. Для любой дуги $(u, v) \in E$, где $u = (x_1, \ldots, x_n)$ и $v = (y_1, \ldots, y_n)$, определим функцию $f_{u,v} : I \to \mathbb{R}^n$ такую, что

$$f_{u,v}(t) = (x_1 + (y_1 - x_1)t, \ldots, x_n + (y_n - x_n)t).$$

Ясно, что семейство $\{f_{u,v} \,|\, (u,v) \in E(L)\}$ является $\mathbb{R}^n$-реализацией орграфа $G(L)$; назовем ее *линейной* или *стандартной* реализацией данного прямоугольного лабиринта L. Через $\overline{L}$ обозначим носитель этой реализации лабиринта L. Ясно, что помеченный носитель стандартной реализации лабиринта L определяет L полностью. Если некоторый прямоугольный n-мерный лабиринт задается через помеченный носитель его стандартной реализации, то говорим, что он задан стандартным способом. Например, на рис. 2 дается *стандартное представление* одного прямоугольного 2-мерного лабиринта, а на рис. 3 — одного прямоугольного плоского змеевидного лабиринта.

В дальнейшем, прямоугольный 2-мерный лабиринт будем называть также и прямоугольным *плоским* лабиринтом.



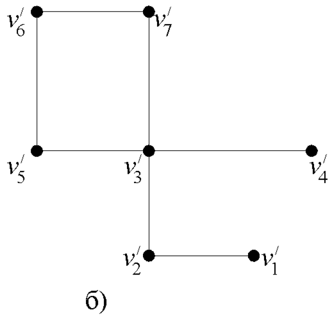


Рис. 4.

Говорим, что n-мерный лабиринт L является *квазипрямоугольным*, если L изоморфен некоторому прямоугольному n-мерному лабиринту и дуги, которые при этом соответствуют друг другу, несут одинаковые отметки. Примером квазипрямоугольных лабиринтов являются все змеевидные n-мерные лабиринты. Изображенный на рис. 4а) 2-мерный лабиринт также является квазипрямоугольным, поскольку он изоморфен прямоугольному плоскому лабиринту, приведенному на рис. 4б) (соответствующий изоморфизм отображает вершину v_i в вершину v'_i для любого $i \in \overline{7}$). С другой стороны, лабиринт, изображенный на рис. 1, очевидно не является квазипрямоугольным.

Пусть $L = (V, E)$ — некоторый прямоугольный плоский лабиринт. Множество $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{L}$ является открытым и в общем случае, если L, то есть $\overline{G(L)}$, не является деревом, несвязным; каждую из компонент связности этого множества назовем *дырой* (*преградой*) лабиринта L. Дыра может быть ограниченной или неограниченной. Легко удостоверится, что если L конечный лабиринт, то у него $|E|/2 - |V| + 1$ ограниченных дыр и одна неограниченная дыра. Лабиринт L назовем $k+1$-*связным*, если у него $k \in \mathbb{N}_0$ ограниченных дыр. Например, лабиринт, изображенный на рис. 4б), является двусвязным (2-связным), а на рис. 5 имеем 4-связный лабиринт. Вместо 1-связный лабиринт обычно говорим односвязный лабиринт.

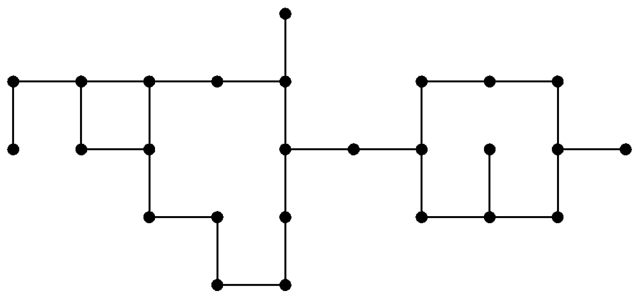


Рис. 5.

Прямоугольный n-мерный лабиринт $L = (V, E)$ назовем *целочисленным* n-мерным лабиринтом, если $V \subseteq \mathbb{Z}^n$. Целочисленный n-мерный лабиринт $L = (V, E)$ назовем m-*мозаичным* n-мерным лабиринтом ($m \in \mathbb{N}$), если длина отрезка $\overline{uv}$ равна m для любого $(u, v) \in E$. Вместо 1-мозаичный будем говорить просто *мозаичный* (см. рис. 5).

Конечный m-мозаичный n-мерный лабиринт $(L; u, v)$ называется m-*правильным* n-мерным лабиринтом, если существует бесконечный змеевидный m-мозаичный n-мерный лабиринт $(L_1; v)$ такой, что $\overline{L} \cap \overline{L_1} = \{v\}$. Вместо 1-правильный будем говорить *правильный*.

Пусть L — некоторый целочисленный плоский лабиринт. Любое непустое множество вида $\Delta \cap \mathbb{Z}^2$, где Δ — дыра лабиринта L, назовем $\mathbb{Z}$-*дырой* или *целочисленной* дырой данного лабиринта; если при этом множество $\Delta \cap \mathbb{Z}^2$ (бесконечно) конечно, то его назовем (*неограниченной*) *ограниченной* целочисленной дырой. Например, у лабиринта, изображенного на рис. 6, три $\mathbb{Z}$-дыры — две конечные и одна бесконечная, а у лабиринта с рис. 5 две $\mathbb{Z}$-дыры. Целочисленный плоский лабиринт L назовем *целочисленно* $k+1$*-связным* лабиринтом ($k \in \mathbb{N}_0$), если у него точно k ограниченных $\mathbb{Z}$-дыр (вместо целочисленно 1-связный лабиринт обычно говорим целочисленно односвязный или $\mathbb{Z}$-односвязный лабиринт).

Проведем через вершины $\mathbb{Z}^n$ все прямые, параллельные осям координат. Обозначим также через $\mathbb{Z}^n$ мозаичный n-мерный лабиринт, у которого $\mathbb{Z}^n$ множество вершин, а полученная фигура является носителем его линейной $\mathbb{R}^n$-реализации. Очевидно, что любой мозаичный n-мерный лабиринт является связной симметрической частью лабиринта $\mathbb{Z}^n$. Любой связный подлабиринт лабиринта $\mathbb{Z}^n$ называется *шахматным* n-мерным лабиринтом. Иными словами, шахматный лабиринт — это мозаичный лабиринт, у которого любые две вершины, расстояние между которыми равно единице, являются смежными. На рис. 6 дается пример шахматного 2-мерного (плоского) лабиринта.

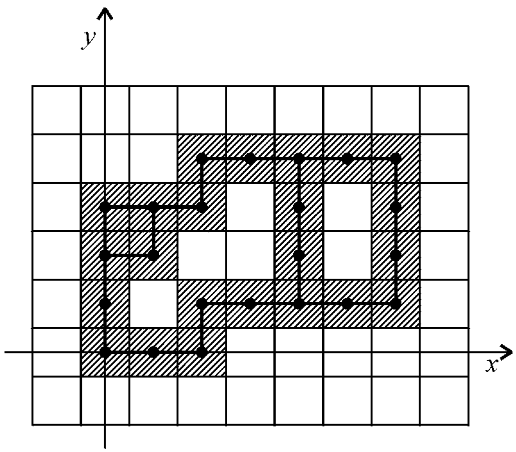


Рис. 6.

Остановимся на случае плоских шахматных лабиринтов. Построим единичный квадрат с центром в любой целочисленной точке из $\mathbb{Z}^2$ (см. рис. 6). Полученное покрытие плоскости квадратами напоминает бесконечную (нераскрашенную) шахматную доску; квадраты, элементы этого покрытия, представляют поля этой доски. Пусть теперь L — некоторый шахматный лабиринт. Поля, которые отвечают вершинам, принадлежащим лабиринту L, окрасим в черный цвет, остальные — в белый цвет; обозначим через $P(L)$ множество всех черных полей. Поскольку соседним вершинам в L отвечают соседние поля, то есть поля, у которых есть общая сторона, то $P(L)$ удовлетворяет следующему условию: для любых двух полей $p_1, p_2 \in P(L)$ существует последовательность черных полей $p_1' = p_1, p_2', \ldots, p_m' = p_2$ такая, что поля p_i' и p_{i+1}', $1 \leqslant i \leqslant m-1$, являются соседними. Имеет место и обратное утверждение: если конфигурация черных полей удовлетворяет выше данному условию, то соответствующий прямоугольный плоский лабиринт (его ребра определены центрами соседних полей конфигурации) является шахматным.

Поскольку в дальнейшем мы будем часто иметь дело с некоторыми классами прямоугольных лабиринтов, введем следующие обозначения. Обозначим через $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{к}}$, $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{б}}$ и $\mathfrak{L}_{\text{п}}$, соответственно, классы всех конечных, всех бесконечных и всех (конечных и бесконечных) прямоугольных плоских лабиринтов; соответствующие классы мозаичных и шахматных лабиринтов обозначим через $\mathfrak{L}_{\text{м}}^{\text{к}}$, $\mathfrak{L}_{\text{м}}^{\text{б}}$, $\mathfrak{L}_{\text{м}}$, $\mathfrak{L}_{\text{ш}}^{\text{к}}$, $\mathfrak{L}_{\text{ш}}^{\text{б}}$ и $\mathfrak{L}_{\text{ш}}$.

Пусть $(G, f, g, \eta, \Omega_1, \Sigma_1)$ — некоторый (Ω_1, Σ_1)-лабиринт. Этот лабиринт является (прямоугольным, целочисленным, мозаичным, …) n-мерным лабиринтом, если соответствующий лабиринт (G, f, g, η) является таким же. Конечный плоский мозаичный $(\{0\}, \overline{m} \cup \{0\})$-лабиринт ($m \in \mathbb{N}$) назовем *$m$-лабиринтом*. m-лабиринт L называется *m-деревом*, если граф $\overline{G(L)}$ является деревом.

2. Лабиринтные машины и их поведение в лабиринтах

В лабиринты всевозможных типов будем «помещать» разного рода математические машины. Самыми простыми из них являются конечные автоматы.

Под *конечным автоматом* $\mathfrak{A}$ понимаем пятерку (A, Q, B, φ, ψ), где A, B и Q суть конечные алфавиты: входной, выходной и состояний, соответственно; $\varphi : Q \times A \to Q$ и $\psi : Q \times A \to B$ суть функции переходов и выходов, соответственно. При фиксации начального состояния $q_0 \in Q$ имеем инициальный автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$. Пусть A^* и B^* — множества всех слов $\alpha = \alpha(1)\dots\alpha(n)$ и $\beta = \beta(1)\dots\beta(n)$ над алфавитами A и B, соответственно. Под функционированием автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ понимаем отображение $f_{\mathfrak{A}_{q_0}} : A^* \to B^*$, определяемое рекуррентно:

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), \alpha(t)), \\ \beta(t) = \psi(q(t), \alpha(t)). \end{cases}$$

В дальнейшем, в выражении «конечный автомат» часто будем опускать слово конечный. Множество входов, множество выходов, множество состояний, функцию переходов и функцию выходов автомата $\mathfrak{A}$ часто будем обозначать, соответственно, через $A_{\mathfrak{A}}$, $B_{\mathfrak{A}}$, $Q_{\mathfrak{A}}$, $\varphi_{\mathfrak{A}}$ и $\psi_{\mathfrak{A}}$.

Ограниченность объема памяти конечного автомата накладывает ряд существенных ограничений на вычислительные возможности этого устройства. Поэтому мы также будем рассматривать конечные автоматы, снабженные бесконечной «внешней памятью», организованной разными способами. В сущности, эти машины представляют собою разные модификации машины Тьюринга. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть имеется не ограниченная справа лента M, разбитая на ячейки, пронумерованные последовательно числами $0, 1, 2, \dots$. В ее ячейке с номером 0 записан один специальный символ a_M, который никогда не стирается и не может быть записан ни в какую другую ячейку. Далее, предположим наличие конечного алфавита A_M ($a_M \notin A_M$), содержащего пустой символ Λ. Символы алфавита A_M могут быть записаны в любой ячейке, кроме ячейки с номером 0, причем в любой ячейке ленты может находится не больше одного символа. Лента M в таком случае называется *магазином*.

Под *автоматом с магазинной памятью* будем понимать конечный автомат, снабженный одним или несколькими магазинами. Опишем работу автомата с одним магазином.

За работой такого устройства можно следить в дискретные моменты времени $t \in \mathbb{N}_0$. В начале работы (в момент $t = 0$) автомат обозревает ячейку магазина с номером 0; во всех остальных ячейках записан пустой символ Λ. Допустим, что в момент времени t, когда автомат находится в каком-то состоянии q_t, на входе у него появляется буква a'_t, и в качестве самого правого непустого символа лента M имеет символ a_t в ячейке с номером m_t, где $a_t \in A_M$, если $m_t \neq 0$, и $a_t = a_M$, если $m_t = 0$; говорим также, что в этот момент автомат обозревает ячейку с номером m_t, то есть *головка* автомата находится напротив клетки с номером m_t. В следующий момент:

а) устройство переходит во внутреннее состояние q_{t+1}, которое зависит от q_t, a'_t и a_t;

б) если $m_t = 0$, то начиная с ячейки с номером 1, устройство записывает слово $\alpha_{t+1} = \alpha(q, a'_t, a_t) \in A_M^*$ (оно записывает побуквенно слово α_{t+1} в ячейки магазина, начиная с ячейки с номером 1 и кончая ячейкой с номером $|\alpha_{t+1}|$);

в) если $m_t \neq 0$, то устройство уничтожает символ в ячейке m_t и, начиная с ячейки с номером m_t, записывает слово α_{t+1} (таким образом, если $\alpha_{t+1} = \Lambda$ и $m_t \neq 0$, то действие автомата состоит только в стирании символа, оказавшегося в ячейке m_t);

г) на выходе устройства появляется символ $b_t = b_t(q_t, a'_t, a_t)$;

д) автомат переходит к обозреванию ячейки $m_t + |\alpha_{t+1}| - 1$, если $m_t > 0$, и ячейки с номером $|\alpha_{t+1}|$, если $m_t = 0$.

Таким образом, автомат с одним магазином всегда обозревает ячейку магазина с наибольшим номером среди тех, в которых записан непустой символ, и все изменения в магазине происходят только в окрестности обозреваемой ячейки.

В качестве автомата с одним магазином будем рассматривать ту его разновидность, у которой слово α_{t+1} является пустым, однобуквенным или содержащим две буквы, первая из которых обязательно является буквой a_t; ясно, что в таком случае $|m_{t+1} - m_t| \leqslant 1$. Здесь следует отметить, что в связи с проблемами поведения таких машин в лабиринтах, которые до сих пор рассматривались, это условие не накладывает никаких существенных ограничений на возможности таких автоматов.

Работа автомата с несколькими магазинами определяется аналогично. Она детерминированным образом зависит от внутреннего состояния устройства, от входной буквы и от содержимого всех обозреваемых ячеек магазинов.

Магазин M, алфавит которого A_M содержит только один непустой символ, называется *счетчиком*. Содержательно, в счетчике может храниться любое число из множества $\mathbb{N}_0$. Автомат с таким магазином (с такими магазинами) называется *автоматом со счетчиком* (*со счетчиками*).

Под *стеком* мы будем понимать такую разновидность магазина, которая позволяет автомату углубляться в массив заполненных ею ячеек (содержащих непустой символ), причем автомат может читать записанные в них символы, не стирая при этом содержимое ячеек магазина с большими номерами, но может изменять только или содержимое ячейки с наибольшим номером среди заполненных (если обозревает эту ячейку, и если, конечно, она не является нулевой), или содержимое первой незаполненной ячейки (переходя к обозреванию этой ячейки). Устройство такого рода называется *автоматом со стеком* (допускаем и случай, когда автомат снабжен и несколькими стеками).

Наконец, вместо ленты, разбитой на клетки, которая бесконечна в одну сторону, можно снабдить автомат лентой бесконечной в оба конца, или лентой, которая в любой момент конечная, но ее размер, например, есть некоторая функция от числа вершин лабиринта, в который такой автомат помещается. Могут допускаться разные сочетания таких лент, у автомата может быть одна или больше головок, с помощью которых он обозревает содержимое этих лент, могут накладываться разные ограничения на записывание и стирание символов в клетках этих лент. Все эти машины являются разновидностями машины Тьюринга или разновидностями ее многоголовочного или многоленточного варианта.

Если теперь какую-то из выше данных машин «положить» в некоторый лабиринт и добавить к уже приведенным ее возможностям и некоторые другие, которые касаются возможности изменения отметок ребер и вершин лабиринта, то получим целый спектр «лабиринтных машин». Назовем такие машины *лабиринтными монстрами* или просто *монстрами.* Конечно, чтобы они были способны передвигаться в лабиринтах (то есть чтобы для них лабиринты были «средой обитания»), они должны удовлетворять некоторым требованиям, касающимся входного алфавита, выходного алфавита и функции выходов. Если эти требования будут удовлетворены по отношению к какому-то классу лабиринтов, мы будем говорить, что данный монстр является допустимым для данного класса лабиринтов. Дадим сейчас одну достаточно общую схему, которая охватывает всевозможные частные случаи, изложенные ниже. Эту схему можно формализовать, но здесь мы не будем делать это. Схема будет описывать монстров через некоторые свойства, которыми (или, может быть, частью которых, но не всеми) желательно было бы наделить их.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов из $\mathcal{L}(\Omega, \Omega_1, \Sigma, \Sigma_1)$. Автомат (автоматически функционирующее устройство, работающее в дискретном времени) $\mathcal{A}$ называется $\mathfrak{L}$-*монстром*, если:

а) у него есть конечная *внутренняя память*, которая может сочетаться с бесконечной *внешней памятью*, организованной разными способами (в виде одного или нескольких магазинов, счетчиков, стеков, в виде одной или нескольких бесконечных лент, таких, как у машины Тьюринга и т. п.). Обозначим множество его состояний через $Q_{\mathcal{A}}$. В случае, когда у $\mathcal{A}$ есть внешняя память, можно предположить, что элементы множества $Q_{\mathcal{A}}$ имеют вид (q, α), где q — состояние его внутренней памяти, а через α кодируется «состояние» его внешней памяти, то есть информация о значениях содержимого всех обозреваемых клеток всех его *внешних лент*;

б) автомат может быть помещен в произвольный лабиринт $L \in \mathfrak{L}$, и если он помещен в L, то он может сразу оказаться в нескольких вершинах этого лабиринта одновременно, так как у него есть конечное множество $\mathcal{H}$ *лабиринтных головок* (эти головки не надо путать с *головками* его *внешней памяти*), которые могут находиться, в общем случае, в $|\mathcal{H}|$ различных вершинах лабиринта L;

в) при помещении в некоторый лабиринт $L \in \mathfrak{L}$ автомат может передвигаться в нем (менять расположение своих головок в L), исходя из локальной информации, доступной ему (см. ниже), и его состояния, и при этом может передвигать, брать с собою или оставлять в вершинах лабиринта L или на его дугах *камни* (*флажки*, *маркеры*). Камни представляют своего рода конечную внешнюю память. Их количество не увеличивается и не уменьшается, и они сами по себе не передвигаются по лабиринту. Оставляя их в вершинах или на дугах, монстр отмечает таким способом некоторые из этих вершин и дуг. Можем предположить существование у монстра камней двух сортов: первыми монстр «отмечает» только вершины (*вершинные камни*), вторыми — только дуги или ребра (*реберные камни*). Каждый из камней может быть или в лабиринте (отмечая таким способом некоторую дугу или вершину) или «на руках» у любой из головок, или «на общем складе», так что каждая из головок имеет доступ к нему. Также предполагается, что каждая головка по-своему видит камни, они для нее «окрашены», причем те, у которых одинаковый «цвет», она не различает;

г) автомат $\mathcal{A}$ в вершинах из L, в которых оказалась любая из его головок, «собирает» *локальную информацию*, находящуюся в *поле зрения* любой из этих головок (здесь под полем зрения некоторой его головки, оказавшейся в вершине $v \in V(L)$, понимается некоторая конечная слабо связанная часть лабиринта L, содержащая вершину v, причем каждая головка имеет свое поле зрения), и эта информация представляет собою в общем случае часть полной информации об отметках вершин и дуг, лежащих внутри этих полей зрения, и о распределении камней и других головок внутри них. При этом каждая из головок по-своему различает как другие головки, так и камни; другими словами, камни, как выше отмечалось, а также и головки, окрашены в разные цвета, причем раскраска зависит от данной головки, так что камни (головки), окрашенные в один цвет, головка не различает. Форма поля зрения конкретной головки, оказавшейся в некоторой вершине, зависит от множества факторов, среди которых может быть состояние монстра, относительное распределение головок, «форма» лабиринта в окрестности данной вершины, присутствие камней в этой вершине и ее окрестности и т. п.;

д) автомат в любом лабиринте $L \in \mathfrak{L}$, в зависимости от собранной локальной информации и от состояния его памяти (внешней и внутренней) в некоторый момент t, выбирает для любой своей лабиринтной головки $\mathfrak{h}$, оказавшейся в вершине $v_t(\mathfrak{h})$, вершину $v_{t+1}(\mathfrak{h})$ из поля зрения этой головки и передвигает ее так, что ее местоположением в момент $t+1$ будет уже вершина $v_{t+1}(\mathfrak{h})$, причем любой автоморфизм поля зрения этой головки в момент t, который оставляет на месте вершину $v_t(\mathfrak{h})$, оставляет на месте и вершину $v_{t+1}(\mathfrak{h})$ (автоморфизм «учитывает» не только отметки ребер и дуг, но и распределение камней и головок);

ж) автомат $\mathcal{A}$ может менять состояние лабиринта $L \in \mathfrak{L}$, в который он помещен, то есть автомат, двигаясь по лабиринту L, может менять отметки из (Σ_1) Ω_1 (дуг) вершин, принадлежащих полю зрения некоторой из головок, на другие отметки из (Σ_1) Ω_1, причем все (дуги) вершины, у которых изменена отметка, при вышеописанных автоморфизмах должны оставаться на месте;

з) у $\mathfrak{L}$-монстра $\mathcal{A}$ некоторые состояния выделены в качестве финальных. Если монстр при движении в каком-то лабиринте $L \in \mathfrak{L}$ в некоторый момент t оказывается в одном из таких состояний, например, q, то в любой последующий момент, не меняя местоположения своих головок, он сохраняет состояние q (в таком случае будем говорить, что монстр $\mathcal{A}$ *останавливается* в состоянии q).

Чтобы избежать множество конфликтных ситуаций (например, две головки в одно и то же время забирают один и тот же камень, машина пытается поменять отметки вершин или дуг в одно и то же время на разные отметки), предположим, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет обязательно следующему условию:

и) $\mathfrak{L}$-монстр $\mathcal{A}$ является *допустимым* монстром для класса $\mathcal{L}$, то есть «бесконфликтным» автоматом, который может бесконечно (работать) двигаться в любом лабиринте из данного класса.

Поясним это последнее требование подробнее.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый $\mathfrak{L}$-монстр, $\mathcal{H}$ — множество его лабиринтных головок, $\mathcal{K}_V$ — множество его вершинных камней, $\mathcal{K}_E$ — множество его реберных камней, и пусть L — некоторый лабиринт из $\mathfrak{L}$. Под *погружением* $\mathcal{A}$ в лабиринт L подразумеваем любой набор вида $(q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g))$, где функцией $\lambda_0 : \mathcal{H} \to V(L)$ дана *расстановка лабиринтных головок*, функциями $\lambda_1 : \mathcal{K}_V \to V(L) \cup \mathcal{H} \cup \{\theta\}$ и $\lambda_2 : \mathcal{K}_E \to E(L) \cup \mathcal{H} \cup \{\theta\}$ $(\theta \notin V(L) \cup E(L) \cup \mathcal{H})$ задано *распределение*, соответственно, вершинных и реберных камней, при этом, если для некоторого $\kappa \in \mathcal{K}_V$ $(\kappa \in \mathcal{K}_E)$ имеет место $\lambda_1(\kappa) \in \mathcal{H}$ $(\lambda_2(\kappa) \in \mathcal{H})$, то камень κ «на руках» у головки $\lambda_1(\kappa)$ $(\lambda_2(\kappa))$, если имеет место $\lambda_1(\kappa) = \theta$ $(\lambda_2(\kappa) = \theta)$, то камень κ находится на общем складе, q — некоторое состояние монстра и (f, g) — некоторое состояние лабиринта L. Любое погружение определяет некоторую *лабиринтную ситуацию* для $\mathcal{A}$, оно описывает местоположение этого монстра (его головок и камней) в лабиринте, а также его состояние и состояние лабиринта.

Пусть $(q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g))$ и $(q', \lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, (f', g'))$ — некоторые два погружения данного $\mathfrak{L}$-монстра $\mathcal{A}$ в L. Говорим, что погружение $(q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g))$ $\mathcal{A}$-влечет погружение $(q', \lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, (f', g'))$, и пишем

$$(q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g)) \to_{\mathcal{A}} (q', \lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, (f', g')),$$

если $\mathcal{A}$, оказавшись в моменте t дискретного времени в лабиринтной ситуации, определенной первым погружением, переводит ее в следующий момент $t + 1$ в лабиринтную ситуацию, определенную вторым погружением.

Пусть $(q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g))$ — некоторое погружение $\mathcal{A}$ в L. Под *поведением* $\mathfrak{L}$-монстра $\mathcal{A}$ с *начальным погружением* $(q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g))$ в лабиринте L назовем бесконечную последовательность погружений

$$(q^{(0)}, \lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, (f^{(0)}, g^{(0)})), (q^{(1)}, \lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, (f^{(1)}, g^{(1)})), \ldots,$$

такую, что $(q^{(0)}, \lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, (f^{(0)}, g^{(0)})) = (q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g))$ и

$$\begin{aligned}(q^{(i)}, \lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, (f^{(i)}, g^{(i)})) &\to_{\mathcal{A}} \\ &\to_{\mathcal{A}} (q^{(i+1)}, \lambda_0^{(i+1)}, \lambda_1^{(i+1)}, \lambda_2^{(i+1)}, (f^{(i+1)}, g^{(i+1)}))\end{aligned}$$

для любого $i \in \mathbb{N}_0$. $\mathcal{A}$ является *допустимым* для L, если для любого его погружения существует соответствующее поведение. $\mathcal{A}$ является *допустимым для класса* $\mathfrak{L}$, если $\mathcal{A}$ допустим для любого $L \in \mathfrak{L}$.

Говорим, что $\mathcal{A}$ с начальным погружением $(q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g))$ *обходит* лабиринт L, если

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \lambda_0^{(i)}(\mathcal{H}) = V(L).$$

Некоторый лабиринт $L \in \mathfrak{L}$ является *ловушкой* для $\mathcal{A}$ с начальным погружением $(q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g))$, если $\mathcal{A}$ с начальным погружением $(q, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, (f, g))$ не обходит L, то есть, если $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L) \neq V(L)$.

В качестве лабиринтного $\mathfrak{L}$-монстра могут выступать конечные автоматы, автоматы с одним или несколькими магазинами, счетчиками или стеками, машина Тьюринга. В качестве монстра могут выступать также и коллективы таких машин, то есть коллективы монстров. Коллектив монстров — это система монстров, которые могут друг с другом взаимодействовать, то есть могут «общаться» между собой. Легко убедиться, что такие коллективы также являются монстрами.

Пусть Ω и Σ — некоторые конечные множества. Обозначим через $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ класс всех лабиринтов L из $\mathcal{L}(\Omega \cup \{\Lambda\}, \Sigma \cup \{\Lambda\})$, удовлетворяющих условиям:

1) $|e_1| \neq |e_2|$ для любых $v \in V(L)$ и $e_1, e_2 \in E_v(L)$, $e_1 \neq e_2$;
2) $|v| \in \Omega$ и $|e| \in \Sigma$ для любых $v \in V(L)$ и $e \in E(L)$.

Например, любой n-мерный лабиринт принадлежит классу $\tilde{\mathcal{L}}(\{\Lambda\}, \mathbf{D}_n)$.

В качестве примеров $\mathfrak{L}$-монстров рассмотрим сначала конечные (Ω, Σ)-автоматы и независимые системы таких автоматов. Эти монстры являются допустимыми для класса лабиринтов $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$.

Под конечным (Ω, Σ)-автоматом $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ подразумеваем автомат, у которого входной алфавит A состоит из букв a вида $(\omega, \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\})$, где $\omega \in \Omega$ и $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subseteq \Sigma$, выходной алфавит B есть множество $\Sigma \cup \{\theta\}$, где $\theta \notin \Sigma$ — некоторый фиксированный символ, смысл которого поясним ниже, а функция выходов ψ удовлетворяет условию

$$\psi(q, a) \in \mathbf{p}_2(a) \cup \{\theta\}$$

для всех $q \in Q$ и $a \in A$.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — некоторый конечный (Ω, Σ)-автомат. Определим лабиринтный монстр $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, допустимый для класса $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, следующим способом. Множеством состояний монстра $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ является множество Q. У монстра $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ отсутствуют камни, множество его головок состоит из одной единственной головки, поле зрения этой головки всегда имеет следующий вид: если он находится в вершине v лабиринта $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, то полем зрения его головки является нагруженный орграф $(W_v, E_v(L), f_v, g_v)$, где

$$W_v = \{v\} \cup \{\iota_2(e) \,|\, e \in E_v(L)\},$$

$f_v(u) = f_L(u) = |u| \in \Omega$ для всех $u \in W_v$ и $g_v(e) = g_L(e) = |e| \in \Sigma$ для любой дуги $e \in E_v(L)$. Монстр $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ будет лабиринтным монстром без печати, то есть он не будет менять отметки ни вершин ни дуг лабиринта L. Локальная информация, которая в таком случае предоставляется монстру, состоит из отметки $|v| \in \Omega$ вершины v и отметок $|e|$, $e \in E_v(L)$, то есть является парой вида $(|v|, [v])$ и, следовательно, имеет вид входных букв для $\mathfrak{A}$. «Закон движения» монстра $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ будет следующим: если он оказался в вершине v лабиринта $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ и его состояние q, то в случае, когда $\psi(q, a) = \theta$, где $a = (|v|, [v])$, монстр остается на месте (в вершине v), а в случае, когда $\psi(q, a) \in \mathbf{p}_2(a)$ монстр переходит в вершину $v' \in W_v \backslash \{v\}$ такую, что $|(v, v')| = \psi(q, a)$. Ясно, что условие $\psi(q, a) \in \mathbf{p}_2(a) \cup \{\theta\}$ обеспечивает то, что такая вершина v' всегда существует, то есть это условие обеспечивает допустимость монстра $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ для класса $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$. Поскольку автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \psi, \varphi)$ полностью определяет монстр $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, то, когда будем говорить о конечном (Ω, Σ)-автомате $\mathfrak{A}$, допустимом для $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, мы, на самом деле, будем иметь в виду монстр $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$. В дальнейшем вместо конечный (Ω, Σ)-автомат $\mathfrak{A}$, допустимый для $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, будем говорить автомат $\mathfrak{A}$, допустимый для $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$. Класс всех допустимых автоматов для $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ обозначим через $\mathrm{Aut}(\Omega, \Sigma)$.

В случае, когда в качестве монстра выступает конечный (Ω, Σ)-автомат $\mathfrak{A}$, мы немного изменим терминологию. Поскольку у $\mathfrak{A}$ одна головка, то ясно, что любое его погружение в некоторый лабиринт $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ можно описать парой вида (q, v), где $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ и $v \in V(L)$. Теперь вместо того, чтобы говорить о поведении автомата $\mathfrak{A}$ с некоторым начальным погружением (q_0, v_0) в лабиринте L, будем говорить о поведении инициального автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} (автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ называем *инициальным допустимым автоматом* для класса $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega,\Sigma)$). Таким образом, последовательность пар

$$\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = (q_0, v_0), (q_1, v_1), \ldots$$

называется поведением автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0}, если v_{i+1} есть вершина лабиринта L_{v_0}, в которую автомат, находясь в состоянии q_i, переходит из вершины v_i, а q_{i+1} есть состояние автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$, которое при этом автомат принимает; пару (q_i, v_i) из поведения $\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L)$ будем обозначать через $\pi_i(\mathfrak{A}_{q_0}, L)$. Слово $\psi(q_0,a_0)\psi(q_1,a_1)\psi(q_2,a_2)\ldots$, где a_i входная буква для автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в момент i, назовем Σ-*траекторией* автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} и обозначим его через $\mathrm{Tr}_\Sigma(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$. Заменим в $\mathrm{Tr}_\Sigma(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$ все вхождения однобуквенного слова θ на пустое слово Λ, и пусть $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots$ таким способом полученное слово. Последовательность дуг $e_1, e_2, \ldots$ лабиринта L_{v_0} такая, что $|e_i| = \sigma_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$, называется E-*траекторией* автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0}; обозначим ее через $\mathrm{Tr}_E(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$. Наконец, последовательность вершин $v_0, v_1, v_2, \ldots$, называется V-*траекторией* автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} и обозначается через $\mathrm{Tr}_V(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$. Говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ обходит некоторую вершину u лабиринта L_{v_0}, если $u = v_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Обозначим множество всех вершин, которые обходит $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0}, через $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$, а которые обходит $\mathfrak{A}_{q_0}$ до момента t включительно — через $\mathrm{Int}_t^{\leqslant}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$. Если $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = V(L_{v_0})$, то говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ *обходит* L_{v_0}; в противном случае L_{v_0} является *ловушкой* для $\mathfrak{A}_{q_0}$.

Если рассматриваем поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте $L = (V, E; v'; v'')$, то в случае, когда $v'' \in \mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L)$, говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ *выходит* из лабиринта L; в противном случае говорим, что L — *ловушка* для $\mathfrak{A}_{q_0}$.

В случае инициального автомата $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, допустимого для класса $\tilde{\mathcal{L}}(\{\Lambda\}, \mathbf{D}_n)$, можем предположить, что $A = \mathfrak{B}(\mathbf{D}_n)$, $B = \mathbf{D}_n \cup \{\mathbf{0}\}$ и $\psi(q,a) \in a \cup \{\mathbf{0}\}$ для всех $q \in Q$ и $a \in A$; здесь $\mathbf{0}$ — нулевой вектор. Тогда поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в n-мерном лабиринте L_{v_0} задается последовательностью

$$\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) : (q_0, v_0), (q_1, v_1), \ldots,$$

где $q_{i+1} = \varphi(q_i, [v_i]_L)$ и $v_{i+1} = v_i + \psi(q_i, [v_i]_L)$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$.

Выше данные понятия можно расширить до любых сочетаний инициальных или неинициальных автоматов и лабиринтов. Чтобы описать все эти случаи, поступим так. Пусть $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega,\Sigma)$ и $\mathfrak{A} \in \mathrm{Aut}(\Omega,\Sigma)$, причем и L и $\mathfrak{A}$ могут быть как инициальными, так и неинициальными. Введем понятия «$\alpha\beta$-обходит» и «$\beta\alpha$-ловушка», где $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$. Если $\alpha = \mathrm{I}$ ($\alpha \neq \mathrm{I}$), то $\mathfrak{A}$ является инициальным (неинициальным) автоматом, а если $\beta = \mathrm{I}$ ($\beta \neq \mathrm{I}$), то L является инициальным (неинициальным) лабиринтом. Слово A указывает на то, что понятия «обходит» и «ловушка» относятся ко всем вершинам данного неинициального лабиринта L или ко всем состояниям данного неинициального автомата $\mathfrak{A}$, а слово E — на то, что они относятся только к некоторым вершинам данного неинициального лабиринта L или к некоторым состояниям данного автомата $\mathfrak{A}$. Так, например, $L_{v_0} \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega,\Sigma)$ является IA-*ловушкой* для $\mathfrak{A} \in \mathrm{Aut}(\Omega,\Sigma)$, если для всех $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ лабиринт L_{v_0} является ловушкой для $\mathfrak{A}_q$. Автомат $\mathfrak{A} \in \mathrm{Aut}(\Omega,\Sigma)$ AA-*обходит* лабиринт $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega,\Sigma)$, если для всех $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ и всех $v \in V(L)$ автомат $\mathfrak{A}_q$ обходит лабиринт L_v. Для более короткой записи примем следующее соглашение: букву E всегда будем писать, букву I всегда будем пропускать, букву A пропускаем, если она одна или в сочетании с еще одной буквой A. Ясно, что при таком соглашении из того, как заданы автомат и лабиринт, следует, какие значения принимают буквы α и β. Так, например, если $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}\}$, то вместо $\alpha\beta$-обходит и $\beta\alpha$-ловушка говорим *обходит* и *ловушка*.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс инициальных лабиринтов. Говорим, что (неинициальный) инициальный автомат $\mathfrak{A}$ является *универсальным обходчиком* класса $\mathfrak{L}$, если $\mathfrak{A}$ (AI-обходит) II-обходит любой лабиринт $L \in \mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс неинициальных лабиринтов. Множество $[\mathfrak{L}] = \{L_v \,|\, L \in \mathfrak{L} \text{ и } v \in V(L)\}$ называется *инициальным замыканием* множества $\mathfrak{L}$. Говорим, что инициальный (или неинициальный) автомат $\mathfrak{A}$ является *универсальным обходчиком* класса $\mathfrak{L}$, если $\mathfrak{A}$ является универсальным по отношению к классу $[\mathfrak{L}]$. Другими словами, (неинициальный) инициальный автомат $\mathfrak{A}$ является универсальным обходчиком класса $\mathfrak{L}$, если (AA-обходит) IA-обходит любой лабиринт $L \in \mathfrak{L}$.

Наряду с поведением автомата в лабиринте можно также рассмотреть поведение системы автоматов в лабиринте. Под *системой автоматов* будем понимать любое конечное индексированное семейство автоматов (следовательно, среди этих автоматов может быть и несколько копий одного и того же автомата). Пусть J — некоторое конечное множество индексов. Любое семейство вида $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^j, j \in J)$, где $\mathfrak{A}^j = (A_j, Q_j, B_j, \varphi_j, \psi_j)$ — конечный автомат, допустимый для класса лабиринтов $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, называется *$J$-системой автоматов* (или просто *системой автоматов*, если специально не оговаривается множество индексов J), *допустимой для* $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$. J-система автоматов является (*инициальной*) *неинициальной*, если $\mathfrak{A}^j$ является (инициальным) неинициальным автоматом для любого $j \in J$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^j, j \in J)$ — неинициальная система автоматов. Если $\vec{q} = (q_j, j \in J)$ семейство состояний q_j из множества $\bigcup_{j \in J} Q_{\mathfrak{A}^j}$, такое, что $q_j \in Q_{\mathfrak{A}^j}$ для любого $j \in J$, то через $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ обозначим инициальную систему автоматов $(\mathfrak{A}^j_{q_j}, j \in J)$.

Две системы автоматов $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^j, j \in J)$ и $\mathcal{A}' = (\hat{\mathfrak{A}}^{j'}, j' \in J')$ считаем *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $\overset{*}{j} : J \to J'$ такое, что $\mathfrak{A}^j = \hat{\mathfrak{A}}^{\overset{*}{j}(j)}$ для любого $j \in J$.

Поскольку множество J конечно, то в качестве множества индексов можно взять множество $\overline{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В данном случае вместо выражения «J-система» будем употреблять выражение n-система. Учитывая стандартное отношение порядка среди натуральных чисел, можем теперь систему автоматов писать в виде упорядоченного набора длины n, у которого на i-том месте находится автомат с индексом i. Порядок автоматов в наборе несуществен, им только отмечается то, что автомат на i-том месте в этом наборе имеет индекс i. Чтобы иметь это в виду, вместо пары круглых скобок ( ) будем использовать пару «угловых» скобок $<>$. Таким образом, будем писать $\mathcal{A} = <\mathfrak{A}^1_{q_1}, \ldots, \mathfrak{A}^n_{q_n}>$.

Пусть $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, и пусть $f : J \to V(L)$ — любое отображение множества J в множество $V(L)$. Пару вида (L, f) будем называть *J-инициальным лабиринтом*; вместо (L, f) часто в последующем будем писать L_f. Как и в случае системы автоматов, можем вместо L_f писать $L_{<v_1, v_2, \ldots, v_n>}$ или даже $L_{v_1, \ldots, v_n}$, где $v_i = f(i)$ для любого $i \in \overline{n}$.

Если $f(j) = v_0$ для некоторого $v_0 \in V(L)$ и для всех $j \in J$, то вместо L_f пишем L_{v_0}, и данный J-инициальный лабиринт отождествляем с соответствующим 1-инициальным лабиринтом.

Пусть $\mathcal{A}_{\vec{q}} = (\mathfrak{A}^j_{q_j}, j \in J)$ — некоторая инициальная J-система автоматов, допустимая для класса $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, и пусть $L_f \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ — некоторый J-инициальный лабиринт. Если под поведением системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ в L_f понимаем семейство поведений

$$(\pi(\mathfrak{A}^j_{q_j}, L_{f(j)}), j \in J),$$

то эту систему называем *независимой*, а само поведение — *поведением независимой системы автоматов*. Если независимую систему автоматов записываем в виде $<\mathfrak{A}^1_{q_1}, \ldots, \mathfrak{A}^n_{q_n}>$, J-инициальный лабиринт — в виде $L_{v_1,\ldots,v_n}$, то соответствующее поведение записываем в виде набора $<\pi(\mathfrak{A}^1_{q_1}, L_{v_1}), \ldots, \pi(\mathfrak{A}^n_{q_n}, L_{v_n})>$.

Другими словами, система $\mathcal{A}$ является независимой системой, если любой из ее автоматов, двигаясь по лабиринту, «не осознает» факт существования ни одного из остальных автоматов. Неинициальная J-система автоматов $\mathcal{A}$ является независимой, если для всех возможных $\vec{q}$ система $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ является независимой.

Если выполнено $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) = V$ для некоторого $i \in \overline{n}$, то говорим, что n-система $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ *обходит* $L_{v_1,\ldots,v_n}$, а если $\cup_{i=1}^n \mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) = V$, то говорим, что $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ *слабо обходит* $L_{v_1,\ldots,v_n}$. Если $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) \neq V$ для всех $i \in \overline{n}$, то говорим, что $L_{v_1,\ldots,v_n}$ является *слабой ловушкой*, а если $\cup_{i=1}^n \mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) \neq V$, то лабиринт $L_{v_1,\ldots,v_n}$ назовем *ловушкой* для независимой системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$. Очевидно, что система $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ обходит лабиринт $L_{v_1,\ldots,v_n}$, если при некотором $i_0 \in \overline{n}$ автомат $\mathfrak{A}^{i_0}_{q_{i_0}}$ обходит лабиринт $L_{v_{i_0}}$, и что лабиринт L_v является слабой ловушкой для системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$, если этот лабиринт является ловушкой для любого автомата данной системы.

Как и в случае одного автомата, мы можем ввести аналогичным способом понятия $\alpha\beta$-обходит и $\beta\alpha$-ловушка (слабо $\alpha\beta$-обходит и слабая $\beta\alpha$-ловушка), где $\alpha \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$ и $\beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{I}_0, \mathrm{A}_0, \mathrm{E}_0\}$ (если $\beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$, то идет речь о J-инициальном лабиринте, у которого $|J| \geqslant 2$, а если $\beta \in \{\mathrm{I}_0, \mathrm{A}_0, \mathrm{E}_0\}$, то, по существу, имеется в виду 1-инициальный лабиринт). Так, например, независимая система $\mathcal{A}_{\vec{q}} = <\mathfrak{A}^1_{q_1}, \ldots, \mathfrak{A}^n_{q_n}>$ *слабо* IE-*обходит* лабиринт L, если существует $f = <v_1, \ldots, v_2>$ такое, что для системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ в лабиринте L_f выполнено $\cup_{i=1}^n \mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) = V(L)$; лабиринт L является *слабой* АЕ-*ловушкой* для системы $\mathcal{A}$, если существует $\vec{q}$ такое, что при любом $f = <v_1, \ldots, v_2>$ для системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ в лабиринте L_f выполнено $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) \neq V(L)$ для всех $i \in \overline{n}$; лабиринт L является $\mathrm{A}_0\mathrm{A}$-*ловушкой* для системы $\mathcal{A}$, если для всех $\vec{q}$ и для всех $v \in V(L)$ для системы $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ в лабиринте L_v выполнено $\cup_{i=1}^n \mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_v) \neq V(L)$.

Как и в случае одного автомата, возможны некоторые соглашения, которые упрощают выше данную терминологию. Поскольку в последующем в случае, когда α и β явно не указаны, всегда из контекста будет ясно, какие значения они принимают, то не будем приводить здесь эти соглашения.

Легко удостовериться, что независимая система автоматов является примером лабиринтного монстра.

Введем здесь одно обозначение, которое потребуется в дальнейшем. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый класс автоматов. Для любого автомата $\mathfrak{A}$ из класса $\mathcal{A}$ возьмем всевозможные инициальные автоматы, которые получаются варьированием его начальной вершины; если автомат $\mathfrak{A}$ уже инициальный, то возьмем его и все те автоматы, которые получаются из него, когда его начальное состояние заменяем на его любое другое состояние. Класс всех таким способом полученных инициальных автоматов обозначим через $[\mathcal{A}]$ и назовем *инициальным замыканием* класса $\mathcal{A}$.

Рассмотрим теперь более сильный вариант поведения системы автоматов $\mathcal{A}$ в лабиринтах множества $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$. Автоматы системы $\mathcal{A}$, двигаясь по любому лабиринту $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, будут учитывать кроме отметки вершины, в которой оказались, и всех отметок дуг, исходящих из нее, еще и состояния всех других автоматов системы, которые оказались в той же самой вершине.

Пусть $\mathcal{A} = <\mathfrak{A}^1_{q_1}, \ldots, \mathfrak{A}^n_{q_n}>$ — система автоматов $\mathfrak{A}^i_{q_i} = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i, q_i)$, $i \in \overline{n}$. Система $\mathcal{A}$ является (Ω, Σ)-*коллективом автоматов*, если для любого $i \in \overline{n}$ выполнены следующие условия:

1) входной алфавит A_i автомата $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ состоит из букв a вида $(\omega, \overset{*}{q}, \Sigma')$, где $\omega \in \Omega$ и $\Sigma' \subseteq \Sigma$, а $\overset{*}{q} : \overline{n} \to \bigcup_{k=1}^n Q_i$ — частичная функция с множества индексов $\overline{n}$ в множество $\bigcup_{k=1}^n Q_i$, не

определенная на i, и такая, что значение $\overset{*}{q}(j)$ или не определено, или принадлежит Q_j для любого $j \in \overline{n}$, $j \neq i$;

2) $B_i = \Sigma \cup \{\theta\}$, причем θ — фиксированный элемент, не принадлежащий Σ;

3) $\psi_i(q, a) \in \mathbf{p}_3(a) \cup \{\theta\}$ для любых $a \in A_i$ и $q \in Q_i$.

Интерпретируем функционирование (Ω, Σ)-коллектива автоматов $\mathcal{A} = <\mathfrak{A}^1_{q_1}, \ldots, \mathfrak{A}^n_{q_n}>$ в некотором лабиринте $L_{v_1,\ldots,v_n} \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$ его движением в лабиринте $L_{v_1,\ldots,v_n}$ следующим образом. Автомат $\mathfrak{A}^i_{q_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в начальный момент помещаем в вершину $v_i \in V(L)$, из которой он начинает свое движение в L. Предположим, что в некоторый момент $t \in \mathbb{N}_0$ этот автомат оказался в вершине $v_i^t \in V(L)$ и в состоянии $q_i^t \in Q_i$; при этом считаем, что $v_i^0 = v_i$ и $q_i^0 = q_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. В следующий момент $t+1$ он перемещается в вершину $v_i^{t+1} \in V(L)$ и переходит в состояние $q_i^{t+1} \in Q_i$ согласно следующей процедуре. Он обозревает нагруженную звезду, образованную исходящими из этой вершины дугами. Его входной буквой a_i^t в этот момент является тройка, образованная отметкой вершины v_i^t, частичной функцией $\overset{*}{q}{}_i^t : \overline{n} \to \cup_{i=1}^n Q_i$, такой, что $\overset{*}{q}{}_i^t(j) = q_j^t$, если $v_j^t = v_i^t$ и $j \neq i$, и $\overset{*}{q}{}_i^t(j)$ не определено в противном случае, и множеством $[v_i^t]$ отметок дуг, исходящих из вершины v_i^t. Функцию $\overset{*}{q}{}_i^t(j)$ можно описать набором вида $({}^i w_1^t, \ldots, {}^i w_n^t)$, где ${}^i w_j^t = \overset{*}{q}{}_i^t(j)$ для всех j, для которых значение $\overset{*}{q}{}_i^t(j)$ определено, а ${}^i w_j^t = \theta'$ в противном случае, где θ' — некоторый фиксированный символ, не принадлежащий множеству $\cup_{i=1}^n Q_i$. Тогда, если $\psi_i(q_i^t, a_i^t) \neq \theta$, то вершиной v_i^{t+1} будет вершина, в которую ведет в L дуга из v_i^t с отметкой $\psi_i(q_i^t, a_i^t)$, а если $\psi_i(q_i^t, a_i^t) = \theta$, то автомат остается на месте, то есть $v_i^{t+1} = v_i^t$, и в обоих случаях имеем, что $q_i^{t+1} = \varphi_i(q_i^t, a_i^t)$. Поскольку, существование вершины v_i^{t+1} обеспечено условием 3), то этот процесс продолжается бесконечно. Таким образом, автомат $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ осуществляет движение по лабиринту, последовательно проходя некоторый путь. Последовательность $(q_i^0, v_i^0), (q_i^1, v_i^1), \ldots$ называется *поведением автомата* $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ (Ω, Σ)*-коллектива* $\mathcal{A}$ *в лабиринте* $L_{v_1,\ldots,v_n}$; при этом говорим, что $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ *обходит* вершины $v_i^0, v_i^1, \ldots$, и обозначаем множество этих вершин через $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_n}; i)$. Последовательность

$$\pi(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_n}) = (q_1^0, \ldots, q_n^0, v_1^0, \ldots, v_n^0), (q_1^1, \ldots, q_n^1, v_1^1, \ldots, v_n^1), \ldots,$$

такая, что для любого $i \in \overline{n}$ последовательность $(q_i^0, v_i^0), (q_i^1, v_i^1), \ldots$ является поведением автомата $\mathfrak{A}_{q_i}^i$ коллектива $\mathcal{A}$ в лабиринте $L_{v_1,\ldots,v_n}$, называется *поведением* (Ω, Σ)-*коллектива* $\mathcal{A}$ в лабиринте $L_{v_1,\ldots,v_n}$. Введем обозначение

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_n}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_i}, L_{v_i}; i),$$

а также $\mathrm{Fr}(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_n}) = V(L_{v_1,\ldots,v_n}) \backslash \mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_i}, L_{v_1,\ldots,v_n})$. Если $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_n}) = V$, то говорим, что $\mathcal{A}$ *обходит* $L_{v_1,\ldots,v_n}$; в противном случае $L_{v_1,\ldots,v_n}$ является *ловушкой* для $\mathcal{A}$. Лабиринт L называем *сильной ловушкой* для $\mathcal{A}$, если для любых $v_1, \ldots, v_n \in V(L)$ лабиринт $L_{v_1,\ldots,v_n}$ является ловушкой для $\mathcal{A}$.

Ясно, что лабиринтный монстр $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$, определенный такой системой, является примером лабиринтного $\mathfrak{L}$-монстра для любого $\mathfrak{L} \subseteq \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$. Его допустимость по отношению к лабиринтам множества $\mathfrak{L}$ следует из условия 3). В последующем, если будем говорить о коллективе автоматов $\mathcal{A}$, допустимом для $\mathfrak{L}$, или просто о коллективе автоматов $\mathcal{A}$ в $\mathfrak{L}$, то на самом деле будем иметь ввиду монстр $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$.

Говорим, что коллектив $\mathcal{A} = <\mathfrak{A}_{q_1}^1, \ldots, \mathfrak{A}_{q_n}^n>$, допустимый для $\tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, является *синхронизированным* в лабиринте $L \in \tilde{\mathcal{L}}(\Omega, \Sigma)$, если все автоматы коллектива $\mathcal{A}$ помещены в начальный момент в одну и ту же вершину, то есть рассматривается поведение коллектива $\mathcal{A}$ в лабиринте L_f, где f такое, что $f(i) = v_0$ для некоторой вершины $v_0 \in V(L)$ и для всех $i \in \overline{n}$; в таком случае, как мы уже сказали, вместо записи $L_{v_1,\ldots,v_n}$ пишем L_{v_0} или $(L; v_0)$. Коллектив $\mathcal{A}$ *сильно обходит* неинициальный лабиринт L, если для любого $v \in V(L)$ коллектив $\mathcal{A}$ обходит лабиринт L_v.

Пусть $\mathcal{A} = <\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m>$, где $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i, q_i^0)$ для любого $i \in \overline{m}$, — некоторый (Ω, Σ)-коллектив автоматов. Подсистема $<\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_k}>$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$, системы $\mathcal{A}$ называется *системой автоматов-камней* или просто *системой камней* в коллективе $\mathcal{A}$, если имеют место следующие условия:

а) у автомата $\mathfrak{A}_{i_j}$, $j \in \overline{k}$, только одно состояние — $q^0_{i_j}$;

б) если для некоторого входа $a = (\omega, \overset{*}{q}, \Sigma')$ автомата $\mathfrak{A}_{i_j}$, $j \in \overline{k}$, имеет место $\psi_{i_j}(q, a) = \sigma \neq \theta$ $(\sigma \in \Sigma')$, то существует $l \in \overline{m}$, удовлетворяющее условию $l \neq i_{j'}$ для всех $j' \in \overline{k}$, такое, что $\overset{*}{q}(l) \neq \theta'$ и $\psi_l(q, a') = \sigma$, где $a' = (\omega, \overset{*}{q}', \Sigma')$, причем $\overset{*}{q}'(l) = \theta'$, $\overset{*}{q}'(i_j) = q^0_{i_j}$ и $\overset{*}{q}'(k') = \overset{*}{q}(k')$ для всех $k' \in \overline{n}$, $k' \neq i_j$, $k' \neq l$.

В случае, когда такая система камней существует, говорим, что у коллектива $\mathcal{A}$ есть *система камней мощности* k. Коллектив $\mathcal{A} = <\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m>$, у которого есть система камней мощности k, называется коллективом *типа* $(m - k, k)$. Ясно, что тип для конкретного коллектива неоднозначно определен. Если k такое, что в $\mathcal{A}$ существует система камней мощности k и не существует система камней мощности $k + 1$, то *рангом* коллектива $\mathcal{A}$ называется число $m - k$.

Легко понять, что для соответствующего лабиринтного монстра $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ любой автомат-камень представляет собою просто обыкновенный вершинный камень.

Понятие вершинного камня можно ввести и другим способом (см. выше). Под *системой камней* понимаем множество (и даже мультимножество) флажков (маркеров, меток). Любой из этих маркеров-камней может быть или «на руках» у некоторого автомата данного коллектива, или в некоторой вершине рассматриваемого лабиринта. Такое распределение камней задается соответствующей функцией, и эта функция меняется только локально в вершинах, в которых оказывается хотя бы один камень и хотя бы один из членов коллектива. Автоматы коллектива могут забирать или оставлять камни, но их общее количество остается постоянным. Такая система камней может служить ограниченной внешней памятью для коллектива автоматов. Легко удостовериться, что коллектив из p автоматов и q камней-маркеров можно легко смоделировать с помощью некоторого коллектива автоматов типа (p, q), и наоборот, любой коллектив автоматов типа (p, q) моделируется некоторым коллективом из p автоматов и q камней-маркеров. Поэтому в вопросах, о которых идет речь в работе, эти два подхода к понятию камня — «маркерный» и «автоматный» — будут равносильными.

Рассмотрим теперь самый важный для нас случай — случай коллективов автоматов, допустимых для класса всех n-мерных лабиринтов. Рассмотрим этот случай более подробно (отличия в обозначениях здесь являются несущественными).

Коллектив $\mathcal{A} = <\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m>$, где $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i, \hat{q}_i)$ для любого $i \in \overline{m}$, является *коллективом автоматов в* $\mathbb{R}^n$, если для любого $i \in \overline{m}$ выполнены следующие условия:

1) $A_i = \mathfrak{B}(\mathbf{D}_n) \times \prod_{i=1}^{m}(Q_i \cup \{\theta\})$;
2) $B_i = \mathbf{D}_n \cup \{\theta\}$;
3) $\psi_i(q, a) \in \mathbf{p}_1(a) \cup \{\theta\}$ для любых $q \in Q_i$ и $a \in A$;

здесь θ — некоторый фиксированный элемент, не принадлежащий множеству $\mathbf{D}_n \cup \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$.

Пусть L — некоторый n-мерный лабиринт, $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ — некоторый набор вершин длины m этого лабиринта и $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ — некоторый набор состояний автоматов коллектива $\mathcal{A}$ такой, что $q_i \in Q_i$ для любого $i \in \overline{m}$. Тогда введем обозначение

$$a_i(\vec{v}, \vec{q}) = ([v_i]_L, [a_i(\vec{v}, \vec{q}))]_1, \ldots, [a_i(\vec{v}, \vec{q})]_m), \text{ где}$$
$$[a_i(\vec{v}, \vec{q})]_j = \begin{cases} q_j, & \text{если } v_j = v_i \text{ и } j \neq i, \\ \theta, & \text{если } v_j \neq v_i \text{ или } j = i. \end{cases}$$

Пусть $\vec{v}_0 = (v_1^0, v_2^0, \ldots, v_m^0)$ — некоторый набор длины m вершин n-мерного лабиринта L. Под *поведением* коллектива $\mathcal{A}$ в $L_{\vec{v}_0}$ подразумеваем последовательность

$$\pi(\mathcal{A}; L, \vec{v}_0) = (\vec{v}_0, \vec{q}_0), \ldots, (\vec{v}_t, \vec{q}_t), \ldots,$$

такую, что для любых $i \in \overline{m}$ и $t \in \mathbb{N}_0$ выполнены следующие условия:

1) $\vec{v}_t = (v_1^t, \ldots, v_m^t)$ и $\vec{q}_t = (q_1^t, \ldots, q_m^t)$;
2) $q_i^0 = \hat{q}_i$ и $q_i^{t+1} = \varphi_i(q_i^t, a_i(\vec{v}_t, \vec{q}_t))$;
3) если $\psi_i(q_i^t, a_i(\vec{v}_t, \vec{q}_t)) \neq \theta$, то v_i^{t+1} такое, что $|(v_i^t, v_i^{t+1})| = \psi_i(q_i^t, a_i(\vec{v}_t, \vec{q}_t))$;
4) если $\psi_i(q_i^t, a_i(\vec{v}_t, \vec{q}_t)) = \theta$, то $v_i^{t+1} = v_i^t$.

Также введем обозначения

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}; L, \vec{v}_0) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{m} \{v_j^i\} \right) \quad \text{и} \quad \mathrm{Fr}(\mathcal{A}; L, \vec{v}_0) = V \backslash \mathrm{Int}(\mathcal{A}; L, \vec{v}_0).$$

Если в данных определениях $v_1^0 = \cdots = v_m^0 = v_0$ (то есть, имеется в виду случай синхронизированного коллектива автоматов), то в последующем всегда будем говорить не о поведении $\mathcal{A}$ в $(L; \vec{v}_0)$, а о поведении $\mathcal{A}$ в n-мерном лабиринте $(L; v_0)$, и во всех введенных обозначениях, в которых фигурирует $\vec{v}_0$, будем писать v_0 вместо $\vec{v}_0$.

Говорим, что: коллектив автоматов $\mathcal{A}$ *обходит* n-мерный лабиринт $(L; v_0)$, если $\mathrm{Int}(\mathcal{A}; L, v_0) = V(L)$; коллектив автоматов $\mathcal{A}$ *сильно обходит* неинициальный n-мерный лабиринт L, если для любого $v \in V(L)$ коллектив $\mathcal{A}$ обходит $(L; v)$; n-мерный лабиринт $(L; v_0)$ является *ловушкой* для коллектива $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}$ не обходит $(L; v_0)$. Примем также следующие соглашения: n-мерный лабиринт $(L; v_0, v_1)$ является *ловушкой* для $\mathcal{A}$, если $v_1 \in \mathrm{Fr}(\mathcal{A}; L, v_0)$; (неинициальный) n-мерный лабиринт L называется *сильной синхронной ловушкой* для коллектива автоматов $\mathcal{A}$, если для любого $v \in V(L)$ коллектив $\mathcal{A}$ не обходит (L, v).

3. Поведение независимой системы автоматов в лабиринте

Рассмотрим задачу синтеза для независимых систем автоматов в плоских мозаичных лабиринтах; слово «независимый» в этом параграфе для краткости будем иногда опускать. Также будем предполагать в дальнейшем, что все автоматы (независимые системы автоматов) будут допустимыми для классов лабиринтов, о которых идет речь в каждом конкретном случае.

Теорема 3.1. *Не существует конечный инициальный автомат, обходящий все конечные плоские мозаичные лабиринты, то есть такой, который бы был универсальным обходчиком для класса* $\mathfrak{L}_{\text{м}}^{\text{к}}$.

Это утверждение уже для конечных плоских шахматных лабиринтов фактически установлено в работе [10] с весьма громоздким обоснованием, использующим среди прочего и язык теории категорий. Элементарное и короткое доказательство теоремы 3.1 дается в работах [95, 96] (формальное отличие мозаичных и шахматных лабиринтов не является здесь существенным). Методически более наглядное доказательство этой теоремы содержится в [40, 86], техника которого позволила решить некоторые другие и упростить уже решенные задачи типа задач обхода [40, 89], о чем будет сказано ниже. После того, как была доказана теорема 3.1, вполне естественно возник вопрос о том, что происходит, если вместо одного конечного автомата взять независимую систему автоматов. Оказывается, что с точки зрения ее вычислительной силы по отношению к проблеме обхода независимая система автоматов представляет лишь небольшой шаг вперед. Как и можно было ожидать, справедливо следующее аналогичное утверждение:

Теорема 3.2. *Не существует конечная независимая система $\mathcal{A}$ инициальных автоматов, слабо обходящая все* 1*-инициальные лабиринты класса* $\mathfrak{L}_{\text{м}}^{\text{к}}$.

Эта теорема формально обобщает теорему 3.1. Однако при доказательстве утверждения теоремы 3.2 ключевым фактом является справедливость теоремы 3.1 [1, 33, 34, 84]. Основной идеей доказательства этих двух теорем является построение соответствующих ловушек. В работах [10, 95, 96] проблема построения соответствующих плоских мозаичных ловушек сводится к построению 2-мерных квазипрямоугольных ловушек. В связи с этим возникает проблема точной характеризации 2-мерных квазипрямоугольных лабиринтов. Приведем одну такую характеризацию, установленную в работе [35]. Сначала дадим некоторые необходимые сведения.

Пусть (G, η) — некоторый (симметрический орграф) граф G вместе с системой вращения η. Пусть $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$ — (контур) простой цикл, такой, что $(e_{k+1} = \eta_{v_k}(\overline{e}_k))$ $e_{k+1} = \eta_{v_k}(e_k)$ для всех $k \in \overline{n-1}$, и $(e_1 = \eta_{v_0}(\overline{e}_n))$ $e_1 = \eta_{v_0}(e_n)$. Циклическую перестановку $f = (e_1, \ldots, e_n)$ (дуг) ребер данного (орграфа) графа G назовем *гранью* (G, η).

Эйлеровой характеристикой конечного графа (G, η) без петель и кратных ребер назовем число $\epsilon(G, \eta) = |V(G)| - |E(G)| + |F(G)|$, где $F(G)$ — множество всех граней графа (G, η). *Эйлеровая характеристика конечного симметрического орграфа* (G, η) без петель и кратных дуг есть число $\epsilon(\overline{G}, \eta)$. Известно [62], что конечный (симметрический орграф) граф является планарным тогда и только тогда, когда $\epsilon(G, \eta) = 2$.

Пусть τ — циклическая подстановка $(\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{s})$ множества $\mathbf{D} = \{\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{w}, \mathbf{s}\}$. Определим функцию $\nu : \mathbf{D}^+ \to \mathbb{N}_0$ следующим способом:

а) $\nu(\sigma) = 0$, если $\sigma \in \mathbf{D}$;

б) $\nu(\sigma\sigma') = i \in \{1, 0, -1, -2\}$, где i такое, что $\sigma' = \tau^i(\sigma)$;

в) $\nu(\alpha) = \sum_{i=1}^{k-1} \nu(\sigma_i\sigma_{i+1})$ для любого $\alpha = \sigma_1 \ldots \sigma_k \in \mathbf{D}^+$, $k \geqslant 2$.

Пусть $L = (V, E)$ — некоторый 2-мерный лабиринт. Введем *каноническое вращение* η_L^+ симметрического орграфа $G(L)$ следующим образом. Пусть $D \subseteq \mathbf{D}$. Обозначим для любого $\sigma \in \mathbf{D}$ через $\tau_D(\sigma)$ значение $\tau^{k_0}(\sigma)$, где $k_0 = \min\{n \in \overline{4} \,|\, \tau^n(\sigma) \in D\}$. Тогда для любого $v \in V$ определим $(\eta_L^+)_v$ так, что для любой дуги $e \in E_v$ дуга $(\eta_L^+)_v(e)$ есть та дуга из E_v, у которой отметка $\tau_{[v]}(|e|)$. Пусть $f = (e_0, \ldots, e_{n-1})$ — некоторая грань орграфа $(G(L), \eta_L^+)$. Пусть $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}$ направления дуг $e_0, \ldots, e_{n-1}$, соответственно. Очевидно, что $\nu(\sigma_0 \ldots \sigma_{n-1}\sigma_0) = \nu(\sigma_{0+_nk} \ldots \sigma_{(n-1)+_nk}\sigma_{0+_nk})$ для любого $k \in \mathbb{N}$, где $+_n$ — операция сложения по модулю n. Обозначим через $\overline{\nu}(f)$ значение $\nu(\sigma_0 \ldots \sigma_{n-1}\sigma_0)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3. [35] *Если L — конечный 2-мерный лабиринт и $f_1, \ldots, f_n$ — все грани орграфа $(G(L), \eta_L^+)$, то лабиринт L квазипрямоугольный тогда и только тогда, когда:*

1) $\epsilon(G(L), \eta_L^+) = 2$;

2) существует такое $i_0 \in \overline{n}$, что $\overline{\nu}(f_{i_0}) = -4$ и $\overline{\nu}(f_i) = 4$ для всех $i \in \overline{n}$, $i \neq i_0$.

Достаточно близкая к описанной характеризация получена в работе [67], в которой отправной задачей являлась проблема описания плоских графов, возникающих при проектировании больших интегральных схем; в ней предложен алгоритм, проверяющий за $O(n)$

шагов свойство квазипрямоугольности 2-мерного лабиринта, у которого n вершин, а также алгоритм для прямоугольной укладки такого лабиринта за $O(n^2)$ шагов.

Отметим, что при доказательстве теорем 3.1 и 3.2 в работах [1, 10, 40, 84, 86, 95, 96] строились на самом деле соответствующие конечные плоские правильные ловушки. n-мерный правильный лабиринт $(L; v_0, v_1)$ называется *n-мерной правильной ловушкой* для системы $\mathcal{A}$, если ни один автомат системы $\mathcal{A}$, начиная свое движение с точки v_0, не обходит вершину v_1. Некоторые свойства этих ловушек описываются следующими утверждениями.

Теорема 3.4. [2] *Для любого инициального автомата с n состояниями существует конечная плоская правильная ловушка с не более, чем $Ce^{\sqrt{2n\log_2 2n}}$ вершинами.*

Теорема 3.5. [49] *Для любого инициального автомата существует конечная плоская правильная r-связная ловушка такая, что $r \leqslant 3$.*

Достаточно грубые оценки, подобные оценкам, содержащимся в этих двух утверждениях, могут быть получены и в случае системы автоматов, и в случае некоторых других типов ловушек. Остается открытым вопрос о понижении указанных оценок и получении соответствующих нижних оценок.

Так, например, известно, что множество всех конечных плоских $\mathbb{Z}$-односвязных шахматных лабиринтов может быть обойдено инициальным автоматом с некоторым фиксированным числом состояний ([7], [19], [20] и др.). Например, если у автомата поле зрения всегда имеет форму квадрата 3×3 с центром в текущей вершине (то есть оно получается в пересечении такого квадрата с данным лабиринтом), то может быть построен (неинициальный) автомат, универсальный для упомянутого класса лабиринтов, то есть АА-обходящий (начиная с любого своего состояния) любой конечный плоский односвязный шахматный лабиринт, у которого всего 4 состояния [84]. На основании этого автомата легко построить автомат, у которого 4 состояний и $\mathbf{D}$-образное (стандартное крестообразное) поле зрения и который является универсальным для класса всех конечных плоских $\mathbb{Z}$-односвязных шахматных лабиринтов. Также легко построить такой же автомат для класса всех конечных плоских односвязных мозаичных лабиринтов. Этот результат с учетом оценки из теоремы 3.5 оставляет открытым вопрос о возможности понижения этой оценки до двух.

Теорема 3.2, по сути дела, доказана в [1]. Для ее доказательства строится соответствующая слабая $\mathrm{I}_0\mathrm{I}$-ловушка (инициальный лабиринт, который является ловушкой для каждого автомата данной конечной независимой системы инициальных автоматов в отдельности). Интересно отметить, что теорема 3.2 в том виде, в каком она приводится здесь, дает ответ на проблему, которая, на первый взгляд, отличается от проблемы, исследуемой в [1]. Но это отличие только кажущееся. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Будем считать, что $\mathbb{R}^n$ — евклидовое n-мерное пространство, наделенное стандартной метрикой, где расстояние $d(x,y)$ между произвольными точками $x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ определено формулой

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \cdots + (y_n-x_n)^2}.$$

Под n-мерным (открытым) шаром (кругом, если $n = 2$) с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r \in \mathbb{R}^+$ понимается, как обычно, множество $\mathrm{Bl}_n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, d(x,y) < r\}$. Тогда, как принято, некоторое множество $V \in \mathbb{R}^n$ считается ограниченным, если $V \subseteq \mathrm{Bl}_n(x,r)$ для некоторых $x \in \mathbb{R}^n$ и $r \in \mathbb{R}^+$, или если $\operatorname{diam} V = \sup\{d(x,y) \,|\, x,y \in V\} < r'$ для некоторого $r' \in \mathbb{R}^+$, что эквивалентно предыдущему.

Говорим, что данный инициальный автомат $\mathfrak{A}$ *не справляется* с данным инициальным бесконечным мозаичным лабиринтом, если он, начиная свое движение с его начальной вершины, не покидает в нем какую-то ограниченную область, то есть не покидает какой-то круг в $\mathbb{R}^2$. Ясно, что из-за «мозаичности» лабиринта это условие эквивалентно требованию, чтобы множество вершин, посещаемых автоматом, было конечно. Легко заметить, что в случае конечного множества автоматов (в том числе и в случае, когда рассматривается только один автомат) существование такой ловушки для них — инициального бесконечного мозаичного лабиринта, с которым любой автомат из данного множества автоматов не справляется — эквивалентно существованию правильной ловушки для них. В случае бесконечной независимой системы автоматов (см. ниже) любой лабиринт, с которым не справляется ни один автомат системы, является бесконечной мозаичной слабой ловушки для этой системы, но обратное утверждение, очевидно, не имеет место. В [84] дано простое доказательство теоремы 3.2, причем соответствующая ловушка, построенная там, является правильной. При этом понятие ловушки для данной независимой системы автоматов можно понимать в нескольких различных смыслах. Обсудим коротко эти случаи.

Пусть дана независимая система автоматов $\mathcal{A}$. Как уже сказано в предыдущем разделе, некоторый лабиринт L является слабой ловушкой для $\mathcal{A}$, если он является ловушкой для каждого автомата данной системы в отдельности. Лабиринт L считаем *ловушкой* для $\mathcal{A}$, если он является ловушкой для всех автоматов данной системы в совокупности, то есть если существует вершина v лабиринта L, которую не посещает ни один автомат системы $\mathcal{A}$. Эти два основных типа ловушек можно, в случае неинициального лабиринта, сочетать еще и с требованием, чтобы в начальный момент все автоматы данной системы были помещены в одно (произвольное) поле лабиринта, или чтобы в начальный момент были разбросаны произвольным способом по лабиринту. При этом предполагается, что в случае неинициальной системы автоматы начинают работу с своего произвольного состояния. Если все это рассматривать еще и через призму несправляемости, а не невозможности обхода, то получаем целый спектр ловушек.

Интересно отметить, что, несмотря на кажущееся разнообразие, случаи всех этих ловушек легко разбираются с помощью ловушки «основного» типа. Так, например, легко удостовериться, что если надлежащим способом связывать в «конгломерат» определенное количество копий «обычной» конечной ловушки для системы $[\mathcal{A}]$, можно получить конечную ловушку любого имеющего смысл типа для $\mathcal{A}$ (в качестве числа копий можем взять число $n = |[\mathcal{A}]| + 1$). Одна конструкция такого типа дана в [84]. При этом часто мы должны отказываться (из-за понятных соображений) от правильности ловушки. Замечание такого рода имеет место даже в случае, если требуется решить следующую проблему: найти лабиринт $L \in \mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$, удовлетворяющий условию, что при любых $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$ и $v \in V(L)$ существует $v' \in V(L)$ такое, что лабиринт $(L; v, v')$ является правильной ловушкой для $\mathfrak{A}$.

Ясно, что для некоторых конкретных $\mathcal{A}$ лабиринт, удовлетворяющий этому условию, не существует.

Проблема построения бесконечной плоской мозаичной ловушки для всех конечных независимых систем автоматов фактически решена в [1]. Там было показано, что можно построить инициальный бесконечный плоский мозаичный лабиринт L_v, с которым не справляется ни один конечный инициальный автомат. Нетрудно убедиться, что отсюда следует достаточно общий результат, касающийся выше данной проблемы, и он может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 3.6. *Существует бесконечный плоский мозаичный лабиринт L, такой, что для любой независимой системы $\mathcal{A} = <\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n>$ инициальных автоматов и любых $v_1, \ldots, v_n \in V(L)$ множество $\cup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}_i, L_{v_i})$ является ограниченным.*

Изложенные результаты показывают ограниченность аналитических возможностей автоматов, то есть в определенном смысле характеризуют их негативно. Вместе с тем интересно выяснить, какие вопросы могут быть решены с их помощью, точнее, для каких содержательно интересных классов лабиринтов существуют автоматы или системы, обходящие их. Случай, когда в качестве независимой системы выступает только один автомат, рассматривался в работах [3, 73, 80, 81, 88, 90]. Приведем здесь некоторые результаты из этих работ.

Пусть L — конечный плоский мозаичный лабиринт. Для любой грани $f = (e_1, \ldots, e_n)$ лабиринта L (грани берутся по отношению к каноническому вращению) обозначим через $[f]$ множество всех вершин лабиринта, инцидентных некоторой из дуг $e_1, \ldots, e_n$. Число

$$\partial_F(L) = \max\{\mathrm{diam}[f] \mid f \in F_0(L)\},$$

где $F_0(L)$ — класс всех граней лабиринта L, очерчивающих его конечные дыры, назовем *пограневой крупностью* лабиринта L.

Определим расстояние $d_1(x, y)$ между произвольными точками $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ формулой $d_1(x, y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$. Обозначим через $\mathrm{diam}_1 V$ диаметр множества $V \in \mathbb{R}^2$ по отношению к метрике d_1, то есть $\mathrm{diam}_1 V = \sup\{d_1(x, y) \mid x, y \in V\}$.

Пусть h — произвольная $\mathbb{Z}$-дыра конечного плоского шахматного лабиринта L. *Границей* $\mathrm{Nb}(h)$ *дыры* h называется множество всех точек из $\mathbb{Z}^2 \setminus h$, которые находятся на расстоянии $\leqslant \sqrt{2}$ от хотя бы одной точки дыры h.

Через $H_0(L)$ обозначим множество всех конечных $\mathbb{Z}$-дыр лабиринта $L \in \mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$. Число

$$\partial_H(L) = \max\{\mathrm{diam}_1 \mathrm{Nb}(h) \,|\, h \in H_0(L)\}$$

назовем *целочисленной крупностью* или $\mathbb{Z}$-*крупностью* лабиринта L. Заметим, что из $\partial_H(L) \leqslant r$ следует $\partial_F(L) \leqslant r\sqrt{2}$, а из $\partial_F(L) \leqslant r$ следует $\partial_H(L) \leqslant r$; $r \in \mathbb{R}^+$.

Пусть L — некоторый лабиринт, и пусть $\mathfrak{A}$ — автомат, обходящий его. Тогда через $\mathrm{T}(L, \mathfrak{A})$ обозначим время, за которое $\mathfrak{A}$ обходит L.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов. Обозначим через ($\overline{\mathrm{Un}}(\mathfrak{L})$) $\mathrm{Un}(\mathfrak{L})$ множество всех универсальных (неинициальных) инициальных обходчиков для $\mathfrak{L}$. Через $\mathrm{St}(\mathfrak{L})$ обозначим число $\min\{Q_{\mathfrak{A}} \,|\, \mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\mathfrak{L})\}$, если $\mathrm{Un}(\mathfrak{L}) \neq \varnothing$, или ∞, если $\mathrm{Un}(\mathfrak{L}) = \varnothing$; если здесь вместо $\mathrm{Un}(\mathfrak{L})$ писать $\overline{\mathrm{Un}}(\mathfrak{L})$, то получаем число $\overline{\mathrm{St}}(\mathfrak{L})$. Под (*неинициальной*) *инициальной Q-сложностью обхода* класса лабиринтов $\mathfrak{L}$ подразумеваем число ($\overline{\mathrm{St}}(\mathfrak{L})$) $\mathrm{St}(\mathfrak{L})$; если из контекста ясно, о чем идет речь, то часто опускаем слово (неинициальный) инициальный.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов, и пусть $\mathcal{A}$ — некоторый класс конечных автоматов. Введем для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначения

$$\mathfrak{L}|_n = \{L \in \mathfrak{L} \,|\, |V(L)| = n\} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{A}|_n = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{A} \,|\, |Q_{\mathfrak{A}}| = n\}.$$

Теперь, пусть

$$\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{A}) = \max\{\mathrm{T}(L, \mathfrak{A}) \,|\, L \in \mathfrak{L}|_n\}$$

для любого $\mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\mathfrak{L})$. Аналогично введем число

$$\overline{\mathrm{T}}(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{A}) = \max\{\mathrm{T}(L, \mathfrak{A}_q) \,|\, L \in \mathfrak{L}|_n, q \in Q_{\mathfrak{A}}\}$$

для любого $\mathfrak{A} \in \overline{\mathrm{Un}}(\mathfrak{L})$. Также обозначим

$$\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n; m) = \min\{\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{A}) \,|\, \mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\mathfrak{L})|_m\},$$
$$\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n) = \min\{\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{A}) \,|\, \mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\mathfrak{L})\}.$$

Аналогичным образом определяем числа $\overline{\mathrm{T}}(\mathfrak{L}, n; m)$ и $\overline{\mathrm{T}}(\mathfrak{L}, n)$. Если какое-то из введенных чисел не определено, то формально приравниваем его символу ∞. Функцию ($\overline{\mathrm{T}}(\mathfrak{L}, n)$) $\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n)$ назовем (*неинициальной*) *инициальной T-сложностью обхода* класса $\mathfrak{L}$; если из контекста ясно о чем идет речь, то в данном выражении часто опускаем слово (неинициальный) инициальный.

Через $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}(m)$ обозначим класс всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, пограневая крупность которых ограничена числом $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.7. [90] *Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства*

$$\mathrm{St}(\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}(m)) \leqslant 48m + 52, \quad \mathrm{T}(\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}(m), n) \leqslant (3m^2 + 2)n - 2.$$

Первоначально подобный результат был получен в [81], где оценка для Q-сложности обхода была Cm^2 (C — константа, независящая от m) и где рассматривались конечные плоские шахматные лабиринты с ограничением на $\mathbb{Z}$-крупность, но это и то, что вместо мозаичных рассматривались шахматные лабиринты, как легко видеть, не является существенным. Этот результат был усилен в работе [88], а самые лучшие оценки для Q- и T-сложности обхода, полученные до сих пор, изложены в работе [90] и приводятся в выше данной теореме. Отметим, что результаты из приведенных работ, в том числе и из работы [90], касаются только универсальных инициальных автоматов. Значение $\overline{\mathrm{St}}(\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}(m))$ для любого $m \in \mathbb{N}$ пока удается оценить сверху только числом Cm^3, где C — константа, не зависящая от m. Отметим также, что в качестве m можно было бы взять любое положительное действительное число, что несущественным образом повлияло бы на данные оценки.

Следующий результат в определенном смысле усиливает теорему 3.7. Пусть γ — некоторый ненулевой целочисленный вектор (рациональное направление), и $d \in \mathbb{R}^+$. Лабиринт $L \in \mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$ назовем (d, γ)-ограниченным, если для любой его конечной дыры $h \in H_0(L)$ множество $\mathrm{Nb}(h)$ лежит в некоторой полосе ширины d, параллельной вектору γ (такие полосы назовем (d, γ)-полосами); класс всех таких лабиринтов обозначим через $\mathfrak{L}(d, \gamma)$. Следующая теорема по существу доказана в [80].

Теорема 3.8. [80] *Для любого* $d \in \mathbb{R}^+$ *и любого рационального направления* γ Q*-сложность обхода класса* $\mathfrak{L}(d, \gamma)$ *меньше числа* $Cd + C'$, C *и* C' *— константы, не зависящие от* d.

Тот факт, что в теореме 3.7 рассматриваются шахматные лабиринты, также, как и выше, не существен. Можно рассматривать конечные плоские мозаичные лабиринты и требовать, чтобы для любой $f \in F_0(L)$ множество $[f]$ лежало в некоторой (d, γ)-полосе [90]. В [90] получена также квадратная оценка вида Cn^2 сложности обхода по времени для таких лабиринтов. В [80] рассматриваются также конечные плоские шахматные лабиринты, удовлетворяющие следующему условию. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — конечный набор рациональных направлений и $d \in \mathbb{R}^+$. Лабиринт $L \in \mathfrak{L}_{\text{ш}}^{\text{к}}$ назовем $(d; \gamma_1, \ldots, \gamma_m)$-ограниченным, если для любой его конечной дыры $h \in H_0(L)$ множество $\mathrm{Nb}(h)$ лежит в (d, γ_i)-полосе для некоторого $i \in \overline{m}$. Множество $V \subseteq \mathbb{Z}^2$ называется *горизонтально-выпуклым*, если не существуют числа $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{Z}$, $a_1 < a_2 < a_3$, такие, что $(a_1, b), (a_3, b) \in V$ и $(a_2, b) \notin V$. *Горизонтально-выпуклая оболочка* множества $V \subseteq \mathbb{Z}^2$ — это минимальное горизонтально-выпуклое множество, содержащее V. Две конечные дыры $h_1, h_2 \in H_0(L)$ лабиринта $L \in \mathfrak{L}_{\text{ш}}^{\text{к}}$ *переплетаются*, если горизонтально-выпуклая оболочка дыры h_1 пересекается с границей $\mathrm{Nb}(h_2)$ дыры h_2. Рассмотрим класс всех $(d; \gamma_1, \ldots, \gamma_m)$-ограниченных лабиринтов, у которых нет пары переплетающихся дыр. В [80] показано, что Q-сложность обхода этого класса меньше числа $Cd^3 + C'$, где C и C' — действительные константы, не зависящие от d.

Остаются открытыми вопросы понижения оценок в этих теоремах. Отметим, что автоматы в них, обходя соответствующие лабиринты, не фиксируют совершение обхода их переходом в состояние остановки. Как показывает следующее утверждение, этот факт не является случайным.

Теорема 3.9. [15] *Не существует инициального автомата, который обходит и останавливается после обхода каждого лабиринта из:*

1) *класса всех конечных плоских прямоугольных лабиринтов, являющихся деревьями;*

2) класса всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, являющихся деревьями;

3) класса всех односвязных конечных плоских шахматных лабиринтов.

Здесь прямоугольный лабиринт L является *деревом* (является *древовидным*), если граф $\overline{G(L)}$ является деревом.

В работе [15] проблема остановки рассматривается прежде всего по отношению к так называемым квазирегулярным R-деревьям. Предположим здесь, без существенного ограничения общности, что в следующих определениях имеем дело с конечными графами без петель и без кратных ребер (если позволить петли и кратные ребра, то надо исходить из определения графоида, как это делается в [15]). Также, сделаем следующее важное замечание: всюду в последующем, где графы выступают в роли лабиринтов, мы на самом деле имеем в виду соответствующие симметрические орграфы.

Граф, у которого степень любой вершины не больше $d \in \mathbb{N}$, называется *графом с ограничением d на степень вершин.* Граф G называется *квазирегулярным степени $d \geqslant 2$*, если степень любой его вершины или 1, или d. Граф G называется *квазирегулярным*, если существует $d' \geqslant 2$, такое, что G является квазирегулярным степени d'.

Граф с вращением называется *R-графом.* R-граф, являющийся деревом, называется *R-деревом.* Обозначим через $\mathfrak{G}_R(d)$, $d \geqslant 2$, класс всех R-графов с ограничением d на степень вершин.

Основной класс лабиринтов, который рассматривается в [15], есть класс $\mathfrak{G}_R(d)$. Допустимыми автоматами для лабиринтов этого класса будут так называемые R-автоматы, то есть автоматы, у которых один реберный камень-указатель. Если такой автомат поместить в некоторый лабиринт этого класса, то этот камень служит для временного указания на ребро, по которому автомат пришел в некоторую вершину данного лабиринта (текущая вершина), то есть на ребро, начиная с которого, согласно системе вращения, считаются остальные ребра, инцидентные текущей вершине. Одно из этих ребер автомат выбирает в качестве ребра, по которому продолжает в следующий момент свое движение по лабиринту, причем это ребро становится на следующем шаге маркированным. Как отмечено в [15], легко построить

R-автомат, универсальный для класса всех R-деревьев, с ограничением $d \geqslant 2$ на степень вершин. Можно также тривиальным способом построить R-автомат, универсальный по отношению к классу всех квазирегулярных R-деревьев степени 2, который фиксирует факт обхода. Основным результатом в [15], из которого вытекают все остальные, надо считать следующее: показано, что последнее утверждение не имеет места для квазирегулярных R-деревьев степени $d \geqslant 3$ (d считается фиксированным), то есть что для любого R-автомата, универсального для класса всех квазирегулярных R-деревьев степени $d \geqslant 3$, существует квазирегулярное R-дерево степени d, которое он обходит, но не останавливается после этого. Непосредственно из этого следует и тот факт, что для класса квазирегулярных прямоугольных деревьев степени 4 нет универсального автомата, который бы останавливался после обхода.

Ранее в работе [51] показано, что не существует автомат, который обходит любой лабиринт из класса всех конечных плоских 2-связных мозаичных (шахматных) лабиринтов и останавливается после обхода.

С R-графами также связано исследование, проведенное в работе [75]. Здесь рассматриваются лабиринты в виде графов класса $\mathfrak{G}_R(d)$ (то есть в виде соответствующих симметрических орграфов) с размеченными (окрашенными) вершинами, причем отметки (краски) принадлежат конечному множеству $\Omega \cup \{\omega_0\}$, где ω_0, $\omega_0 \notin \Omega$, — «начальный цвет» вершин (в качестве него можно взять пустой символ, считая, что все вершины, у которых такая отметка, по существу «не окрашены»). Конечно, для удобства можно в качестве Ω взять множество $\overline{n}$, а в качестве ω_0 символ 0, как это делалось в [75]. Если L — некоторый лабиринт такого вида, то его раскраска задается функцией $c_L : V(L) \to \Omega \cup \{\omega_0\}$, где $c_L(v)$ — значение отметки (цвет) вершины $v \in V(L)$. Таким образом, в данной работе рассматриваются лабиринты, которые представляют собою пары вида (L, c_L), где L и c_L имеют данное выше значение. Автоматы, допустимые для этого класса лабиринтов, являются R-автоматами с печатью. Такой автомат, продвигаясь по некоторому лабиринту из данного класса, читает отметку текущей вершины и заменяет или не заменяет ее некоторым другим символом из Ω (иными словами, автомат может изменить цвет текущей вершины), но с одним достаточно сильным ограничением: только при условии, что он раньше не изменял отметку этой вершины (не красил ее). Из-за этого условия эти автоматы называются *автоматами с нестираемыми красками* (с $|\Omega|$ нестираемых красок). Обозначим класс всех таких автоматов через $\mathfrak{M}_d^R(\Omega)$, а через $\hat{\mathfrak{M}}_d^R(\Omega)$ — класс всех автоматов из $\mathfrak{M}_d^R(\Omega)$, которые на самом деле ничего не пишут по вершинам (не красят их), а только читают их отметки.

В работе [75] рассмотрены следующие три вопроса, касающиеся поведения таких автоматов в лабиринтах данного класса:

1) Существует ли автомат $\mathfrak{A} \in \hat{\mathfrak{M}}_d^R(\Omega)$ (следовательно, без печати), такой, что для любого $L \in \mathfrak{G}_R(d)$ существует его раскраска c_L, такая, что $\mathfrak{A}$ обходит (L, c_L)?
2) Существует ли автомат $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_d^R(\Omega)$, обходящий любой лабиринт (L, c_L) $(L \in \mathfrak{G}_R(d))$, у которого $c_L(v) = \omega_0$ для любой вершины $v \in V(L)$?
3) Существуют ли автоматы $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}_d^R(\Omega)$ и $\mathfrak{A}_2 \in \hat{\mathfrak{M}}_d^R(\Omega)$ такие, что $\mathfrak{A}_1$ способен раскрасить (и, конечно, обойти) любой лабиринт (L, c_L) $(L \in \mathfrak{G}_R(d))$, у которого $c_L(v) = \omega_0$ для любого $v \in V(L)$, и перейти в заключительное состояние, чтобы затем $\mathfrak{A}_2$ уже мог обойти таким образом раскрашенный лабиринт? Иными словами, существует ли автоматный (реализуемый универсальным автоматом с нестираемыми красками) способ раскраски лабиринтов такой, что для класса таким способом раскрашенных лабиринтов уже существует универсальный «некрасящий» автомат.

Кроме вопроса о существовании таких автоматов рассматривается вопрос о минимальном числе цветов, необходимом для решения этих задач.

В [75] показано что для решения поставленных задач достаточно только одной нестираемой краски $(|\Omega| = 1)$, то есть построена пара автоматов $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}_d^R(\Omega)$ и $\mathfrak{A}_2 \in \hat{\mathfrak{M}}_d^R(\Omega)$, такая, что если взять любой лабиринт (L, c_L) $(L \in \mathfrak{G}_R(d))$, у которого $c_L(v) = \omega_0$ для любого $v \in V(L)$, то

1) автомат $\mathfrak{A}_1$ обходит (L, c_L) начиная свое движение с произвольной его вершины и с своим камнем, расположенным на произ-

вольном ребре, инцидентном этой вершине (то есть, начиная с произвольной конфигурации), после обхода останавливается, и раскрашивает лабиринт, переводя его в пару (L, c'_L);

2) автомат $\mathfrak{A}_2$ обходит (L, c'_L), начиная свое движение с произвольной конфигурации.

Поскольку n-мерный прямоугольный лабиринт стандартным способом «превращается» в R-граф (для этого достаточно фиксировать некоторую циклическую подстановку на $\mathbf{D}_n$), то все выше данные результаты имеют место и в случае класса всех конечных n-мерных прямоугольных лабиринтов, раскрашенных по вершинам, и соответствующих допустимых автоматов с нестираемыми красками. Напомним, что в работе [111], предшествующей по существу работе [75], построен автомат, решающий задачу 2) для случая конечных плоских прямоугольных лабиринтов с помощью одной нестираемой краски. Затем независимо от исследований, проведенных в [75], этот результат обобщен в [112] на случай конечных n-мерных прямоугольных лабиринтов ($n > 2$): построен автомат с одной нестираемой краской, который может обойти любой, заранее не окрашенный конечный n-мерный прямоугольный лабиринт и остановиться после обхода. Этот результат, следующий из работы [75], и независимо полученный в [111], показывает, что автоматы с нестираемыми красками в каком-то смысле сильнее коллективов автоматов, являющихся более сильной разновидностью монстров, чем независимые системы автоматов. На самом деле, для любого коллектива автоматов уже в классе конечных трехмерных мозаичных лабиринтов существует ловушка (см., например, [6, 30, 87]).

Еще один тип красящих автоматов рассмотрен в работе [74]. Они являются допустимыми автоматами для плоских прямоугольных лабиринтов. В отличие от автоматов, описанных выше, они должны обязательно красить вершины, которые посещают: они обязательно оставляют в вершинах «след» о своем пребывании в них. Рассматривается случай, когда у автомата $m \geqslant 1$ красок, то есть его след в любой точке может быть одного из m цветов. Еще одно ограничение накладывается на употребление красок: если автомат пользовался какой-то краской ω в момент t, а в момент $t+1$ пользовался другой краской ω', $\omega' \neq \omega$, то он больше никогда не может повторно пользоваться краской ω. Так что можно считать, что запасы всех красок, кроме той, которую он использует последней, являются ограниченными. Заметим еще раз, что в любой момент t автомат обязательно окрашивает текущую вершину текущей краской (которая может оказаться такой же, как и та краска, которой вершина уже была окрашена). Такой автомат называется *автоматом, оставляющим m-след*, а если $m = 1$, то просто *автоматом, оставляющим след*. Основной результат работы [74] содержится в следующей теореме.

Теорема 3.10. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует автомат $\mathfrak{A}$, оставляющий m-след, $m = m(k)$, такой, что $\mathfrak{A}$ обходит любой заранее полностью неокрашенный k-связный прямоугольный лабиринт, причем $m < 198k$.*

В то же время в [113] показано, что при любом $m \in \mathbb{N}$ для любого автомата, оставляющего m-след, можно построить бесконечную плоскую прямоугольную ловушку.

Наконец, в работе [93] рассматриваются красящие автоматы с так называемыми исчезающими красками. Изучаются два типа таких автоматов, допустимых для класса всех плоских прямоугольных лабиринтов.

Автомат первого типа имеет одну τ-исчезающую краску, $\tau \geqslant 2$. Под *τ-исчезающей краской* понимается краска, удовлетворяющая следующему условию: если автомат пользовался этой краской в момент t, окрашивая текущую вершину v, то эта вершина, начиная с момента $t+1$ по момент $t+\tau$ включительно, является окрашенной; после этого момента краска исчезает с вершины v и она становится неокрашенной, то есть получает первоначальный цвет, если, конечно, автомат не побывал за это время повторно в вершине v и заново ее не покрасил (ясно, что в таком случае «счетчик краски» устанавливается на начало). Автомат с такой краской называется автомат с τ-исчезающей краской. В [93] показано, что возможности автомата с τ-исчезающей краской (по обходу лабиринтов), не намного превышают возможности автомата без красок (конечного автомата, допустимого для всех плоских прямоугольных лабиринтов, который ничего не красит).

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов, и $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — два произвольных конечных автомата (один из них или оба могут быть с краской или без нее). Говорим, что автомат $\mathfrak{A}_2$ *сильно моделирует* автомат $\mathfrak{A}_1$ на множестве $\mathfrak{L}$, если $\mathrm{Tr}_V(\mathfrak{A}_2, L_v) = \mathrm{Tr}_V(\mathfrak{A}_1, L_v)$ для любых $L \in \mathfrak{L}$ и $v \in V(L)$ (иными словами, если на эту пару автоматов смотреть как на независимую систему автоматов в L_v, то они должны все время «шагать» вместе).

Автомат $\mathfrak{A}_2$ *слабо моделирует* автомат $\mathfrak{A}_1$ в некотором инициальном лабиринте L_v, если для любого $t_1 \in \mathbb{N}_0$ существует $t_2 \geqslant t_1$, такое, что $\mathrm{Int}_{t_2}^{\leqslant}(\mathfrak{A}_2; L_v) = \mathrm{Int}_{t_1}^{\leqslant}(\mathfrak{A}_1; L_v)$. Автомат $\mathfrak{A}_2$ *слабо моделирует* автомат $\mathfrak{A}_1$ на множестве лабиринтов $\mathfrak{L}$, если автомат $\mathfrak{A}_2$ слабо моделирует автомат $\mathfrak{A}_1$ в любом лабиринте L множества $[\mathfrak{L}]$.

Обозначим через $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(n)$ класс всех плоских прямоугольных лабиринтов, у которых любой простой цикл имеет длину больше, чем $n \in \mathbb{N}$ (у которых обхват больше, чем n). Ясно, что $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(n) = \mathfrak{L}_{\text{п}}$ для любого $n \leqslant 3$.

В [93] показано, что для автомата с τ-исчезающей краской всегда существует автомат без краски, который его сильно моделирует на множестве $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(\tau)$. Поскольку для любого автомата без краски некоторая из его конечных ловушек обязательно принадлежит множеству $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(\tau)$, то из предыдущего следует, как отмечается в [93], что для автомата с τ-исчезающей краской всегда существует конечная ловушка из множества $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{ц}}(\tau)$.

Указаны некоторые случаи, когда автомат с τ-исчезающей краской все-таки оказывается сильнее обычного автомата.

Второй тип автоматов — это автоматы с γ-периодической краской: если такой автомат окрашивает некоторую вершину такой краской в момент t_0, то эта вершина является окрашенной в любой момент вида $t = t_0 + 1 + k\gamma$, $k \in \mathbb{N}_0$, а все остальное время она должна считаться неокрашенной (иными словами, краска периодически на один момент времени появляется); вершина, окрашенная такой краской называется *мерцающей*. Возможно и повторное окрашивание вершин, но если некоторую мерцающую вершину автомат красит повторно, то «счетчик краски», который ее «включает и выключает», сбрасывается на начало.

В [93] показано, что автомат с γ-периодической краской, у которого есть возможность задержки на один такт времени в вершинах лабиринта, в каком-то смысле не хуже автомата с одной нестираемой краской. Точнее, для любого автомата $\mathfrak{A}$ с одной нестираемой краской и любого $\gamma \in \mathbb{N}$ существует автомат с γ-периодической краской и с возможностью задержки на один такт времени в вершинах лабиринта, который слабо моделирует $\mathfrak{A}$ на множестве $\mathfrak{L}_{\text{п}}$ всех плоских прямоугольных лабиринтов.

Поскольку существует универсальный автомат с одной нестираемой краской для класса $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{к}}$ ([111]), то из предыдущего, как отмечается в [93], следует, что для любого $\gamma \in \mathbb{N}$ существует автомат с γ-периодической краской и с возможностью задержки на один такт времени в вершинах лабиринта, который является универсальным для класса $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{к}}$.

Наконец, в работе [93] показано, что в классе автоматов без задержки с γ-периодической краской существует универсальный автомат для $\mathfrak{L}_{\text{п}}^{\text{к}}$ тогда и только тогда, когда γ нечетно.

В алгоритмическом плане интерес представляет задача синтеза, когда по заданному классу лабиринтов требуется установить, существует ли алгоритм, который по произвольному автомату устанавливает, обходит ли автомат все лабиринты из этого класса. Здесь нет достаточно общих результатов, имеются лишь отдельные примеры разрешимых и неразрешимых случаев. Приведем их здесь.

Пусть $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$ — класс всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, лежащих в полосе ширины k ($k \in \mathbb{N}$), параллельной оси x-ов. Тогда, пусть $\mathfrak{L}_2^{=}(k)$ — подкласс всех древовидных лабиринтов из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$, $\mathfrak{L}_3^{=}(k)$ — подкласс всех петель (лабиринтов, не являющихся древовидными) из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$, $\mathfrak{L}_4^{=}(k)$ — подкласс всех лабиринтов L из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$, таких, что у графов $\overline{G(L)}$ степень любой вершины не более двух (то есть подкласс всех конечных змеевидных лабиринтов из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$ вместе с подклассом всех лабиринтов из $\mathfrak{L}_1^{=}(k)$, имеющими вид простого цикла).

Теорема 3.11. [18] *Следующие утверждения являются верными:*

а) для любых $1 \leqslant i \leqslant 4$ и $k \in \mathbb{N}$ существует алгоритм, который по любому автомату устанавливает, обходит он или не обходит все лабиринты из класса $\mathfrak{L}_i^{=}(k)$;

б) *существует алгоритм, устанавливающий по заданному автомату, обходит ли он или нет любой (древовидный) змееобразный лабиринт из класса всех конечных плоских прямоугольных лабиринтов;*

в) *не существует алгоритма, устанавливающего по заданному автомату, обходит ли он или нет любой (древовидный) змееобразный лабиринт из класса всех конечных плоских мозаичных лабиринтов.*

Например, в случае конечных змееобразных плоских прямоугольных лабиринтов (утверждение б)) показывается, что если по отношению к этому классу лабиринтов данный автомат, у которого m состояний, является не универсальным, то обязательно найдется лабиринт из этого класса, имеющий меньше $n(m) = 2^{5+(m+1)^2}$ вершин, который данный автомат не обходит. Поскольку множество змееобразных плоских прямоугольных лабиринтов, имеющих меньше $n(m)$ вершин, конечно, то и проверку универсальности автомата можно осуществить за конечное время (надо просто запустить автомат в каждом лабиринте из этого множества, и если он обходит их все, что проверяется за конечное время, то этот автомат является универсальным; в противном случае он таковым не является). В случае конечных древовидных плоских прямоугольных лабиринтов в качестве $n(m)$ можно выбрать число $4^{2^{7+(m+1)^2}}$.

В работе [53] исследуется специальный лабиринт, который строится следующим образом. Берется лабиринт, образованный первым октантом лабиринта $\mathbb{Z}^2$, то есть, множество его вершин есть множество $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant x\}$. Затем склеиваются (отождествляются) его вершины вида $(x, 0)$ и (x, x). Получаем как бы коническую поверхность с соответствующей координатной сеткой. Линию склейки (содержащую вершины, полученные отождествлением вершин $(x, 0)$ и (x, x)), будем считать выделенной. Таким образом, получаем лабиринт, которому в соответствии с терминологией, принятой в [14], практически соответствует среда **Cone**. В качестве входа в этом лабиринте выбирается вершина $(0, 0)$. Рассматриваются автоматы, которые при помещении в этот лабиринт ведут себя следующим образом: двигаются только вправо или вверх; в качестве направления своего первого хода всегда выбирают $\mathbf{e}$ (направление восток); их состояния сменяют друг друга циклическим способом (то есть слово состояний их поведения имеет вид $q_1q_2\ldots q_nq_1q_2\ldots$, где $q_1,q_2,\ldots,q_n$ — все состояния такого автомата). Таким образом, если автомат такого типа оказался в некоторый момент в вершине (x,y) и выбирает направление ω, то в следующий момент он окажется в вершине (x',y'), где

$$(x',y')=\begin{cases}(x+1,y), & \text{если } \omega=\mathbf{e},\\ (x,y+1), & \text{если } \omega=\mathbf{n} \ \text{ и } \ y+1<x,\\ (x,0), & \text{если } \omega=\mathbf{n} \ \text{ и } \ y+1=x.\end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы выяснить, существует ли алгоритм, который для любого такого автомата устанавливает возможность его выхода в выделенном состоянии на линию склейки. Эта задача впервые была поставлена Л.Будахом ([22, 39]), и она известна под названием «проблема мыши в первом октанте». В работе [53] делается несколько замечаний относительно этой проблемы, но, в целом, она до сих пор остается открытой.

Отличие между «дискретной конической поверхностью», определенной в предыдущем абзаце, и лабиринтом, который является главным объектом исследования в [14], состоит в том, что в [14] выделение линии склейки осуществляется явным способом — вершины, которые принадлежат ей, отмечаются отметкой 0, остальные отметкой 1, и в том, что точка $(0,0)$ выключена из лабиринта. Обозначим полученный лабиринт через **Cone**. В этом лабиринте рассматриваются, как и выше, автоматы, которые могут двигаться только вправо или вверх, и при этом вершина (x',y'), в которую они попадают из вершины (x,y), определяется как и выше; обозначим класс всех таких автоматов через $\mathrm{Aut}(\mathbf{Cone})$. Автоматы из этого класса начинают свое движение в **Cone** с произвольной его вершины, и при этом учитывают отметки вершин. Для лабиринта **Cone** и автоматов множества $\mathrm{Aut}(\mathbf{Cone})$ исследовались следующие две проблемы ([14]):

1) является ли проблема остановки для $\mathfrak{A}$ в лабиринте **Cone** разрешимой, то есть существует ли эффективная процедура, которая для любого автомата $\mathfrak{A}\in\mathrm{Aut}(\mathbf{Cone})$ и для любой его стартовой точки $(x,y)\in V(\mathbf{Cone})$ определяет, остановится ли автомат в **Cone**;

2) является ли проблема пустоты в лабиринте **Cone** разрешимой, то есть существует ли эффективная процедура, которая по данному автомату $\mathfrak{A} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{Cone})$ определяет, существует или нет такая вершина $(x, y) \in V(\mathbf{Cone})$, что, выходя из нее, автомат $\mathfrak{A}$, спустя некоторое время, остановится.

Главным результатом в [14] является следующий: проблема пустоты и проблема остановки являются неразрешимыми.

Отметим здесь, что первое построение конечной шахматной ловушки для конечного автомата было осуществлено в работе [19, 20], где допускалось рассмотрение трехмерных лабиринтов. Условие трехмерности было существенным для простоты построения такой ловушки. Более трудной оказалась задача построения ловушки для автомата на плоскости. В работе [48] строится такая ловушка, которая не является мозаичным лабиринтом, но оказывается плоской. Ловушка, построенная в [48], является плоским квазирегулярным R-графом степени 3, у которого вращение — *каноническое* (это вращение определяется стандартным образом положительной ориентацией на плоскости). Построить такую ловушку было существенно проще, чем доказать теорему 3.1, справедливость которой была установлена позже.

В работе [110] изучалась проблема синтеза оптимальных по количеству состояний автоматов с заданной траекторией. Проблема ставится следующим образом. Задается произвольный путь в некотором плоском мозаичном (прямоугольном) лабиринте. Надо построить автомат с минимальным количеством состояний, у которого траектория, очерченная им в течение некоторого начального отрезка времени, есть именно этот заданный путь. Ясно, что методом полного перебора такой оптимальный автомат можно всегда построить. Автор работы считает, что эта задача принадлежит к классу трудно решаемых проблем (NP-проблем), и предлагает несколько полиномиальных методов для ее приблизительного решения. По мнению автора, эта задача тесно связана с проблемами раскраски графов. Предложенные здесь методы представляют собою методы раскраски, приспособленные к этой автоматной задаче.

В работе [109] моделируется поведение автоматов в лабиринтах, точнее автоматов в m-лабиринтах на компьютере. Для этой цели разработан специальный, небольшой по размерам, язык программирования, названный AUTLAV, с помощью которого соответствующим способом описываются автоматы и лабиринты. Поведение таким образом данных автоматов в данных лабиринтах наглядно представляется на мониторе. Разработанный пакет программ может служить для экспериментирования с автоматами в лабиринтах при поиске универсальных автоматов, ловушек определенного типа, оптимальных по определенным параметрам лабиринтных автоматов и тому подобного.

Наконец, отметим что в работах [9, 12, 13] предпринята попытка обоснования более общей теории, чем той, которая исследует поведение конечных автоматов в прямоугольных лабиринтах. Понятие мозаичного лабиринта обобщается до понятия среды (интерпретациями которой являются прямоугольные лабиринты, лабиринты Савича, и т. п.), а понятие автомата, допустимого для класса прямоугольных лабиринтов, обобщается до понятия автомата, допустимого для класса сред и имеющего возможность остановиться в каком-то финальном состоянии и подать «последний сигнал» (такие автоматы названы распознающими автоматами или распознающими роботами). Функционирование таких автоматов интерпретируется движением в средах. Вводится также специальный класс сред — R-среды и рассматриваются соответствующие R-роботы. Рассматриваются некоторые общие проблемы, касающиеся этих моделей. Приведенные работы имеют сугубо алгебраический характер. Отметим, что понятия лабиринта и лабиринтного монстра, которые даны в предыдущих разделах, охватывают понятия среды и роботов. В работах [9, 12, 13] также отмечена важность лабиринтов в смысле того, что любая среда, с точки зрения функционирования автоматов в ней, может быть заменена соответствующим лабиринтом. В [45] доказано, что для такой редукции достаточен класс плоских лабиринтов.

4. Поведение коллектива автоматов в лабиринте

Введем сначала несколько понятий, которые нам потребуются в настоящем разделе.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов. На множестве всех пар $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ определим частичный порядок $\leqslant$, полагая, что $(a,b) \leqslant (c,d)$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant c$ и $b \leqslant d$. Будем писать $(c,d) < (a,b)$, если $(c,d) \leqslant (a,b)$ и $(c,d) \neq (a,b)$. Предикат $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(i,j)$ на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ определим таким образом, что $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(a,b) = 1$, если существует коллектив типа (a,b), обходящий все лабиринты из $\mathfrak{L}$, и $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(a,b) = 0$, если такой коллектив не существует. Предикат $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$ назовем *предикатом обхода* (класса $\mathfrak{L}$). Нетрудно видеть, что для любых целочисленных неотрицательных пар (a,b) и (c,d), таких, что $(a,b) \leqslant (c,d)$, из $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(a,b) = 1$ следует $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(c,d) = 1$, а из $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(c,d) = 0$ — $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(a,b) = 0$. Отсюда получаем, что предикат $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$ является монотонным относительно частичного порядка $\leqslant$, то есть что из $(a,b) \leqslant (c,d)$ следует $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(a,b) \leqslant \mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(c,d)$.

Пару (a,b) назовем *нижней единицей* для $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$, если $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(a,b) = 1$, и если $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(c,d) = 0$ для любого $(c,d) < (a,b)$. Пусть $\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}]$ — множество всех нижних единиц для $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$. Ясно, что предикат $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$ однозначно определяется множеством $\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}]$. В случае, когда $\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}] \neq \varnothing$, назовем *минимальной единицей* для $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$ ту из нижних единиц для $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$, у которой первая координата равна числу $\min\{a \,|\, (a,b) \in \mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}]\}$.

Пусть $\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}] \neq \varnothing$, и пусть (a_0,b_0) — минимальная единица для $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$. Легко убедиться, что $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(a,0) = 1$ для любого натурального числа $a \geqslant a_0 + b_0$. Отсюда следует, что в случае, когда есть минимальная единица для $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$, есть и *максимальная единица* для $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$, то есть, есть нижняя единица для $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$, у которой первая координата равна числу $a_1 = \max\{a \,|\, (a,b) \in \mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}]\}$. Легко показать, что максимальная единица имеет вид $(a_1, 0)$, и что для любого $a_0 \leqslant x \leqslant a_1$ существует $y \in \mathbb{N}_0$, такое, что $(x,y) \in \mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}]$.

Также определим частичную функцию $f_{\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ так, что

$$f_{\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}}(x) = \min\{y' \,|\, \mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(x,y') = 1\};$$

функция $f_{\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}}$ является полностью неопределенной, если $\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}] = \varnothing$. Назовем эту функцию *характеристической функцией* предиката $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$.

Пусть $\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}] \neq \varnothing$, и пусть (a_0,b_0) и $(a_1,0)$ — минимальная и максимальная единица для $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$, соответственно. Ясно, что функция $f_{\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}}$ определена для всех $x \geqslant a_0$, и что $f_{\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}}(x) = 0$ для всех $x \geqslant a_1$. Поскольку из $d > 0$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(c,d) = 1$, следует, что $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}(c+1, d-1) = 1$, то функция $f_{\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}}$ строго убывает на множестве $\mathbf{p}_1(\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}])$. Удобно представлять функцию $f_{\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}}$ графическим образом. Свяжем прямым отрезком точку $(0,0)$ и (a_0,b_0), а также пары точек вида $(n, f_{\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}}(n))$ и $(n+1, f_{\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}}(n+1))$ для любого $n \geqslant a_0$. Полученная ломаная имеет следующее свойство: она проходит через все нижние единицы, и для любой целочисленной точки (x,y), $x \geqslant a_0$, которая лежит на этой ломаной или над ней, значение предиката $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$ равно 1, для всех остальных (лежащих под этой ломанной или слева от прямой $x = a_0$) это значение равно 0; эту ломаную назовем *характеристическим графиком* предиката $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$.

Наконец, сделаем одно замечание по поводу употребления термина «предикат». Мы будем использовать его в самом общем смысле: под n-местным предикатом на множестве M понимаем произвольную n-местную функцию, определенную на M и принимающую значения 0 и 1. Тогда под *областью определения* данного предиката подразумеваем множество всех наборов значений аргументов, на которых этот предикат принимает значение 1.

Изложим теперь основные результаты по поведению коллективов автоматов в лабиринтах.

Начнем с рассмотрения задачи синтеза для коллективов автоматов в лабиринтах. Сначала рассмотрим случай плоских мозаичных лабиринтов и выясним, какие минимальные по числу автоматов коллективы могут обходить все такие лабиринты.

Теорема 4.1. *Для класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$ и предиката $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}$ имеет место равенство $\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}] = \{(1,2),(2,0)\}$, при этом существуют коллективы типа $(1,2)$ ($(2,0)$), обходящие лабиринты из n клеток класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$ за время $O(n^3)$ ($O(n^2)$) и останавливающиеся после обхода.*

Характеристический график предиката $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}$ приведен на рис. 7. В работе [60] показано, что $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,5) = 1$, причем существуют некоторые коллективы типа $(1,5)$, которые обходят любой лабиринт из $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$ и останавливаются после обхода. В работе [7] дан эскиз доказательства того, что $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,2) = \mathbf{P}_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(2,0) = 1$ (полное доказательство можно найти, например, в работе [85]). Отметим, что, на самом деле, в упомянутых работах вместо класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$ рассматривался класс $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$, но, как нетрудно заметить, достаточно внести небольшие изменения в доказательствах соответствующих утверждений для класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$, чтобы получить доказательства тех же самых утверждений для класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$. Приведенный алгоритм обхода в [7] оказался весьма плодотворным: он использовался в разных вариациях при решении некоторых других проблем. Опишем его здесь в основных чертах в случае класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$.

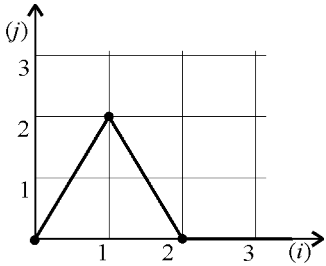


Рис. 7.

Пусть L — некоторый конечный плоский шахматный лабиринт, и h — некоторая его (конечная или бесконечная) целочисленная дыра. Под *границей* $\mathrm{Nb}(h)$ дыры h понимаем множество всех вершин лабиринта L, которые находятся на расстоянии, не превосходящем $\sqrt{2}$ от некоторой вершины дыры h. Обозначим через $\preceq$ порядок в $\mathbb{Z}^2$ такой, что $(a, b) \preceq (c, d)$, где $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$, тогда и только тогда, когда $(b < d) \vee (b = d \wedge a \leqslant c)$. Поле $v_0 \in \mathrm{Nb}(h)$ называется *h-особенным* полем, если $v \preceq v_0$ для любого $v \in \mathrm{Nb}(h)$. Ясно, что для любой дыры существует только одно такое поле. Поле лабиринта L называется *особенным*, если оно h-особенно для некоторой его целочисленной дыры h.

Легко убедиться, что если бы особенные поля всех конечных $\mathbb{Z}$-дыр лабиринта L были маркированы (например, символом $\bullet$), то было бы легко построить автомат, который обходит таким способом размеченный лабиринт L. Для такой цели годится, например, немного измененный вариант автомата, обходящего все конечные плоские шахматные лабиринты без конечных $\mathbb{Z}$-дыр, упомянутый в предыдущем разделе (он «переходит на другую горизонталь», только если слева от него находится поле какой-то $\mathbb{Z}$-дыры); достаточно к «про-

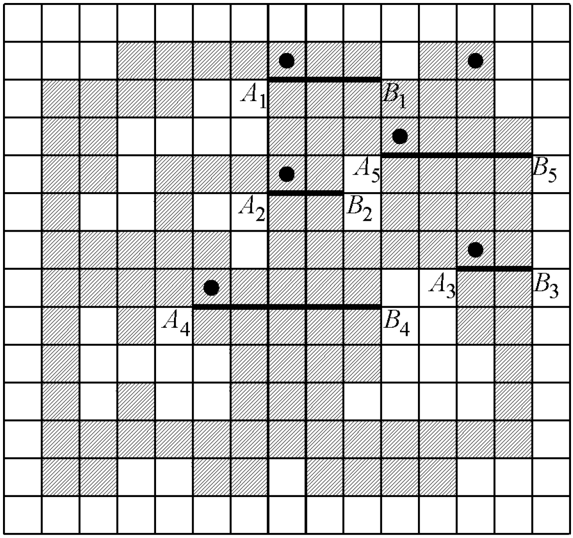


Рис. 8.

грамме» этого автомата добавить следующие указания: если u — маркированная вершина, то ходы с u на $u\mathbf{s}$ и с $u\mathbf{s}$ на u запрещаются (если автомат делает шаг такого типа, то он должен сразу вернутся на исходное поле, то есть, на поле, с которого совершил такой шаг). Если автомат следует таким указаниям, то он не переходит воображаемый горизонтальный отрезок с концами на границах двух «соседних дыр», разделяющий «горизонталь» маркированного поля u от горизонтали его «южного соседа» $u\mathbf{s}$ (все «воображаемые отрезки», данного на рис. 8 лабиринта, суть отрезки A_iB_i, $i \in \overline{5}$). Таким образом, маркировка особенных полей способствует «разрезанию лабиринта по горизонтальным отрезкам», что «превращает» его в односвязный лабиринт. Следовательно, задача обхода сводится к тому, чтобы построить автомат, который обнаруживает особенные поля. Оказывается, что для такой цели годится автомат с одним счетчиком. Этот автомат, оказавшись на поле v границы некоторой дыры h, может (если точку v вообще можно подозревать в «особенности»), поворачиваясь вокруг дыры надлежащим способом и возвращаясь в v, ответить как на вопрос, является ли поле v особенным полем дыры

h, так и на вопрос, является ли эта дыра бесконечной или конечной. Следовательно, он может узнать, «маркировано» это поле или нет (при этом в счетчике всегда хранится число, не превосходящее периметр дыры). Сочетая надлежащим способом алгоритм этого автомата и автомата, который мы описали выше, получаем, наконец, автомат со счетчиком, который обходит любой плоский конечный шахматный лабиринт. Этот автомат может фиксировать факт обхода, поскольку его повторное «исследование на особенность» особенного поля бесконечной дыры, фактически обозначает, что он уже обошел лабиринт. Легко смоделировать работу этого автомата коллективами автоматов типа (1,2) и (2,0), причем оценки времени обхода для них неявно следуют из данного алгоритма. Также неявно из [7] следует, что автомат со счетчиком обходит класс всех конечных плоских шахматных лабиринтов за время $O(n^2)$. Поскольку формальное отличие шахматных и мозаичных лабиринтов не существенно в этих построениях, то те же результаты имеют место и для класса $\mathfrak{L}_{\text{м}}^{\text{к}}$, что утверждается в теореме 4.1.

К сожалению, данный алгоритм можно применить только к мозаичным лабиринтам, поскольку автоматы, которые двигаются согласно этому алгоритму, не только учитывают, в каких направлениях выходят из текущей вершины ребра («сила компаса»), но и сравнивают на равенство ординаты вершин границы (на границе они могут обнаружить все поля, которые «находятся на одном и том же уровне»). Поэтому эти алгоритмы невозможно применить к прямоугольным лабиринтам. В работе [28] удалось осуществить обобщение теоремы 4.1 на случай плоских прямоугольных лабиринтов. В ней использован алгоритм из работы [3], с помощью которого автомат со счетчиком и одним камнем, начиная свою работу с любой внутренней вершины (с вершины, которая не принадлежит границе бесконечной дыры) конечного плоского прямоугольного лабиринта, выходит на его внешнюю границу (границу его бесконечной дыры), причем этот алгоритм использует только «силу компаса». Этот алгоритм в работе [28] расширен (выделены его основные ключевые моменты) и усовершенствован, и с его помощью теорема 4.1 обобщена на случай плоских прямоугольных лабиринтов с соответствующими оценками времени обхода вида $O(n^4)$ и $O(n^3)$, а для автомата со счетчиком и одним камнем это время равно $O(n^2)$. Неизвестно, обходит ли автомат со счетчиком все прямоугольные лабиринты.

Окончательный шаг, необходимый для полного утверждения справедливости теоремы 4.1, был сделан в работах [33, 34]. Сначала в работе [33] в эскизном виде, а потом подробно — в работе [34] было дано доказательство того, что $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,1) = 0$.

Следует заметить, что как и в случае класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}(m)$ $(m \in \mathbb{N})$ из предыдущего раздела, возможно «вложенное» расслоение класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$, такое, что для каждого слоя имеется автомат с одним камнем, обходящий его. Там это расслоение было по размерам дыр, а сейчас по количеству дыр.

Теорема 4.2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует коллектив типа $(1,1)$, обходящий все конечные плоские (шахматные) мозаичные лабиринты, у которых не более k (целочисленных) дыр, при этом автомат имеет не более C^k состояний, где C — константа.*

В работе [64] было установлено, что существует коллектив типа $(1,1)$, который обходит все конечные плоские шахматные лабиринты (начиная обход с любой вершины любого такого лабиринта), имеющие не более двух $\mathbb{Z}$-дыр (иными словами, поскольку в это число обязательно входит единственная бесконечная дыра, то имеющие не более одной конечной $\mathbb{Z}$-дыры). В работе [65] показано то же самое, но в случае, когда у лабиринта не больше трех $\mathbb{Z}$-дыр. Затем в [43] была доказана первая часть теоремы 4.2 для случая конечных плоских шахматных лабиринтов, а позже в [27] была установлена оценка для числа состояний автомата и упрощено доказательство первой части теоремы. Приведем здесь схему доказательства этой теоремы из [27].

Исследование начинается с плоских R-графов с ограничением $d \geqslant 2$ на степень вершин (см. предыдущий раздел), у которых вращение в любой вершине соответствует вращению, которое, естественно, задается положительной ориентацией в плоскости. Обозначим этот класс плоских графов через $\mathfrak{G}^{+}_{R}(d)$. В лабиринтах этого класса рассматриваются R-автоматы, у которых кроме одного обязательного (служащего для его ориентации, поскольку у него нет возможности пользоваться «компасом») есть еще один реберный камень; чтобы как-то отличать их, первый камень назовем *связанным*, а второй —

свободным камнем или просто камнем. Обход лабиринтов из $\mathfrak{G}_R^+(d)$ такими автоматами понимается в немного измененном виде: автомат обходит лабиринт, если за некоторое конечное время все ребра лабиринта хотя бы один раз бывают маркированными его свободным камнем. Вершина лабиринта $L \in \mathfrak{G}_R^+(d)$ является вершиной *ранга* m, если она лежит на границе точно m различных граней лабиринта. Назовем *вилочной* вершину, у которой ранг больше или равен 3. Обозначим через $\mathfrak{G}_R^+(d,k)$ класс всех лабиринтов из $\mathfrak{G}_R^+(d)$, у которых не более k вилочных вершин. В [27] сначала показано, что для любого k существует универсальный обходчик данного выше типа для класса $\mathfrak{G}_R^+(3,k)$ с числом состояний, не превосходящим C^k (понятно, что в случае этого класса ранг всех вилочных вершин равен трем). При этом, если вообще есть вилочные вершины, то этот автомат обязательно останавливается. Потом это утверждение обобщается на случай любого $d \geqslant 3$.

Условие, которое накладывалось на количество вершин с рангом не менее 3, заменяется далее условием, требующим чтобы в R-графе класса $\mathfrak{G}_R^+(d)$ было не больше k граней. Но как легко заметить, в R-графе, удовлетворяющем этому условию, не больше $2k$ вершин с рангом не менее 3, то есть такие лабиринты являются элементами множества $\mathfrak{G}_R^+(d,2k)$. Но тогда и для них можно построить универсальный обходчик, у которого не более $(C_1)^k = C^{2k}$ состояний.

Наконец, если дан конечный плоский шахматный лабиринт (случай мозаичного лабиринта можно считать более легким), у которого не более k целочисленных дыр, то поступаем следующим образом. В качестве «опорного» алгоритма используем алгоритм обхода автомата, являющегося универсальным обходчиком для класса всех конечных шахматных лабиринтов без $\mathbb{Z}$-дыр, и таким образом избавимся от всех «мелких» дыр (если на лабиринт смотреть как на мозаичный). В полученном («виртуальном») мозаичном лабиринте остается именно k дыр (не целочисленных). Это значит, что автомат, который мы строим, считает, что каждый шахматный лабиринт указанного типа принадлежит классу $\mathfrak{G}_R^+(4,2k)$. «Опорный» алгоритм теперь легко сочетать с алгоритмом автомата, который решает предыдущий случай, используя вместо реберного камня один вершинный, поскольку в мозаичном случае автомат может ориентироваться в любой вершине по четырем основным направлениям (у него есть «компас»).

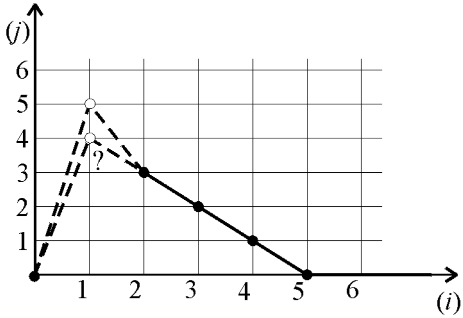


Рис. 9.

Возможности коллективов автоматов при обходе лабиринтов много шире, чем возможности независимых систем автоматов. Об этом свидетельствуют следующие утверждения, в которых речь идет о конечных и бесконечных плоских мозаичных лабиринтах.

Теорема 4.3. [40, 89] *Для класса* $\mathfrak{L}_{\text{м}}$ *и предиката* $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}}$ *имеют место отношения* $\{(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\} \subseteq \mathbf{U}(\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}})$, $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}}(1,3) = 0$ *и* $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}}(1,5) = 1$.

В работе [6] установлено, что $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}}(1,7) = 1$. Впоследствии доказательство этого факта из [6] уточнено в работе [25]. Дальнейшее развитие идей, данных в [6], удалось осуществить в работе [63], где с помощью алгоритма обхода конечных шахматных лабиринтов ([7]), показано, что $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}}(1,5) = 1$. Наконец, с помощью достаточно общей конструкции была доказана теорема 4.3 [40, 89]. Ее доказательство проводилось посредством конструирования соответствующей ловушки для коллективов автоматов типов $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$ и $(4,0)$. Затем строились примеры коллективов типов $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$ и $(5,0)$, которые обходят все плоские мозаичные лабиринты. Все возможные варианты для характеристического графика предиката $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}}$ приведены на рис. 9. Знаком ? отмечена точка (1,4), в которой вопрос о значении предиката $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}}$ открыт.

Так же, как и для независимых систем автоматов, интересно выяснить, какие достаточно широкие классы лабиринтов могут быть обойдены коллективами простых типов. Заметим, что если перейти к классу $\mathfrak{L}'_{\text{м}}$ всех плоских мозаичных лабиринтов, не содержащих бесконечных дыр, то остается справедливым утверждение, аналогичное теореме 4.3.

Теорема 4.4. [40, 89] *Для класса* $\mathfrak{L}'_{\text{м}}$ *и предиката* $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}'_{\text{м}}}$ *имеет место отношение* $\{(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\} \subseteq \mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}'_{\text{м}}}]$, $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}'_{\text{м}}}(1,3) = 0$ *и* $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}'_{\text{м}}}(1,5) = 1$.

Отсюда следует, что $\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}}]$, а также $\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}'_{\text{м}}}]$, равно или $\{(1,5),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$, или $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$. Существует гипотеза, что

$$\mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_{\text{м}}}] = \mathbf{U}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}'_{\text{м}}}] = \{(1,5),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}.$$

Остается открытым и вопрос о характеристическом графике предиката $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$ в случае, когда $\mathfrak{L}$ — класс всех плоских шахматных лабиринтов, имеющих конечное число конечных целочисленных дыр, как и во всех случаях подобных этому (вместо шахматных можно рассматривать мозаичные лабиринты, вместо конечных дыр бесконечные, и тому подобное).

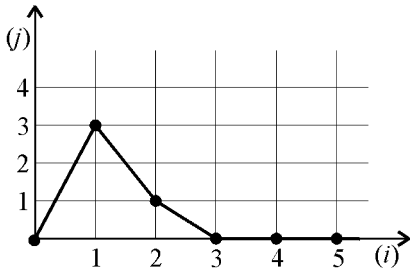


Рис. 10.

В случае, когда класс $\mathfrak{L}$ состоит только из лабиринта $\mathbb{Z}^2$, можно показать, что характеристический график предиката $\mathbf{P}_{\mathfrak{L}}$ имеет вид, указанный на рис. 10. Это следует из работы [72], где показано, что существуют коллективы типов $(1,3)$ и $(2,1)$, которые обходят плоскость $(\mathbb{Z}^2)$, но не существуют коллективы типов $(1,2)$ и $(2,0)$, которые делают то же самое.

Интересно отметить, что уже для плоского мозаичного древовидного лабиринта L с двумя бесконечными ветвями выполнено $P_L(1,1) = 0$ (см. ниже), а также, что для полуплоскости $\overline{\mathbb{Z}^2}$ выполнено $\mathbf{P}_{\overline{\mathbb{Z}^2}}(1,1) = 1$, но $\mathbf{P}_{\overline{\mathbb{Z}^2}}(1,0) = 0$ [64].

В качестве некоторых специальных классов мозаичных (шахматных) лабиринтов рассматривались и (целочисленные) одномерные ленты и полуленты. Здесь под *одномерной лентой* понимается подлабиринт целочисленной плоскости $\mathbb{Z}^2$, порождаемый точками $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$; под *полулентой* с началом в точке $n_0 \in \mathbb{Z}$ понимается подлабиринт лабиринта $\mathbb{Z}^2$, определенный или множеством $R_{n_0} = \{(n,0) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \geqslant n_0\}$ (*правая лента* с началом в n_0), или множеством $L_{n_0} = \{(n,0) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \leqslant n_0\}$ (*левая лента* с началом в n_0). В работе [72] показано, что автомат с одним камнем не может обойти ни одномерную ленту, ни все одномерные полуленты, тогда как конечный автомат с двумя камнями может это сделать. Если позволить размечать вершины лент (полулент) символами любого конечного алфавита, то получаются помеченные ленты (полуленты). В случае помеченных лент там же показано, что для любого коллектива типа (1,1) любая помеченная лента (любым способом размеченная лента) является его ловушкой.

Перейдем к рассмотрению лабиринтов более общего вида. Имеет место следующая

Теорема 4.5. *Не существует коллектив автоматов, обходящий все* 3*-мерные инициальные конечные мозаичные лабиринты.*

Доказательство этой теоремы проводится посредством построения ловушки для заданного коллектива автоматов. Это утверждение было впервые сформулировано и частично обосновано в [6]. Его доказательство дается в работе [30], где показано, что для любого конечного множества коллективов автоматов существует конечная 3-мерная мозаичная инициальная ловушка ограниченной «толщины» — все ее вершины лежат только в двух плоскостях.

Назовем бесконечный мозаичный n-мерный лабиринт L *мозаичной n-мерной универсальной ловушкой*, если любой коллектив автоматов в $\mathbb{R}^n$, стартуя из любого набора вершин лабиринта L, не обходит его. Показано ([87]), что так же, как и в случае независимых систем автоматов в плоскости, существует мозаичная n-мерная универсальная ловушка для любого $n \geqslant 3$ (ясно, что при этом достаточно было показать, что такая ловушка существует для $n = 3$).

Назовем мозаичную n-мерную универсальную ловушку *однородной*, если для любого коллектива $\mathcal{A} = <\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m>$ автоматов существует $r = r(\mathcal{A})$ такое, что при любых $v_1, \ldots, v_m \in V(L)$ имеет место $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_m}) \subseteq \mathrm{Bl}_n(v, r + \mathrm{diam}\{v_1, \ldots, v_m\})$ для некоторого $v \in \mathbb{Z}^n$.

Теорема 4.6. [87] *Существуют* 3*-мерные однородные ловушки.*

Из теоремы 4.3 следует, что для коллектива автоматов в классе всех плоских мозаичных лабиринтов в общем случае не существует ловушка. С другой стороны, в 3-мерном случае для любого коллектива автоматов можно найти ловушку даже среди всех конечных 3-мерных мозаичных лабиринтов (см. теорему 4.5). В связи с этим возникает вопрос: можно ли, не выходя за пределы некоторого класса планарных лабиринтов, строить ловушки (конечные или бесконечные) для произвольных коллективов автоматов? Ответ на последний вопрос является положительным. При этом оказывается, что можно ограничиться планарными графами (без петель и кратных ребер), размеченными по ребрам, то есть, имеющими в наличии систему направлений, причем эта система дана в виде раскраски ребер графов, а именно в виде раскраски дуг соответствующих симметрических орграфов, причем цвета (направления) дуг, принадлежащих одному тому же ребру, одинаковые. Оказывается, что для построения планарной ловушки такого типа для произвольного коллектива достаточно ограничиться тремя красками.

Сделаем некоторые замечания. Допустим, что краски, которыми раскрашиваем ребра планарных графов, упорядочены некоторым способом. Тогда любая реберная раскраска данного планарного графа задает определенную систему вращения этого графа, и это вращение необязательно является равным вращению, определенному некоторой его плоской укладкой («с помощью положительной ориентации на плоскости»). Также заметим, что если при раскраске ребер использовалось k красок, то есть, если данный граф является *k-цветным по ребрам*, то он является графом с ограничением k на степень вершин (инцидентные ребра должны быть окрашены в различные цвета). Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.7. [55] *Для любого коллектива автоматов существует планарная* 3*-цветная по ребрам ловушка.*

Аналогичный вопрос может быть поставлен по отношению к плоским графам, например, таким, которые принадлежат множеству $\mathfrak{G}_R^+(3)$. При этом ограничимся регулярными плоскими графами степени 3 (у которых все вершины степени 3); такие графы называются плоскими кубическими графами. Исследовалось поведение коллективов R-автоматов в таких графах. Автоматы не имели вершинных камней, но их, в принципе, можно снабдить ими, только при этом на эти камни уже нельзя смотреть как на самые простые R-автоматы (у R-автоматов есть реберные камни). Установлено, что коллектив R-автоматов типа $(4, 0)$ не может обойти все плоские кубические лабиринты [42]. Ранее в [7] это было установлено для случая $(3, 0)$. Вопрос о существовании коллектива R-автоматов, который обходит любой плоский кубический граф, остается открытым. Существует гипотеза, что такой коллектив просто не существует.

Как мы уже отмечали, в работе [27] было установлено, что для класса $\mathfrak{G}_R^+(d, k)$, а также для класса всех графов из $\mathfrak{G}_R^+(d)$, у которых не больше k граней, существует универсальный R-автомат с одним (дополнительным) реберным камнем, у которого не более, чем $e^{O(k)}$, состояний.

В работах [31, 32] исследуются возможности R-автоматов, имеющих (свободные) реберные или вершинные камни, при обходе лабиринтов класса $\mathfrak{G}_R(d)$. В [31] показано, что можно легко построить R-автомат с $O(n)$ реберных камней, который обходит любой n-вершинный лабиринт класса $\mathfrak{G}_R(d)$ за время $O(n)$ и останавливается после обхода. В работе [32] показано, что существует R-автомат с $O(n)$ вершинных камней, который обходит любой n-вершинный лабиринт класса $\mathfrak{G}_R(d)$ за время $O(n^2)$.

Одним из примеров классов специальных лабиринтов является класс лабиринтов, условно называемых *сигнатурными.* Сигнатурный лабиринт представляет собой плоский мозаичный лабиринт, содержащий начало координат — точку $(0, 0)$. Каждой вершине этого лабиринта приписан набор знаков координат этой вершины, то есть каждой точке $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ приписана отметка вида $(\operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn} y)$ (в таком случае считаем, что точке $(0, 0)$ приписана отметка $(0, 0)$). В работе [108] рассмотрена задача поиска коллективом автоматов точки $(0, 0)$ в сигнатурном лабиринте; при этом для автоматов этого коллектива функции переходов и выходов уточняются с учетом указанных отметок вершин. На множестве пар $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ вводим предикат $\mathbf{P}$, характеризующий наличие или отсутствие коллектива автоматов типа (i, j), находящего начало координат в любом сигнатурном лабиринте (в [108] такие коллективы называются множеством автоматов, обладающих *универсальной проходимостью*). Этот предикат, очевидно, является монотонным. Как и в случае предиката обхода, можно рассматривать множество его нижних единиц и определить соответствующий характеристический график. Предикат $\mathbf{P}$ слабо исследован и пока имеются только некоторые фрагментарные данные о его значениях ([108]).

Теорема 4.8. *Для предиката* $\mathbf{P}$ *имеют место равенства* $\mathbf{P}(1, 0) = 0$ *и* $\mathbf{P}(4, 0) = 1$.

Задача, сходная исследуемой в [108], рассматривалась и в работах [4] и [119]. В самом деле, описанная в работе [108] ситуация является теоретическим обобщением методов и принципов, изложенных в [4]. Целью всех этих работ было показать, что существует класс задач, которые не могут быть решены одним автоматом, а могут быть решены коллективом автоматов. Работа [108] является усилением работы [4], поскольку в ней рассматривается в принципе вся плоскость, а не конечный ее кусок, и автоматы не нуждаются в «дистанционной связи». Это стало возможным благодаря применению теоретических рассуждений вместо машинного счета, как это делалось в [4].

Особым направлением исследований является выявление возможности анализа лабиринтов с помощью различных обобщений автоматов, таких, как автоматы со счетчиками, магазинами, стеками, многоголовочные и др.

В работе [17] установлено, что не существует автомат с магазином, который обходит все конечные кубические плоские графы, в то время как линейно ограниченная машина Тьюринга эту задачу решает. Там же отмечается, что существует автомат с магазином, который может обойти все плоские конечные мозаичные лабиринты.

В [15] показано, что если допустить существование одного магазина у автомата, то можно легко построить автомат, который обходит за время $O(n)$ (n — число вершин) любое конечное R-дерево L с ограничением $d \geqslant 2$ на степень вершин и останавливается после обхода (отмечается, что один автомат и один камень также легко решают эту задачу). Прямым следствием этого факта является возможность построения такого автомата для конечных плоских мозаичных древовидных лабиринтов, а тем самым и для конечных плоских односвязных шахматных лабиринтов. Эти результаты, по существу, являются положительным решением проблемы остановки для приведенных классов лабиринтов. Заметим, что эта проблема для тех же классов в случае автомата без магазина имеет отрицательное решение ([15]).

Проблема остановки для класса всех конечных R-деревьев с ограничением $d \geqslant 3$ остается нерешенной в случае автомата с одним счетчиком. Единственное, что удалось показать в [15] в связи с этим случаем, это то, что если сузить этот класс до класса всех центрированных R-деревьев с ограничением d на степень вершин ($d \geqslant 2$), то «останавливающийся» автомат такого типа уже существует (дерево является центрированным, если существует вершина, которая находится на одинаковом расстоянии от всех его концевых вершин).

В работе [29] введен такой тип конечной трехмерной мозаичной ловушки, которая может быть построена для каждого коллектива автоматов, однако существует двухголовочный автомат, для которого нельзя построить ловушку такого типа. Ловушки, которые строились, были инициальными ловушками для всех коллективов из k автоматов, у которых не больше l состояний, где k и l — любые заранее фиксированные натуральные числа. Здесь, под многоголовочным (k-головочным) автоматом понимается коллектив (содержащий k) автоматов с «радиосвязью» следующего вида: каждый автомат знает состояние любого другого автомата этого коллектива на любом шаге его работы. Это показывает, что при анализе лабиринтов возможности многоголовочных автоматов превышают возможности коллективов автоматов. Остается открытым вопрос: существуют ли соответствующие универсальные обходчики типа многоголовочного автомата для всех трехмерных (конечных) мозаичных лабиринтов и для всех плоских кубических графов?

В работе [72] показано, что автомат с одним магазином не обходит ни одномерную ленту, ни все одномерные полуленты, тогда как (конечный) автомат с одним камнем и одним счетчиком, автомат с двумя счетчиками или автомат с одним стеком могут обойти ленту. Выше было отмечено, что в случае помеченных лент для любого коллектива типа (1,1) любая помеченная лента является его ловушкой. В противоположность этому, для автомата с одним счетчиком ленту всегда можно разметить так, что он уже обходит ее. При этом оказывается, что для подходящей разметки хватает двух символов — 0 и 1. В работе [72] также показано, что существует:

а) автомат с одним стеком или с двумя счетчиками,
б) коллектив, состоящий из одного автомата со счетчиком и двух камней,
в) коллектив, состоящий из одного конечного автомата и одного автомата со счетчиком,

которые обходят плоскость, и что не существует коллектив, состоящий из автомата с одним магазином и одного камня, который обходит плоскость.

Хотя вышеизложенные результаты, относящиеся к проблеме обхода лабиринтов, касались только детерминированных коллективов автоматов, эту проблему можно было бы также исследовать и применительно к недетерминированным и даже вероятностным системам автоматов. Проблема обхода одного класса лабиринтов вероятностными автоматами рассмотрена в работе [72]. Она решалась в контексте подтверждения факта преимущества вероятностных автоматов перед детерминированными при обходе лабиринтов. Вероятностные автоматы, рассматриваемые в [72], отличаются от «обыкновенных» конечных автоматов только тем, что они дополнительно снабжены еще и дискретными датчиками случайных чисел, которые по их запросу с вероятностью $1/2$ выдают или число 0, или число 1, и это число также является частью локальной информации, на основании которой автомат принимает решения, касающиеся своей дальнейшей работы. Иными словами, у этих автоматов есть добавочный вход, и на этом входе, на любом шагу их работы, стоит с вероятностью $1/2$ или число 0, или число 1. Обход лабиринта автоматами такого типа понимался в следующем смысле: вероятностный автомат обходит некоторый лабиринт, если с вероятностью 1 рано или поздно (а поэтому и бесконечное число раз) окажется в любой его вершине. Обход лабиринтов этими автоматами изучался по отношению к лабиринтам, которые представляли собою всевозможные размеченные по дугам симметрические орграфы, соответствующий граф которых является бесконечным плоским регулярным деревом степени 3. Одна точка таких лабиринтов выделена и обозначается через O. Система направлений состоит из трех символов: 0, 1 и 2. Единственным ограничением на разметку является условие, что в любой вершине та дуга, по которой из этой вершины идет единственный простой путь в вершину O, всегда отмечена символом 0 (напомним, что под простым путем понимаем путь или ориентированный маршрут, у которого все вершины различны). В работе [72] показано, что не существует коллектив типа (1,1), который обходит хотя бы один лабиринт данного типа, но, с другой стороны, существует конечный вероятностный автомат выше данного типа, который с вероятностью 1 побывает в каждой вершине любого графа данного вида.

В этой же работе также отмечено, что вероятностным автоматом можно смоделировать симметричное случайное блуждание точки в $\mathbb{Z}^2$, то есть на блуждающую точку можно смотреть как на вероятностный автомат простейшего типа (в случае вероятностных автоматов выше данного типа для соответствующего моделирования достаточно двух состояний). Поскольку при симметричном случайном блуждании на плоскости точка с вероятностью 1 попадает в любую вершину лабиринта $\mathbb{Z}^2$ (см., например, [117]), а любая система из двух автоматов, как и любая система из одного автомата и двух камней, не обходит плоскость, то вероятностные автоматы оказываются в каком-то смысле сильнее коллективов автоматов типа (1,2) и (2,0).

Отметим, что таким же способом можно показать, что вероятностные автоматы сильнее коллективов автоматов типа (1,3), (2,2), (3,1) и (4,0), поскольку они обходят любой плоский мозаичный лабиринт (с вероятностью 1 попадают в любое его поле), а ни один коллектив указанного типа не является универсальным обходчиком для класса $\mathfrak{L}_{\text{м}}$ (см. теорему 4.3).

Интересно также отметить, что при симметрическом случайном блуждании в $\mathbb{Z}^3$ («по шести направлениям») точка уже только с вероятностью ≈ 0.35 попадает в любую его целочисленную вершину (см. также [117]) и что до сих пор актуальна проблема нахождения алгоритма перемещения точки в пространстве, при котором она попадает с вероятностью 1 в любое поле пространства $\mathbb{Z}^3$. На тот же самый факт указывается и в [72], но при этом упоминается случай симметрического случайного блуждания точки в $\mathbb{Z}^3$ «по восьми направлениям», что, по нашему мнению, в меньшей мере соответствует проблеме обхода мозаичных лабиринтов (хотя легче моделируется с помощью вышеуказанных случайных автоматов), и приводится, что соответствующая вероятность равна примерно 0.237 (более точной оценкой этой вероятности является число ≈ 0.239). Ясно, что если бы удалось найти вероятностный автомат, который обходит трехмерное пространство, то эта задача имела бы положительный ответ. Даже в случае, если такой автомат не существует, интересно было бы найти хотя бы коллектив вероятностных автоматов, минимальный по числу автоматов, который уже решает эту проблему. Отметим, что существует коллектив детерминированных конечных автоматов, например, типа $(2, 3)$, который обходит $\mathbb{Z}^3$.

С проблемой обхода тесно связана и так называемая *проблема встречи*.

Пусть $\mathfrak{L}$ — класс лабиринтов и $\mathfrak{C}$ — некоторый класс коллективов автоматов, допустимых для $\mathfrak{L}$. Введем двухместный предикат $\mathbf{M}$ на множестве $\mathfrak{C}$ следующим способом: для любых $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{C}$ положим, что $\mathbf{M}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1$, если коллективы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, помещенные в любые вершины любого лабиринта из $\mathfrak{L}$, встречаются, и $\mathbf{M}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0$, в противном случае; назовем предикат $\mathbf{M}$ *предикатом встречи* для класса $\mathfrak{C}$. В связи с предыдущим определением немедленно сделаем следующие разъяснения. Первое: все автоматы рассматриваемых коллективов автоматов, здесь и в последующем, будем помещать в одну и ту же вершину (произвольную, но для всех одинаковую) данного лабиринта, то есть имеется в виду случай синхронизированных коллективов автоматов. Второе: два коллектива, в самом общем смысле, встречаются, если в каком-то моменте в некоторой вершине лабиринта окажутся представители обоих коллективов. Задача нахождения значения $\mathbf{M}$ по всем парам коллективов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ из $\mathfrak{C}$ называется *задачей о встрече* (*для* $\mathfrak{C}$ *в* $\mathfrak{L}$). Изучение этого предиката ведется при разных допущениях. Приведем некоторые из них.

Пусть задан класс лабиринтов $\mathfrak{L}$ и два типа коллективов автоматов (i_1, j_1) и (i_2, j_2). *Задача о типовой встрече* для них состоит в выяснении следующего: существуют ли коллективы автоматов указанных типов, которые при помещении каждого из них в произвольные стартовые вершины любого лабиринта указанного класса через некоторое время окажутся в ситуации, когда в некоторой вершине будут находиться представители каждого из коллективов, которые не являются камнями; эту задачу мы назовем $(i_1, j_1; i_2, j_2)$-*задачей о типовой встрече* в $\mathfrak{L}$, а при $i_1 = i_2$ и $j_1 = j_2$ — (i_1, j_1)-*задачей о типовой встрече* в $\mathfrak{L}$ (при решении этих задач класс коллективов состоит из всех коллективов автоматов допустимых для $\mathfrak{L}$). В случае, когда речь идет о (i, j)-задаче и при этом требуется, чтобы коллективы, которые должны встречаться при любом стартовом положении в любом лабиринте из $\mathfrak{L}$, совпадали (были двумя копиями одной и той же системы), мы говорим о *сильной* (i, j)-*задаче о типовой встрече* в $\mathfrak{L}$. При этом само собою разумеется, что в случае сильной (i, j)-задачи о типовой встрече, если автоматы первого коллектива встречают камни второго коллектива, то они их не отличают от своих. Правда, к программе коллектива, который служит оригиналом для обеих копий, должны быть добавлены указания о том, что делать, если в одной вершине окажется больше камней, чем положено (больше, чем их у этого коллектива имеется).

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов. Определим на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ предикат $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$ следующим способом: $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(i_1, j_1, i_2, j_2) = 1$, если имеется положительное решение соответствующей $(i_1, j_1; i_2, j_2)$-задачи о типовой встрече, и $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(i_1, j_1, i_2, j_2) = 0$ в противном случае. Для (i, j)-задачи и сильной (i, j)-задачи о типовой встрече в $\mathfrak{L}$ аналогичным образом определим, соответственно, предикаты $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$ на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$. Определим порядок $\leqslant$ на множестве $\cup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}_0^k$ следующим способом: имеет место $(a_1, \ldots, a_m) \leqslant (b_1, \ldots, b_n)$ тогда и только тогда, когда $m = n$ и $a_i \leqslant b_i$

для любого $1 \leqslant i \leqslant m$. Обозначим для любого $X \subseteq \cup_{k=1}^{\infty}\mathbb{N}_0^k$ через тот же самый символ $\leqslant$ порядок, индуцированный в X выше данным порядком. Ясно, что предикаты $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$ являются монотонными по отношению к порядку $\leqslant$, и поэтому их описание сводится к указанию нижних единиц, множество которых обозначаем, соответственно, через $\mathbf{U}[\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}]$, $\mathbf{U}[\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}]$ и $\mathbf{U}[\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}]$; эти множества определяют соответствующие предикаты так, что во всех точках, которые больше или равны некоторой нижней единице, значение предиката равно 1, а во всех остальных точках его значение равно 0. Для введенных предикатов очевидными, следующими прямо из определения, являются и следующие тождества и неравенства:

$$\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(x,y,x_1,y_1) = \mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(x_1,y_1,x,y), \quad \mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}(x,y) = \mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(x,y,x,y)$$
$$\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}(x,y) \leqslant \mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}(x,y) \leqslant \mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(x_2,y_2,x_3,y_3),$$

имеющие место для любых $x, x_1 \in \mathbb{N}$ и $y, y_1 \in \mathbb{N}_0$, и любых $x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ и $y_2, y_3 \in \mathbb{N}_0$, таких, что $(x,y) \leqslant (x_2,y_2)$ и $(x,y) \leqslant (x_3,y_3)$.

В некоторых случаях класса $\mathfrak{L}$ предикаты $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$ легко поддаются описанию. Например, в случае, когда $\mathfrak{L}$ является классом всех трехмерных конечных мозаичных лабиринтов, $\mathbf{U}[\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}] = \mathbf{U}[\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}] = \mathbf{U}[\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}] = \varnothing$, то есть $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}} = \mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}} = \mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}} = 0$ (этот результат следует из более тщательного подбора ловушки из теоремы 4.5). Такой же ответ получается и в случае, когда множество $\mathfrak{L}$ содержит только одну 3-мерную однородную ловушку.

Сделаем несколько замечаний относительно класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$ и соответствующих ему предикатов встречи. Чтобы вычислить предикаты $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}$ и $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}$, возьмем в качестве коллектива автоматов второго типа коллектив, у которого все автоматы все время остаются «поблизости» от вершины, в которую они помещены (можем предположить, например, что в любой момент времени все камни этого коллектива лежат в этой вершине, и что один из его автоматов, который не является камнем, обязательно «время от времени» посещает указанную вершину). В качестве коллектива первого типа берем произвольный коллектив, обходящий все лабиринты класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$. К его алгоритму обхода для $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$ добавим «указание», что в случае встречи с каким-то из автоматов второго коллектива (который может быть и камнем), автомат первого коллектива, который осуществил эту встречу, должен остановиться. Ясно, что в этом случае встреча коллективов произойдет. Получаем, следовательно, что

$$\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,2,1,0) = \mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,0,1,2) = \mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(2,0,1,0) = \\ = \mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,0,2,0) = \mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(2,0) = 1.$$

Поскольку существуют коллективы как типа (2,0), так и типа (1,2), обходящие любой лабиринт класса $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$ и останавливающиеся в особенной точке его бесконечной дыры, то также имеют место и равенства

$$\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(2,0) = \mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,2) = 1.$$

Поскольку для любого автомата, то есть для любого коллектива типа (1,0), существует правильная ловушка в $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$, то легко удостовериться, что

$$\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,0,1,0) = \mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,0) = \mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}}(1,0) = 0.$$

Говорим, что n-мерный лабиринт L является циклическим, если он конечен и степень всех вершин графа $\overline{G(L)}$ равна двум. Обозначим через $\mathfrak{L}_{\text{мц}}$ класс всех циклических плоских мозаичных лабиринтов. В работе [72] установлено, что $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\text{мц}}}(1,1) = 1$. Там же показано, что если в качестве класса $\mathfrak{L}$ берем класс всех деревьев из $\mathfrak{G}^+_R(d)$ ($d \geqslant 3$), то также имеет место утверждение $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}(1,1) = 1$; отметим, что здесь имеются в виду коллективы R-автоматов, состоящие из одного автомата и одного вершинного камня. Считаем, что этот результат требует проверки.

Кроме того, в [72] рассматриваются случаи, когда $\mathfrak{L}$ состоит либо только из одномерной ленты, либо только из лабиринта $\mathbb{Z}^2$. В первом случае показано, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(1,0,1,1) = 1$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}(1,0) = 0$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}(1,1) = 1$; во втором случае показано, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(1,0,1,2) = \mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(1,2,1,0) = 0$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}(1,2) = 1$, $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}(1,2) = 0$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}(1,3) = 1$. Равенство $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}(1,2) = 1$ впервые доказано в [53]; в [72] дан более простой алгоритм для доказательства этого факта, который также обеспечивает встречу за меньшее время, чем алгоритм, приведенный в [53]. Отметим, что проблема вычисления $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}(1,2)$ в случае, когда $\mathfrak{L} = \{\mathbb{Z}^2\}$, впервые поставлена М. С. Патерсоном в [22].

В контексте задачи о встрече, когда $\mathfrak{L}$ состоит либо только из одномерной ленты, либо только из лабиринта $\mathbb{Z}^2$, наряду с коллективами автоматов в [72] рассматривались и некоторые другие системы автоматов и их обобщений; автоматам было разрешено иметь счетчики и даже возможность оставлять метки в вершинах. Предикаты встречи, которые по смыслу отвечают выше введенным, будем обозначать здесь теми же символами. Прежде всего ясно, что две одинаковые копии автоматов с произвольным количеством счетчиков никогда не встретятся ни на одномерной ленте, ни в лабиринте $\mathbb{Z}^2$. В случае, когда $\mathfrak{L}$ состоит либо только из одномерной ленты, либо только из лабиринта $\mathbb{Z}^2$, имеются следующие результаты ([72]):

1) для автомата с одним счетчиком значение предиката $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ равно нулю;
2) для коллектива из двух автоматов, у одного из которых два счетчика, значение предиката $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$ равно единице.

Если позволить автоматам делать отметки в вершинах лабиринтов (при этом, конечно, предполагаем, что автоматы-камни этого не могут делать), то в случае, когда $\mathfrak{L} = \mathbb{Z}^2$, установлено, что $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}(1,2) = 0$ [72].

В некоторых из вышеприведенных случаев в [72] устанавливаются оценки, верхние или нижние, минимального времени, в течении которого должна обязательно произойти встреча хотя бы одной пары коллективов, для которых значение соответствующего предиката равно единице. Эти оценки выражаются через расстояние клеток, в которые коллективы помещаются в начальный момент.

Задача о встрече позволяет вариации за счет различных допущений относительно «узнаваемости» автоматами друг друга, «своих» и «чужих» камней и т. п., Так, в [53] для задачи о встрече на плоскости в случаях, когда автоматы распознают свои и чужие камни или же не обладают этим свойством, установлено, что $\mathbf{M}^1_{\mathbb{Z}^2}(1,2) = 1$ (см. также предыдущий абзац). Соответствующие коллективы типа (1,1), построенные в [53], которые всегда встречаются на целочисленной плоскости, могут даже начинать работу в разные моменты времени.

Содержательной задачей является задача о взаимодействии в лабиринтах двух автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, имитирующих поведение типа «хищник — жертва». В работах [76, 77] автоматы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ взаимодействуют в конечных плоских шахматных лабиринтах, имеющих вид квадрата, и их задачами являются: для хищника $\mathfrak{A}_1$ «догнать» жертву, а для жертвы $\mathfrak{A}_2$ «убежать» от хищника. В основной постановке данной задачи считается, что $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ делают ходы поочередно и что $\mathfrak{A}_1$ догнал $\mathfrak{A}_2$, если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ оказались в какой-то момент на соседних полях. Установлено, что при любых $l, n \in \mathbb{N}$ существует $\mathfrak{A}_1$ с числом состояний $O(nl^2)$, который догоняет за время $O(nl^4)$ любой $\mathfrak{A}_2$ с числом состояний не более, чем n, в квадрате со стороной не более, чем l, при любом стартовом положении автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ [76, 77]. Там же установлено, что не существует автомат $\mathfrak{A}_1$, догоняющий любой $\mathfrak{A}_2$ в произвольном квадрате с фиксированной длиной стороны l, $l \geqslant 8$. Первый результат обобщается на случай различных «обзоров» и «скоростей» $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Установлена алгоритмическая разрешимость свойства хищника догонять любую жертву по указанным параметрам.

5. Распознавание свойств лабиринтов с помощью автоматов

Приведем результаты, связанные с задачей анализа для коллективов автоматов.

Пусть $\mathbf{P}(x)$ — некоторый предикат на множестве лабиринтов $\mathfrak{L}$, и пусть $\mathcal{A}$ — некоторая «лабиринтная машина» (автомат, коллектив автоматов, автомат со счетчиком и тому подобное), допустимая для лабиринтов множества $\mathfrak{L}$. Некоторое множество состояний Q_0 машины $\mathcal{A}$ выделено, и его элементы называются *заключительными состояниями*. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ *вычисляет* $\mathbf{P}$, если при его запуске в любой лабиринт $L \in \mathfrak{L}$ происходит переход машины $\mathcal{A}$ в некоторое из своих заключительных состояний (в этом случае также говорим, что $\mathcal{A}$ *принимает* L) только тогда, когда $\mathbf{P}(L) = 1$. Если множество заключительных состояний Q_0 можно представить как дизъюнктное объединение двух множеств Q_1 и Q_2, и при этом машина $\mathcal{A}$ переходит в состояние из Q_1, когда $\mathbf{P}(L) = 0$, а — в состояние из Q_2, когда $\mathbf{P}(L) = 1$, то говорим, что $\mathcal{A}$ *сильно вычисляет* $\mathbf{P}$. Задачу «вычисляет (сильно вычисляет) или нет машина $\mathcal{A}$ предикат $\mathbf{P}$» называем *задачей анализа.*

Сделаем здесь несколько замечаний. Выше предполагалось, что машина $\mathcal{A}$ является детерминированной. Если она недетерминирована, то для того, чтобы принять некоторый лабиринт, она должна перейти в некоторое из заключительных состояний хотя бы при одном из возможных вычислений. Для случая, когда в качестве лабиринтной машины выступает коллектив автоматов (без печати), введем следующее определение. Будем говорить, что некоторый предикат является (*сильно*) (i, j)-*вычислимым*, если существует коллектив типа (i, j), который (сильно) вычисляет этот предикат. Также ясно, что в случае вычислимости предиката $\mathbf{P}$ коллективом из k автоматов без печати, факт принятия некоторого n-вершинного лабиринта происходит обязательно за время не больше, чем $(nm)^k$, где m — максимум по числу состояний всех автоматов рассматриваемого коллектива.

Возможным путем описания предикатов, вычислимых с помощью коллективов автоматов, является построение соответствующей алгебры над вычислимыми предикатами, сохраняющей свойство вычислимости. Пример такой алгебры для множества всех регулярных событий принадлежит Клини [94]. Она содержит три операции: объединение, конкатенацию и итерацию множеств слов. В работе [36] устанавливается, что операции конкатенации и итерации для лабиринтов, вообще говоря, нарушают вычислимость. Точнее, пусть Ω — некоторое конечное множество символов. Обозначим через $\Omega^{(2)}$ множество всех конечных плоских шахматных лабиринтов прямоугольного вида, вершины которых отмечены символами из Ω. В работе [36] приводятся примеры подмножеств из $\{0,1\}^{(2)}$, для которых соответствующие предикаты вычислимы некоторыми автоматами, а конкатенация (склеивание по строкам лабиринтов из $\{0,1\}^{(2)}$, имеющих одну и ту же высоту) и итерация этих подмножеств лабиринтов не всегда образуют подмножество из $\{0,1\}^{(2)}$, для которого соответствующий предикат является вычислимым каким-то автоматом.

На автоматы, допустимые для класса $\Omega^{(2)}$, можно смотреть как на естественное обобщение одномерных двухсторонних автоматов на двухмерный случай (они вводятся впервые в [5]). Тогда естественным обобщением на двухмерный случай одномерных односторонних автоматов будут допустимые для $\Omega^{(2)}$ так называемые трехсторонние автоматы, то есть автоматы, не умеющие двигаться вверх, а только налево, направо и вниз (такие автоматы впервые рассматриваются в [56, 57]). Известно, что в одномерном случае односторонние автоматы не являются менее сильными (в смысле вычислимости) по отношению к двухсторонним ([36]). Интересно, что в двухмерном случае трехсторонние автоматы оказываются менее сильными, чем (четырехсторонние) автоматы ([56, 57]). Обозначим классы детерминированных и недетерминированных трехсторонних автоматов, соответственно, через $C[\text{2TR-DA}]$ и $C[\text{2TR-NA}]$. В случае, когда Ω однобуквенный алфавит, вместо $C[\text{2TR-DA}]$ ($C[\text{2TR-NA}]$) пишем $C[\text{2TR-DA}(0)]$ ($C[\text{2TR-NA}(0)]$). Инициальный трехсторонний (недетерминированный) детерминированный автомат принимает некоторый лабиринт L из $\Omega^{(2)}$, если, начиная с левого верхнего угла лабиринта L, доходит до некоторого поля самой нижней строки, оказываясь при этом в некотором из своих заключительных состояний. Для любого автомата $\mathfrak{A}$ из одного из введенных классов через $\mathbf{P}(\mathfrak{A})$ обозначим предикат, который вычисляет $\mathfrak{A}$ на множестве $\Omega^{(2)}$, а через $\mathbf{R}(\mathfrak{A})$ — область истинностности этого предиката. Для любых трехсторонних автоматов $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, и $\mathfrak{A}_3$ одного из введенных классов нас интересует вопрос, выполнены ли соотношения $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_1) \subseteq \mathbf{R}(\mathfrak{A}_2)$, $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_1) \cap \mathbf{R}(\mathfrak{A}_2) = \varnothing$ и $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_1) = \mathbf{R}(\mathfrak{A}_2)$, а также $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_3) = \Omega^{(2)}$ и $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_3) = \varnothing$; соответствующие проблемы называем проблемами $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \varnothing$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$, $\mathbf{R} = \Omega^{(2)}$ и $\mathbf{R} = \varnothing$.

В работе [41] показывается, что для класса $C[\text{2TR-DA}(0)]$ задачи $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \varnothing$ и $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$ алгоритмически разрешимы. По существу, здесь основным фактом является разрешимость проблемы $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \varnothing$. Разрешимость проблемы $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$ следует из упомянутого факта и из факта, доказанного в [38], что для любого $\mathfrak{A} \in C[\text{2TR-DA}(0)]$ эффективным способом можно построить автомат $\overline{\mathfrak{A}} \in C[\text{2TR-DA}(0)]$ такой, что $\mathbf{R}(\overline{\mathfrak{A}}) = \Omega^{(2)} \backslash \mathbf{R}(\mathfrak{A})$ (условно назовем это свойство класса $C[\text{2TR-DA}(0)]$ свойством его замкнутости по отношению к операции взятия комплемента). Разрешимость проблемы $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ для класса $C[\text{2TR-DA}(0)]$ очевидным способом следует из разрешимости проблемы $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$ для того же класса. В работе [41] также показано, что для класса C[2TR-DA] задачи $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \varnothing$ и $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$ неразрешимы (на самом деле неразрешимость первой задачи прямо влечет неразрешимость второй). Там же доказывается, что существуют такие предикаты на множестве $\Omega^{(2)}$, которые вычисляются недетерминированными трехсторонними автоматами и не вычисляются детерминированными трехсторонними автоматами, то есть показано, что недетерминированный вариант этих автоматов сильнее детерминированного. Ранее показано ([38]), что для классов C[2TR-DA(0)] и C[2TR-NA(0)] задача $\mathbf{R} = \varnothing$ алгоритмически разрешима. Там же показано, что задача $\mathbf{R} = \Omega^{(2)}$ также алгоритмически разрешима для класса C[2TR-DA(0)] (это утверждение является, на самом деле, прямым следствием только что упомянутого утверждения для класса C[2TR-DA(0)] и факта замкнутости этого класса по отношению к операции взятия комплемента). Интересно сравнить последние результаты с фактом алгоритмической неразрешимости соответствующих задач для класса детерминированных четырехсторонних автоматов ([66]). В [38] также показано, что для класса C[2TR-NA] задачи $\mathbf{R} = \Omega^{(2)}$, $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ алгоритмически не разрешимы.

Обозначим для любого $L \in \Omega^{(2)}$ через $l_1(L)$ число его строк, а через $l_2(L)$ — число его столбцов. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — произвольная (натуральная) функция. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый недетерминированный автомат, допустимый для класса $\{0\}^{(2)}$. Предположим, что смысл обозначений $\mathbf{P}(\mathfrak{A})$ и $\mathbf{R}(\mathfrak{A})$ остается прежним. Говорим, что автомат $\mathfrak{A}$ вычисляет функцию f, если

$$\mathbf{R}(\mathfrak{A}) = \{L \in \{0\}^{(2)} \,|\, l_1(L) = f(n) \text{ и } l_2(L) = n \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}.$$

Функция f является невычислимой (недетерминированным) автоматом, если нет такого автомата, который ее вычисляет.

В работе [37] показывается, что функции $f_1(n) = n^2$, $f_2(n) = k^n$ и $f_3(n) = n!$ невычислимы автоматом. Другими словами, предикаты $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$ на множестве $\{0\}^{(2)}$, области истинностности которых суть множества всех лабиринтов из $\{0\}^{(2)}$ размеров $n^2 \times n$, $k^n \times n$ и $n! \times n$, соответственно, не являются вычислимыми недетерминированными автоматами. До сих пор неизвестным остается даже некоторое достаточно полезное необходимое условие, которому должны удовлетворять вычислимые натуральные функции. Отметим, что работа [37] является, в некотором смысле, продолжением работы [54].

В работе [52] изучается вопрос о том, какие классы размеченных лабиринтов с выделенной границей распознаваемы недетерминированными автоматами в том смысле, что автомат находит в них выход, переходя в заключительное состояние. Введено специальное кодирование таких лабиринтов, для которого показано, что в возникающем формальном языке описания лабиринтов распознаваемы только те лабиринты, которые кодируются регулярными языками. Остановимся более подробно на этом результате.

Берется конечное множество различных символов $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Для каждого s_i $(i = 1, \ldots, m)$ вводится новый символ s_i^{-1} (*обратный элемент* для s_i). Множество $S = \{s_1, \ldots, s_m, s_1^{-1}, \ldots, s_m^{-1}\}$ называется множеством *образующих*. Имеется и некоторое конечное множество R слов в алфавите S; эти слова можно назвать (согласно языку теории свободных групп) *отношениями*. Множеству R обязательно принадлежат пустое слово Λ и все слова вида $s_i s_i^{-1}$, $s_i^{-1} s_i$ и $s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}$. На множестве S^* определяется отношение эквивалентности $\sim$ следующим способом: слова $w_1, w_2 \in S^*$ называются *R-эквивалентными*, $w_1 \sim w_2$, если существует последовательность слов $u_1, u_2, \ldots, u_n \in S^*$, такая, что $w_1 = u_1$, $w_2 = u_n$ и для любого $1 \leqslant i \leqslant n-1$ слово u_{i+1} получается из слова u_i таким способом, что или вставляется в u_i некоторое слово из R, или в нем зачеркивается некоторое подслово (заменяется пустым словом), которое равно некоторому слову из R. На фактор-множестве $S^*/\sim$ введем операцию $\cdot$ следующим способом: $[u] \cdot [v] = [uv]$ (здесь $[x]$ — класс эквивалентности элемента x в S^* по отношению к $\sim$). Легко удостовериться, что пара $(S^*/\sim, \cdot)$ является абелевой группой (*абелевой конечно представимой группой* — АКП-*группой*); обозначим ее через $(S; R)$. Группа такого рода может описывать структуру вида «регулярной» («однородной») решетки (примером такой решетки является целочисленное n-мерное пространство) следующим способом. Вершинам этой решетки (она понимается как граф) соответствуют элементы этой группы, а всевозможным основным «направлениям» (по которым переходим из некоторой точки в ее соседние вершины) — элементы из S. Тогда основным циклам отвечают слова из R. Например, пространство $\mathbb{Z}^2$ описывается группой

$$G_2 = (s_1, s_2; s_1 s_1^{-1}, s_1^{-1} s_1, s_2 s_2^{-1}, s_2^{-1} s_2, s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1})$$

(s_1 и s_2 интерпретируем как направления $\mathbf{e}$ и $\mathbf{n}$, соответственно, а элементы этой группы как целочисленные точки из $\mathbb{Z}^2$). Группа G_2 полностью алгебраически описывает топологическую природу двухмерной целочисленной решетки. Таким способом можно, по утверждению автора, получить все пространства, которые представляют интерес для теории распознавания образов.

Пусть дана некоторая АКП-группа G (тем самым, дана соответствующая ей решетка), и пусть V — некоторое конечное множество. Пару вида (G, V) назовем *дискретным пространством.* Под *образом* дискретного пространства (G, V) понимается любой конечный связный подграф дискретного пространства, у которого вершины отмечены элементами множества V; обозначим через $\Pi(G, V)$ — множество всех образов дискретного пространства (G, V). Считаем, что этот образ вложен в полное дискретное пространство, причем любая клетка, не принадлежащая образу, маркирована буквой $\beta \notin V$, если она не является соседней ни одной клетке образа, и маркирована буквой $B \notin V$, если она является соседней хотя бы одной клетке образа (лежит на границе образа). Следовательно, образ — это размеченный лабиринт с отмеченной границей. Также фиксированы две точки образа, взятого вместе с границей, которые объявляются *начальной* и *конечной.* Далее, дан некоторый конечный алфавит Σ, которым кодируются элементы множества $\mathfrak{P} = (V \cup \{B\}) \times (S \cup \{\Lambda\})$ (множества Σ и $\mathfrak{P}$ равномощные). Конечные последовательности элементов множества $\mathfrak{P}$ назовем *помеченными путями.* Говорим, что помеченный путь $(b_1, \omega_1), (b_2, \omega_2), \ldots, (b_m, \omega_m)$ с началом в точке v данного дискретного пространства *посещает* точки $v, v\omega_1, v\omega_1\omega_2, \ldots, v\omega_1\omega_2 \ldots \omega_m$ и *приписывает* им, соответственно, отметки $b_1, b_2, \ldots, b_m$, если отметка вершины v символ b_1, а отметка вершины $v\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$ пути $v, v\omega_1, v\omega_1\omega_2, \ldots, v\omega_1\omega_2 \ldots \omega_m$ символ b_{k+1}. Каждый язык $L \subseteq \Sigma^*$ над алфавитом Σ задает естественным путем некоторое множество помеченных путей $\mathfrak{P}(L)$. Пусть π — некоторый образ, u_0 — его начальная вершина, а u_1 — его конечная вершина. Тогда ясно, что любой путь в π, который ведет из точки u_0 в точку u_1, определяет вполне естественным образом некоторый помеченный путь; обозначим через C_π все таким способом полученные помеченные пути (ясно, что C_π непустое множество для любого π). Под множеством образов $P(L,(G,V))$, который *определяет* язык $L \subseteq \Sigma^*$ *в* (G,V), подразумеваем множество

$$P(L,(G,V)) = \{\pi \mid \pi \in \Pi(G,V) \wedge \mathfrak{P}(L) \cap C_\pi \neq \varnothing\}.$$

Поскольку любой образ — это размеченный по вершинам лабиринт, то в нем можно изучать поведение соответствующих недетерминированных допустимых автоматов без печати, так называемых m-сторонних конечных автоматов (число m указывает на число элементов множества S), у которых поле зрения «охватывает» только текущую вершину и которые могут двигаться по всем основным направлениям. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый такой автомат. Тогда под множеством образов, которое *определяет* этот автомат, понимаем все образы, в которых автомат $\mathfrak{A}$, помещенный в начальную точку этого образа, находит выход (хотя бы одна его траектория оканчивается в конечной точке этого образа). В [52] показано, что класс множеств образов, которые определяют регулярные языки над Σ, равен классу множеств образов, которые определяют m-сторонние конечные автоматы.

В [78] рассмотрено поведение автоматов в лабиринтах с точки зрения характеризации их траекторий в лабиринтах как формальных языков. Для автоматов вводятся два типа эквивалентности: согласно первому, автоматы считаются эквивалентными, если в лабиринтах они порождают одно и то же множество траекторий, согласно второму — если эти множества траекторий «отличаются мало». Изучаемая проблема состояла в следующем: по любой заданной паре автоматов решить вопрос их эквивалентности (в обоих смыслах). Было выделено несколько семейств лабиринтов (таких как, в случае плоскости, прямоугольники; лабиринты, полученные склеиванием по строкам прямоугольников, не обязательно одинаковых по высоте, и др.) как модельных для изучения этой задачи. Для этих семейств данная проблема решена. Установлена ее алгоритмическая разрешимость.

В работах [58, 59] рассматривается машина Тьюринга, как детерминированная, так и недетерминированная, у которой несколько рабочих лент и одна входная лента (многоленточный вариант машины

Тьюринга). Входная лента содержит всегда входное слово в конечном входном алфавите Σ, и входное слово отделено от остальной части входной ленты двумя символами (левым и правым ограничителем), не принадлежащими Σ. В любой клетке рабочих лент может находиться некоторый символ конечного рабочего алфавита Γ (пустой символ Λ принадлежит алфавиту Γ). Как обычно, делаются следующие предположения. У любой ленты по одной головке, у входной — *входная*, у рабочих лент — *рабочие* головки. Входная головка только читает, а рабочие могут и читать и писать; при этом любая головка (как входная, так и рабочая) может либо двигаться независимо от других головок на одну клетку влево или вправо, либо оставаться на месте. У машины конечное множество состояний, и она так устроена, что во время ее работы входная головка никогда не покидает сегмент входной ленты, содержащий входное слово и ограничители. В любой момент дискретного времени машина читает обозреваемые головками клетки всех лент и решает в зависимости от полученной информации и своего состояния, что написать в них (это относится только к клеткам рабочих лент) и куда головкам двигаться, и при этом переходит в новое состояние. У машины есть одно инициальное состояние и некоторое количество заключительных состояний. Говорим, что машина *допускает* некоторое входное слово (оно предоставляется машине через входную ленту), если для этой машины, начинающей работу с начального состояния, с пустыми рабочими лентами (во все клетки рабочих лент вписан пустой символ Λ) и с входной головкой, сканирующей левый ограничитель входного слова, существует хотя бы одно вычисление (в детерминированном случае может существовать только одно такое вычисление), которое переводит машину в некоторое из заключительных состояний. Описывая результаты из работ [58, 59], мы будем иметь в виду именно такой вариант машины Тьюринга, то есть, или детерминированную многоленточную машину Тьюринга (ДМТ), или недетерминированную многоленточную машину Тьюринга (НМТ).

Пусть $f(n)$ — некоторая натуральная функция натуральной переменной и $\mathbf{A} \subseteq \Sigma^*$ — некоторый язык в алфавите Σ. Говорим, что $\mathbf{A}$ *определяется* (или *распознается*) некоторой (НМТ) ДМТ с длиной рабочей зоны $f(n)$, если существует (НМТ) ДМТ $\mathfrak{M}$ такая, что:

а) $\mathfrak{M}$ допускает любое слово $\alpha \in \mathbf{A}$ и не допускает ни одно слово из $\Sigma^*\backslash\mathbf{A}$;

б) у $\mathfrak{M}$ существует хотя бы одно вычисление для любого слова $\alpha \in \mathbf{A}$, при котором любая из головок машины обозревает не больше $f(|\alpha|)$ клеток.

В [58] доказано, что если некоторое множество слов $\mathbf{A} \subseteq \Sigma^*$ определяется некоторой НМТ с длиной рабочей зоны $f(n) \geqslant \log_2 n$, то $\mathbf{A}$ определяется некоторой ДМТ с длиной рабочей зоны $[f(n)]^2$ (здесь предполагается, что $f(n) \geqslant \log_2 n$, поскольку в соответствующем доказательстве выше данного факта требуется чтобы функция $f(n)$ была конструируемой по емкости). Дальше вопрос ставился так: можно ли у выше данной ДМТ уменьшить длину рабочей зоны, например, до минимальной $f(n)$? Другими словами, имеет ли место следующее утверждение: для любого конечного алфавита Σ и любого $\mathbf{A} \subseteq \Sigma^*$ и любой функции $f(n) \geqslant \log_2 n$, если $\mathbf{A}$ определяется некоторой НМТ с длиной рабочей зоны $f(n)$, то тогда $\mathbf{A}$ определяется некоторой ДМТ с длиной рабочей зоны $f(n)$; назовем соответствующую проблему проблемой «$f(n)$-ДМТ $= f(n)$-НМТ?».

НМТ с длиной рабочей зоны $f(n) = n$ называется линейно ограниченным автоматом (LBA), а ДМТ с такой же длиной рабочей зоны называется детерминированным линейно ограниченным автоматом (DLBA). Как известно, класс контекстных (или контекстно-зависимых) языков «точно» определяется классом всех LBA. Открытым остается вопрос, распознается ли любой контекстный язык некоторой DLBA, то есть проблема совпадения классов языков, определяемых LBA и DLBA, соответственно, так называемая проблема «DLBA=LBA?». Ясно, что положительный ответ на проблему «$f(n)$-ДМТ $= f(n)$-НМТ?» влечет за собою положительный ответ на проблему «DLBA=LBA?».

В связи с проблемой «$f(n)$-ДМТ $= f(n)$-НМТ?» исследовалась следующая лабиринтная задача. В [59] рассматривались лабиринты в виде орграфов, удовлетворяющих следующим условиям:

а) существует контур, содержащий все вершины орграфа, каждая дуга которого отмечена символом 0;

в) из каждой вершины орграфа исходят еще точно по две дуги, отмеченные соответственно символами 1 и 2;

г) в орграфе отмечена одна вершина в качестве начальной и группа вершин в качестве конечных, причем предполагается, что допустимые автоматы (коллективы автоматов) по этим меткам могут узнавать, что текущая вершина (любая из текущих вершин) является начальной или конечной вершиной.

Такой лабиринт называется *ниточным*, если в нем существует путь, который идет по дугам лабиринта, отмеченным символами 1 или 2, и который ведет из начальной в какую-то из конечных вершин. Показано, что проблема «$f(n)$-ДМТ $=$ $f(n)$-НМТ?» эквивалентна следующей лабиринтной проблеме: существует ли, хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$, коллектив автоматов типа $(1, j)$, который вычисляет предикат $\mathbf{P}_{\text{th}}$, у которого областью истинности является класс всех ниточных лабиринтов? Отметим, что из предыдущего следует, что существование коллектива типа $(1, j)$, который вычисляет предикат $\mathbf{P}_{\text{th}}$, приводит к положительному ответу на проблему «LBA=NLBA?».

В [11] установлено, что не существует коллектив типа $(1, 2)$, вычисляющий предикат $\mathbf{P}_{\text{th}}$.

В работе [47] рассматриваются два типа автоматов с печатью (машин Тьюринга), допустимых для размеченных конечных плоских шахматных лабиринтов. Эти лабиринты считаются вложенными в $\mathbb{Z}^2$ таким способом, что точки, которые не принадлежат лабиринтам, отмечены одним специальным символом $\#$ (назовем эти точки $\#$-клетками), которым не отмечаются точки лабиринтов; такие лабиринты в [47] названы *массивами* (см. ниже). Первый тип автоматов назван *массивом ограниченный автомат* (МОА), причем рассматривается его детерминированный вариант (ДМОА), а второй тип коротко обозначается через $\#$-ДМОА. Первый тип — это просто автомат с печатью, он движется по лабиринту, может менять отметки его клеток, но не ходит по $\#$-клеткам, поскольку они не принадлежат данному лабиринту. Автомат второго типа может делать все, что делает автомат первого типа, но ему дополнительно разрешено выходить за пределы лабиринта (ходить по $\#$-клеткам), хотя там ему не позволено печатать. Показано, что классы вычислимых предикатов $\mathbf{P}$ для этих типов автоматов совпадают. Заметим, что для непечатающих вариантов машин ДМОА и #-ДМОА это утверждение не имеет место: второй тип автоматов сильнее первого.

Ряд работ посвящен изучению лабиринтов с помощью представления их словами формальных языков. Некоторые алгебраические характеристики общего вида взаимодействия автоматов и лабиринтов приводятся в работе [46]. В ней вводится понятие *акцептора массивов Тьюринга* (АМТ), причем под (двухмерным) массивом понимается размеченная целочисленная плоскость. При этом предполагается, что соответствующая разметка всегда имеет следующий вид: среди (временных) отметок имеется один специальный символ #, такой, что множество всех полей, не помеченных символом #, определяет в $\mathbb{Z}^2$ подлабиринт, который представляет собою (размеченный) конечный шахматный лабиринт; обозначим этот лабиринт для данного массива M через L_M. Тогда, согласно нашей терминологии, АМТ является просто недетерминированным конечным автоматом с печатью, который двигается по такой плоскости. Никаких дополнительных ограничений на АМТ относительно печати не накладывается. Он может писать даже в клетках, в которых был символ # (предварительно его стирая). Единственное ограничение касается стартовой точки: предполагается, что она всегда является клеткой лабиринта L_M. Как и выше, предполагается, что у АМТ есть одно начальное и некоторое множество заключительных состояний. Кроме того, вводятся *грамматики массивов* (ГМ) (двухмерные аналоги формальных грамматик), которые порождают классы (языки) массивов (лабиринтов); эти классы назовем формальными языками лабиринтов. Обозначим для АМТ $\mathfrak{A}$ через $\mathbf{R}(\mathfrak{A})$ класс массивов, которые принимает $\mathfrak{A}$, а для ГМ $\mathfrak{G}$ через $\mathrm{Lang}(\mathfrak{G})$ язык, который она порождает. В работе показано, что для любого АМТ $\mathfrak{A}$ существует ГМ $\mathfrak{G}$ такая, что $\mathrm{Lang}(\mathfrak{G}) = \mathbf{R}(\mathfrak{A})$, и обратно для любой ГМ $\mathfrak{G}$ существует АМТ $\mathfrak{A}$ такой, что $\mathbf{R}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Lang}(\mathfrak{G})$. Вводится подкласс класса всех ГМ, такой, что аналогичное утверждение имеет место для любой грамматики из него и любого недетерминированного МОА (см. выше).

В работе [5] рассматривается класс всех квадратных лабиринтов из $\{0,1\}^{(2)}$. Изучается вопрос о том, какие предикаты, определенные на этом классе, вычислимы с помощью коллективов автоматов.

Показано, что для всякого k существует коллектив типа $(1, 2k+4)$, вычисляющий те предикаты, которые не вычисляются ни одним коллективом типа $(1, k)$; этот факт оказывается верным и при сравнении типов $(1, 2)$ с $(1, 1)$ и $(1, 1)$ с $(1, 0)$.

Обозначим через $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5(n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ и $\mathbf{P}_6$ предикаты на множестве $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$ всех конечных плоских шахматных лабиринтов, области истинности которых соответственно все лабиринты из $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$, которые являются циклическими, которые имеют точно n целочисленных дыр и у которых хотя бы одна целочисленная дыра. В работе [51] установлено, что предикаты $\mathbf{P}_4$ и $\mathbf{P}_5(n)$, при любом $n \in \mathbb{N}_0$, не являются вычислимыми одним автоматом. С другой стороны, в [60] показано, что предикат $\mathbf{P}_4$ является сильно (1,1)-вычислимым, предикат $\mathbf{P}_5(0)$ — сильно (1,2)-вычислимым, а в [21] установлено, что предикат $\mathbf{P}_5(n)$ является сильно (1,2)-вычислимым для любого $n \in \mathbb{N}_0$. Также в [60] показано, что предикат $\mathbf{P}_6$ является (1,1)-вычислимым и сильно (1,2)-вычислимым (очевидно, что сильная (1,2)-вычислимость предиката $\mathbf{P}_5(0)$ влечет сильную (1,2)-вычислимость предиката $\mathbf{P}_6$, и обратно: сильная (1,2)-вычислимость предиката $\mathbf{P}_6$ влечет сильную (1,2)-вычислимость предиката $\mathbf{P}_5(0)$).

Пусть $\mathbf{P}_7$ — предикат на множестве $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$, у которого областью истинности является класс всех лабиринтов из $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$, содержащих простое число вершин, и $\mathbf{P}_8$ — предикат на множестве $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$, у которого областью истинности является класс всех лабиринтов из $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{ш}}$, содержащих две одинаковые дыры. В работе [21] установлено, что предикат $\mathbf{P}_7$ является сильно (1,5)-вычислимым, а предикат $\mathbf{P}_8$ — сильно (1,4)-вычислимым. Показано, что коллективы типа $(1, 2k+4)$ сильнее типа $(1, k)$ в том смысле, что конструктивно указываются предикаты, сильно вычислимые коллективами типа $(1, 2k+4)$, но не коллективами типа $(1, k)$. Показано также, что если предикат $\mathbf{P}$ сильно вычислим коллективом типа $(1, k)$, то он сильно вычислим машиной Тьюринга с длиной рабочей зоны $\log_2 n$, и что если такая двухбуквенная машина с длиной рабочей зоны $z \log_2 n$ сильно вычисляет некоторый предикат $\mathbf{P}$, то этот предикат сильно вычисляется некоторым коллективом типа $(1, 3z+3)$, где n число вершин лабиринта (под машиной Тьюринга здесь подразумевается ее обобщенный вариант: у нее одна рабочая лента, а в качестве «входной ленты» выступает лабиринт, по которому ходит входная головка; такая машина Тьюринга называется k-*буквенной*, если ее рабочий алфавит состоит из k букв). Также установлено, что если некоторый коллектив типа $(1, k)$ сильно вычисляет некоторый предикат $\mathbf{P}$ и $l \geqslant k$, то нет алгоритма, который бы для любого коллектива типа $(1, l)$ устанавливал, сильно вычисляет этот коллектив предикат $\mathbf{P}$ или нет.

Применение автоматов в лабиринтах для решения задач распознавания образов, а именно, распознавания текста является предметом исследований проведенных в работах [114]–[116]. Предлагаемые автоматам шахматные лабиринты имеют форму цифр (в данных работах автор ограничивается цифрами, но в принципе, можно рассматривать вместо цифр любые буквы некоторого языка или тому подобные двухмерные объекты). На самом деле, лабиринты, которые здесь рассматриваются, являются дискретизированными образами цифр. Эти образы формализуются — они представляются в виде дизъюнктных объединений некоторых основных блоков, данных в виде односвязных шахматных лабиринтов (то есть плоских шахматных лабиринтов без конечных целочисленных дыр). Набор основных блоков по своим формам конечен, но размеры блоков и «изрезанность боковых сторон» этих блоков произвольны (здесь «боковые стороны» даны в виде «лестниц» с количеством ступенек, которое можно варьировать). Этим формализуется неизбежный «шум», который всегда сопровождает процесс распознавания (например, классы основных блоков инвариантны по отношению к сжатиям и растягиваниям в направлениях координатных осей). Для каждой цифры вводится соответствующий предикат на множестве плоских шахматных лабиринтов, областью истинности которого является именно класс лабиринтов, соответствующих этой цифре; обозначим предикат, который соответствует цифре i, $0 \leqslant i \leqslant 9$, через C_i. Изучается сильная вычислимость этих предикатов, то есть распознаваемость соответствующих цифр автоматами. В работах [114]–[116] показано, что предикаты C_1, C_2, C_3, C_5 и C_7 сильно вычисляются одним автоматом, а предикаты C_0, C_4, C_6, C_8 и C_9 являются сильно $(1, 1)$-вычислимыми (см. также [51]), но не вычисляются одним автоматом. Для любого из выше данных предикатов в упомянутых работах построены соответствующие автоматы или коллективы автоматов типа (1,1), сильно вычисляющие их.

Также оценивается сложность распознавания каждой цифры, то есть даются верхние оценки времени, необходимого для вычисления каждого из предикатов (то есть, для принятия произвольного лабиринта из n-сечения области истинности соответствующего предиката). Во избежание недоразумений дадим точное определение понятия «время вычисления предиката».

Под *n-сечением* ($n \in \mathbb{N}$) класса лабиринтов $\mathfrak{L}$ понимаем множество

$$\mathfrak{L}|_n = \{L \in \mathfrak{L} \mid |V(L)| = n\}.$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов, $\mathbf{P}$ — некоторый предикат на $\mathfrak{L}$ и $\mathcal{M}$ — некоторый класс лабиринтных $\mathfrak{L}$-монстров. Через $\mathcal{M}(\mathbf{P})$ — обозначим класс всех монстров из $\mathcal{M}$, вычисляющих предикат $\mathbf{P}$, а через $\mathfrak{L}(\mathbf{P})$ — область истинности предиката $\mathbf{P}$. Далее, пусть $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$ и $L \in \mathfrak{L}(\mathbf{P})$. Через $\mathrm{T}_{\mathbf{P}}(\mathfrak{M}, L)$ обозначим время, за которое монстр $\mathfrak{M}$ принимает лабиринт L.

Под *временем вычисления* предиката $\mathbf{P}$ относительно класса $\mathcal{M}$ понимаем функцию

$$\mathrm{T}_{\mathbf{P}}(n) = \min\{\max\{\mathrm{T}_{\mathbf{P}}(\mathfrak{M}, L) \mid L \in \mathfrak{L}(\mathbf{P})|_n\} \mid \mathfrak{M} \in \mathcal{M}(\mathbf{P})\};$$

причем здесь считаем, что $\max \varnothing = 0$, $\max X = \infty$ для любого неограниченного сверху множества $X \subseteq \mathbf{R}$ и $\min\{\infty\} = \infty$. Часто выражение «относительно класса $\mathcal{M}$» опускаем, поскольку из контекста будет ясно, о каком именно классе $\mathcal{M}$ идет речь.

Вопрос оценки времени вычисления некоторого предиката $\mathbf{P}$ примыкает к соответствующей задаче анализа для этого предиката. Заметим, что по отношению к предикатам, которые уже рассматривались в настоящем разделе, этот вопрос является мало исследованным. Также заметим, что проблема оценки времени вычисления данного предиката на множестве лабиринтов $\mathfrak{L}$ тесно примыкает к проблеме оценки T-сложности обхода класса $\mathfrak{L}$ (см. раздел 3): интуитивно ясно, что в большинстве случаев, при достаточно разумных предположениях, монстр должен сначала обойти лабиринт, а затем решить вопрос о его принятии. Сам вопрос оценки T-сложности обхода в случае некоторых классов лабиринтов уже затрагивался в ранее упомянутых работах [28, 88, 90], а в работе [104] он является главным, но применительно к автомату с печатью. Приведем здесь эти результаты.

В разделе 3 рассматривалась T-сложность обхода некоторого класса $\mathfrak{L}$ по отношению к автоматам, допустимым для $\mathfrak{L}$. Обобщим это понятие на случай произвольных монстров.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов, и $\mathcal{M}$ — некоторый класс лабиринтных $\mathfrak{L}$-монстров. Обозначим через $\mathrm{Un}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{L})$ множество всех универсальных обходчиков из $\mathcal{M}$ для $\mathfrak{L}$, то есть множество всех монстров из $\mathcal{M}$, обходящих любой лабиринт из $\mathfrak{L}$. Далее, пусть $\mathfrak{M} \in \mathrm{Un}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{L})$ и $L \in \mathfrak{L}$. Через $\mathrm{T}(L, \mathfrak{M})$ обозначим время, за которое монстр $\mathfrak{M}$ обходит лабиринт L. Теперь пусть

$$\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{M}) = \max\{\mathrm{T}(L, \mathfrak{M}) \mid L \in \mathfrak{L}|_n\}$$

для любого $\mathfrak{M} \in \mathrm{Un}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{L})$ и $n \in \mathbb{N}$. Также обозначим

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n; m) = \min\{\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in \mathrm{Un}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{L}) \wedge |Q_{\mathfrak{M}}| = m\},\\ &\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n) = \min\{\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n; \mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in \mathrm{Un}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{L})\}\end{aligned}$$

для любого $m, n \in \mathbb{N}$; если данные минимумы не существуют, то по определению полагаем, что $\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n; m) = \mathrm{T}(\mathfrak{L}, n) = \infty$. Функцию $\mathrm{T}(\mathfrak{L}, n)$ назовем *T-сложностью обхода* класса $\mathfrak{L}$ относительно класса $\mathcal{M}$; если из контекста ясно, о каком классе $\mathcal{M}$ идет речь, то в выше данном выражении опускаем фразу «относительно класса $\mathcal{M}$».

Вспомним, что под r-лабиринтом понимаем конечный плоский мозаичный $(\{\Lambda\}, \overline{r} \cup \{\Lambda\})$-лабиринт, $r \in \mathbb{N}$; обозначим через $\hat{\mathfrak{L}}(r)$ класс всех r-лабиринтов. Также вспомним, что r-лабиринт L называется r-деревом, если граф $\overline{G(L)}$ является деревом. Если отметка любой дуги некоторого r-лабиринта L равна символу Λ, то L назовем *неразмеченным* r-лабиринтом. Ясно, что при любом r класс всех неразмеченных r-лабиринтов является классом всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, то есть равен классу $\mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$. Положим также, что $\hat{\mathfrak{L}}(0) = \mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ допустимый автомат для $\hat{\mathfrak{L}}(r)$, который при $r > 0$ оснащен дополнительной функцией стирания и печатания символов из $\overline{r}$ на дугах лабиринтов из $\hat{\mathfrak{L}}(r)$: автомат $\mathfrak{A}$, двигаясь по таким лабиринтам, в любой момент дискретного времени меняет (и делает это обязательно) только отметку дуги, которую выбирает в качестве направления своего дальнейшего продвижения, на некоторый символ из $\overline{r}$ (здесь не исключаем случай, когда автомат одну отметку меняет на ту же самую); если $r = 0$, то $\mathfrak{A}$ является автоматом (без печати) допустимым для $\hat{\mathfrak{L}}(0) = \mathfrak{L}^{\text{к}}_{\text{м}}$.

Обозначим множество всех r-деревьев и множество всех неразмеченных r-деревьев, соответственно, через $\hat{\mathfrak{L}}_{\text{д}^*}(r)$ и $\hat{\mathfrak{L}}_{\text{д}}(r)$. Также пусть $\hat{\mathfrak{L}}_0(r)$ — множество всех неразмеченных r-лабиринтов и $\hat{\mathfrak{L}}_*(r) = \hat{\mathfrak{L}}(r)$. Тогда про автомат $\mathfrak{A}$, допустимый для $\hat{\mathfrak{L}}(r)$, говорим, что он является α-универсальным ($\alpha \in \{0, *, \text{д}^*, \text{д}\}$), если $\mathfrak{A} \in \mathrm{Un}(\hat{\mathfrak{L}}_\alpha(r))$. Обозначим $\mathbf{T}_\alpha(n,p,r) = \mathbf{T}(\hat{\mathfrak{L}}_\alpha(r), n; p)$ для любого $\alpha \in \{0, *, \text{д}^*, \text{д}\}$.

Теорема 5.1. [101, 104] *При $n \geqslant 2$ имеют место соотношения:*

1) $\mathbf{T}_{\text{д}}(n,1,0) = \mathbf{T}_{\text{д}}(n,2,0) = \mathbf{T}_{\text{д}}(n,3,0) = \mathbf{T}_{\text{д}}(n,1,1) = \infty$ *и*

$$2n-3 \leqslant \mathbf{T}_{\text{д}}(n,p,r) \leqslant \begin{cases} (n-1)^2 & \textit{при} \quad p=1, \quad\quad r \geqslant 2, \\ 3n & \textit{при} \quad p=2,3, \quad r \geqslant 1, \\ 2n-3 & \textit{при} \quad p \geqslant 4, \quad\quad r \geqslant 0; \end{cases}$$

2) $\mathbf{T}_{\text{д}^*}(n,p,r) = \infty$ *при* $p \in \{1,2,3\}$, $r \in \{0,1\}$ *и*

$$\mathbf{T}_{\text{д}^*}(n,p,r) \leqslant \begin{cases} 3(n-1)^2 & \textit{при} \quad p=1,2,3, \quad r=2, \\ (n-1)^2 & \textit{при} \quad p=1,2,3, \quad r \geqslant 3, \\ 2n & \textit{при} \quad p \geqslant 4, \quad\quad r \geqslant 0; \end{cases}$$

3) $\mathbf{T}_0(n,p,0) = \infty$ *при* $p \geqslant 1$, $\mathbf{T}_0(n,1,1) = \mathbf{T}_0(n,2,1) = \infty$ *и*

$$2n-3 \leqslant \mathbf{T}_0(n,p,r) < \begin{cases} 2n^2 & \textit{при} \quad p=1,2,3, \quad r \geqslant 2, \\ 4n & \textit{при} \quad p \geqslant 4, \quad\quad r \geqslant 1; \end{cases}$$

4) $\mathbf{T}_*(n,p,r) = \infty$ *при* $p \geqslant 1$, $r \in \{0,1\}$ *и*

$$\mathbf{T}_*(n,p,r) \leqslant \begin{cases} 2n^3 & \textit{при} \quad p=1,2,3,4, \quad r=2, \\ 2n(n+1) & \textit{при} \quad p \geqslant 5, \quad\quad r=2, \\ 2n^2 & \textit{при} \quad p \geqslant 1, \quad\quad r \geqslant 3. \end{cases}$$

Аналогично вводится понятие α-универсальности для коллектива $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, допустимого для класса $\hat{\mathfrak{L}}(r)$. При этом предполагается, что если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ одновременно делают шаг по одной и той же дуге, то отметку ставит $\mathfrak{A}_1$. Через $\mathrm{At}^2_\alpha(p,r)$, $\alpha \in \{0, \text{д}\}$, обозначим множество всех таких α-универсальных коллективов, у которых любой из автоматов имеет p состояний. Обозначим $\mathbf{T}_\alpha((\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2),n) = \mathbf{T}(\hat{\mathfrak{L}}_\alpha(r),n;(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2))$ для любых $\alpha \in \{0,\text{д}\}$ и $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2) \in \mathrm{At}^2_\alpha(p,r)$ $(p \in \mathbb{N})$. В [104] показано, что при $n \geqslant 2$ для любого коллектива $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2) \in \mathrm{At}^2_0(p,r) \cup \mathrm{At}^2_\text{д}(p,r)$ $(p \geqslant 1,\ r \geqslant 0)$ справедливо $\mathbf{T}_\text{д}((\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2),n) \geqslant n-1$. Там же показано, что существуют $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2) \in \mathrm{At}^2_\text{д}(4,0)$ и $(\mathfrak{A}'_1,\mathfrak{A}'_2) \in \mathrm{At}^2_0(5,2)$, такие, что, $\mathbf{T}_\text{д}((\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2),n) \leqslant n-1$ и $\mathbf{T}((\mathfrak{A}'_1,\mathfrak{A}'_2),n) < 2n$ при любом $n \geqslant 2$.

Конкретный прикладной аспект автоматного анализа лабиринтов содержится в работе [104]. В ней автоматы с печатью анализируют диаграммы Мура. У этих диаграмм входные символы закодированы элементами множества $\overline{k}$ $(k \in \mathbb{N})$, выходные символы — элементами множества $\overline{r}$ $(r \in \mathbb{N})$, и одна вершина выбрана в качестве начальной (по существу диаграмма представляет собою регулярный, нагруженный по дугам орграф степени k). Под *автоматным* (k,r)-*лабиринтом* или, короче, (k,r)-*лабиринтом* понимаем лабиринт, полученный из диаграммы Мура следующим способом: а) в качестве системы направлений возьмем множество входных символов; б) выходные символы вместе с пустым символом считаем отметками дуг; в) некоторые выходные символы на дугах диаграммы сотрем (заменим эти символы на пустой символ Λ) и г) в качестве начальной вершины возьмем начальную вершину диаграммы. Если стерты все выходные символы в диаграмме, то такой (k,r)-лабиринт называем k-*графом.* Иными словами, (k,r)-лабиринт — это регулярный степени k инициальный $(\{\Lambda\},\overline{r}\cup\{\Lambda\})$-лабиринт с множеством отметок вершин $\{\Lambda\}$ и множеством отметок дуг $\overline{k}$, у которого для любой вершины v имеет место $[v]=\overline{k}$.

Обозначим множество всех k-графов через P_k, а множество всех сильно связных k-графов через R_k. Обозначим также $H_{k,n} = \{L \in H_k \,|\, |V(L)| = n\}$, $H^*_{k,n} = \{L \in H_k \,|\, |V(L)| \leqslant n\}$; $H \in \{P,R\}$.

Допустимый для (k,r)-лабиринтов автомат с печатью имеет дополнительный выход b для выдачи информационных сигналов со значениями из $\overline{p} \cup \{\Lambda\}$ $(p \in \mathbb{N})$. Этот автомат, двигаясь по (k,r)-лабиринтам, в любой момент дискретного времени меняет (и это обязательно делает, причем не исключаются случаи, когда одну отметку заменяет той же самой) только отметку дуги, которую выбирает в качестве направления своего дальнейшего продвижения, на некоторый символ из $\overline{r} \cup \{\Lambda\}$ (печатание символа Λ на некоторой дуге можно интерпретировать как стирание предыдущей отметки). Обозначим через $\mathrm{At}(k, r, p)$ множество всех таких автоматов.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый автомат из $\mathrm{At}(k, r, p)$ и L — некоторый (k, r)-лабиринт. Автомат $\mathfrak{A}$ запускаем в L, поместив его в начальный момент $t = 0$ в начальную вершину v_0 лабиринта L. Через $b(t)$ обозначим — значение выхода b в момент времени t. Если существует $t_0 = \min\{t \mid b(t) \neq \Lambda\}$, то пара $\mathrm{Rez}(L, \mathfrak{A}) = (t_0, b(t_0))$, называется *результатом* работы $\mathfrak{A}$, и считается, что $\mathfrak{A}$ *применим* к L и *проверяет* его за время t_0. В таком случае этот автомат $\mathfrak{A}$ называется также *простым экспериментом для* L; если он является таковым для каждого L из класса $\mathfrak{L}$, то говорится, что он простой эксперимент для $\mathfrak{L}$. *Длиной простого эксперимента* $\mathfrak{A}$ для $\mathfrak{L}$ называем минимальное $t \in \mathbb{N}_0$ такое, что $\mathfrak{A}$ проверяет любой лабиринт из $\mathfrak{L}$ за время, не превосходящее t. Простой эксперимент $\mathfrak{A}$ для $\mathfrak{L}$ называется *безусловным*, если для любых $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}$ имеет место $\mathrm{Tr}_\Sigma(\mathfrak{A}, L_1; t') = \mathrm{Tr}_\Sigma(\mathfrak{A}, L_2; t')$, где t' — время, за которое $\mathfrak{A}$ проверяет хотя бы один из лабиринтов L_1, L_2; в противном случае $\mathfrak{A}$ есть *условный* эксперимент.

Пусть $\mathfrak{L} \subseteq P_k$, $\mathfrak{A}$ — простой эксперимент для $\mathfrak{L}$, и $L \in \mathfrak{L}$. Эксперимент $\mathfrak{A}$ является *тестовым* для L относительно $\mathfrak{L}$, если $\mathrm{Rez}(L', \mathfrak{A}) \neq \mathrm{Rez}(L, \mathfrak{A})$ для любого $L' \in \mathfrak{L}$, $L' \neq L$. Эксперимент $\mathfrak{A}$ является *диагностическим* для $\mathfrak{L}$, если $\mathrm{Rez}(L_1, \mathfrak{A}) \neq \mathrm{Rez}(L_2, \mathfrak{A})$ для любых $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}$, $L_1 \neq L_2$.

Вершины v и v' k-графов L и L' называются отличимыми автоматом за время t, если существует диагностический эксперимент $\mathfrak{A}$ для класса $\{L_v, L'_{v'}\}$ длины t. Вершины v и v' называются *отличимыми автоматом*, если существует $t \in \mathbb{N}$, такое, что v и v' отличимы автоматом за время t. Два k-графа называются *отличимыми автоматом*, если их начальные вершины отличимы автоматом.

Простой эксперимент $\mathfrak{A}$ для $\mathfrak{L}$ называется *установочным* для $\mathfrak{L}$, если для любых $L, L' \in \mathfrak{L}$ из равенства $\mathrm{Rez}(L, \mathfrak{A}) = \mathrm{Rez}(L', \mathfrak{A}) = (t, b(t))$ следует, что вершины v_t и v'_t не являются отличимыми автоматом; вершина v_t (v'_t) — это вершина, в которую попадает автомат $\mathfrak{A}$ после проделанных первых t шагов в L (L').

Пусть $k \geqslant 1$, $m \geqslant n \geqslant 2$, $g(k,n)$ — минимальное время, достаточное для отличимости автоматом любой пары вершин любого n-вершинного k-графа, и $g(k,n,m)$ — минимальное время, достаточное для отличимости автоматом любой пары вершин, такой, что первая из них принадлежит произвольному n-вершинному, а вторая — произвольному m-вершинному k-графу.

Теорема 5.2. [104] *Для $g(k,n)$ и $g(k,n,m)$ справедливы следующие оценки:*

$$g(k,n) = \begin{cases} 2n-4 & \textit{при } k \geqslant 2,\ n \geqslant 4, \\ n-1 & \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$g(k,n,m) = \begin{cases} 2n-1 & \textit{при } k \geqslant 2,\ m > n \geqslant 2, \\ 2n-3 & \textit{при } k \geqslant 2,\ m = n \geqslant 3, \\ n & \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Устанавливается, что для любых $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 4$ существует n-вершинный k-граф L с попарно отличимыми автоматом вершинами, такой, что отсутствует простой эксперимент, тестовый для L относительно $[L]$, а также что отсутствует простой эксперимент, диагностический для $[L]$ (здесь $[L]$ множество всех k-графов, которые получаются из L изменением его начальной вершины).

Пусть $L \in R_{k,n}$ и $F \subseteq R_k$, где F такое, что $L \in F$ и L отличим автоматом от любого $L' \in F$, $L' \neq L$. Обозначим через $l_F(L)$ наименьшую длину безусловного простого эксперимента, тестового для L относительно F. Пусть $l(L,r) = \max\limits_F l_F(L)$, где максимум берется по всем указанным выше классам F мощности r, а также $l(L) = l_{R'_k}(L)$, где R'_k — класс попарно отличимых автоматом лабиринтов, который для любого лабиринта $L' \in R_k$ содержит некоторый неотличимый от него лабиринт L''. Положим $l(k,n,r) = \max\{l(L,r) \mid L \in R_{k,n}\}$ и $l(k,n) = \max\{l(L) \mid L \in R_{k,n}\}$.

Теорема 5.3. [104] *Верны следующие соотношения:*

1) Пусть $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ и $r \geqslant 3$. Тогда

$$l(k,n,r) = \frac{n(n+1)(k-1)}{2} + n$$

при $r \geqslant n(k-1)+2$ *и*

$$l(k,n,r) \sim \begin{cases} 2r(n-r) & \text{при } 3 \leqslant r \leqslant n/3, \\ (n+r)^2/4 & \text{при } n/3 \leqslant r \leqslant n, \\ r(n-r/2k) & \text{при } n \leqslant r \leqslant n(k-1)+1 \end{cases}$$

при $k, n, r \to \infty$.

2) *Если* $k \geqslant 2$, $r \geqslant 3$ *и* $r = o(n)$ *при* $n \to \infty$, *то* $l(k,n,r) \sim 2n(r-1)$ *при* $n \to \infty$.

3) $l(k,n) = (1/2)n(n+1)(k-1)+n$ *при* $k \geqslant 2$ *и* $n \geqslant 2$.

Пусть $\mathcal{R}^*_{k,n}$ — класс всех $F \subseteq R^*_{k,n}$, которые состоят из попарно отличимых автоматом лабиринтов, $(\mathcal{R}^*_{k,n})_r = \{F \in \mathcal{R}^*_{k,n} \,|\, |F| = r \geqslant 2\}$ и $(\mathcal{P}^*_{k,n})_r = \{F \subseteq P^*_{k,n} \,|\, |F| = r \geqslant 2\}$. Обозначим через $v(F)$ $(h(F))$ наименьшую длину условного простого эксперимента, диагностического (установочного) для $F \in \mathcal{R}^*_{k,n}$ $(F \subseteq P^*_{k,n})$. Также обозначим $v(k,n,r) = \max\{v(F) \,|\, F \in (\mathcal{R}^*_{k,n})_r\}$ $(h(k,n,r) = \max\{h(F) \,|\, F \in (\mathcal{P}^*_{k,n})_r\})$, $v(k,n) = v(\hat{R}^*_{k,n})$, где $\hat{R}^*_{k,n}$ — класс попарно отличимых автоматом лабиринтов, который для каждого лабиринта $L \in R^*_{k,n}$ содержит некоторый неотличимый от него автоматом лабиринт L', и $h(k,n) = h(P^*_{k,n})$. В [104] показано, что для функций $v(k,n,r)$ и $h(k,n,r)$ ($v(k,n)$ и $h(k,n)$) справедливы утверждения (утверждение), сформулированные (сформулированное) в теореме 5.3 для функции $l(k,n,r)$ ($l(k,n)$).

Пусть $L \in P_k$. Простой эксперимент $\mathfrak{A}$ для $[L]$ называется *установочным* для L, если для любых $v, v' \in V(L)$ из $\mathrm{Rez}(L_v, \mathfrak{A}) = \mathrm{Rez}(L_{v'}, \mathfrak{A}) = (t, b)$ следует, что $v_t = v'_t$, где v_t (v'_t) вершина, в которую попадает $\mathfrak{A}$ после t шагов в лабиринте L_v $(L_{v'})$. Лабиринт L называется ориентируемым, если для него существует установочный эксперимент. Обозначим через $H_{k,n}$ множество всех $K \in P_{k,n}$ с занумерованными вершинами и с невыделенной вершиной в качестве входа, через $S_{k,n}$ — множество всех ориентируемых лабиринтов из $H_{k,n}$ и через $E_{k,n}$ — класс всех попарно неизоморфных (в смысле перенумерации вершин) лабиринтов из $S_{k,n}$. В работе [104] показано, что $|S_{k,n}| \sim n^{kn}$, $|E_{k,n}| \sim n^{kn}/n!$ и $|S_{k,n}|/|H_{k,n}| \to 1$, при $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ и $k+n \to \infty$.

В работе [79] в качестве основного объекта исследования выступает один подкласс класса всех автоматных (k, r)-лабиринтов ([104]–[106]), а именно, множество всех автоматных лабиринтов. Под *автоматным лабиринтом* понимаем k-граф, у которого все вершины достижимы из его начальной вершины; обозначим через Γ_n класс всех n-вершинных автоматных лабиринтов.

Пусть L — некоторый автоматный лабиринт, $v \in V(L)$ и $\alpha \in (\overline{k})^*$. Если существует путь $v_0 = v, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n = v\alpha$, такой, что $|e_1||e_2|\ldots|e_n| = \alpha$, то вершину v_n обозначим через $v\alpha$, а сам путь — через $\mathfrak{p}(v, \alpha)$. Два автоматных лабиринта L_{v_0} и $L'_{v'_0}$ являются *изоморфными*, $L_{v_0} = L'_{v'_0}$, если существует биекция $\varphi : V(L_{v_0}) \to V(L'_{v'_0})$ такая, что $\varphi(v_0) = v'_0$ и $\varphi(vx) = \varphi(v)x$ для любого $x \in \overline{k}$.

У допустимых автоматов для класса Γ_n предполагается наличие дополнительного выхода для выдачи информационных сигналов из множества $\{\Lambda\} \cup \overline{2}$, а также предполагается, что он в состоянии не больше одного раза ставить отметку в какую-то вершину лабиринта, в котором находится, а также регистрировать наличие отметки в текущей вершине.

Пару слов $W = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha, \beta \in (\overline{k})^*$, назовем *экспериментом*, различающим автоматные лабиринты L_{v_0} и $L'_{v'_0}$, если

$$(v_0\alpha = v_0\beta \wedge v'_0\alpha \neq v'_0\beta) \vee (v_0\alpha \neq v_0\beta \wedge v'_0\alpha = v'_0\beta).$$

Для любых слов α и β в некотором алфавите пишем $\alpha \leqslant \beta$, если α начало слова β. Пусть теперь $W = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ — некоторый эксперимент, различающий автоматные лабиринты L_{v_0} и $L'_{v'_0}$. Если $\alpha_1 \nleqslant \alpha_2$ и $\alpha_2 \nleqslant \alpha_1$, то эксперимент назовем *кратным* и под его *сложностью* понимаем число $C(W) = |\alpha_1| + |\alpha_2|$, где $|\alpha_i|$ — длина слова α_i, $i = 1, 2$. Если $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ или $\alpha_2 \leqslant \alpha_1$, то эксперимент назовем *простым* и под его *сложностью* понимаем число $C(W) = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$. Эксперимент минимальной сложности называется *кратчайшим*.

В случае кратного эксперимента построим автоматы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, которые в паре функционируют следующим способом. Сначала запускается автомат $\mathfrak{A}_1$ в лабиринте L_{v_0}. Он проходит путь $\mathfrak{p}(v_0, \alpha_1)$ и ставит отметку в вершине $v_0\alpha_1$. Затем запускается автомат $\mathfrak{A}_2$ в L_{v_0}, который проходит путь $\mathfrak{p}(v_0, \alpha_2)$, и если обнаруживает отметку в вершине $v_0\alpha_2$, то он выдает информационный сигнал 1, в противном случае выдает сигнал 2. В случае простого эксперимента можем построить один автомат, который в лабиринте L_{v_0} проходит путь $\mathfrak{p}(v_0, \alpha_1)$, ставит отметку в вершине $v_0\alpha_1$, затем проходит путь $\mathfrak{p}(v_0\alpha_1, \alpha_3)$, где α_3 такое слово, что $\alpha_2 = \alpha_1\alpha_3$, и если обнаруживает отметку в вершине $v_0\alpha_2$, то выдает информационный сигнал 1, в противном случае выдает сигнал 2. Ясно, что таким способом можно различать данные автоматные лабиринты, а сложность эксперимента фактически определяет необходимое время для различения лабиринтов в данном эксперименте.

В работе [79] показано, что любые два неизоморфных автоматных лабиринта различаются простым или кратным экспериментом. Основные результаты работы [79] сформулированы в виде следующих двух теорем. Пусть $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 2$.

Теорема 5.4. *Сложность кратчайшего эксперимента, различающего любые два неизоморфных графа из класса Γ_n, не превосходит $C(n,k)$, где*

$$C(n,k) = \begin{cases} 2n-4, & \text{если } k \geqslant 2,\ n \geqslant 3, \\ n & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

причем указанные оценки не допускают уменьшения.

Теорема 5.5. *Пусть $m > n$. Сложность кратчайшего эксперимента, различающего любые два графа $G \in \Gamma_n$ и $H \in \Gamma_m$, не превосходит $C(n,m,k)$, где*

$$C(n,m,k) = \begin{cases} 2n-2, & \text{если } k \geqslant 2, \\ n, & \text{если } k = 1, \end{cases}$$

причем указанные оценки не допускают уменьшения.

В работе приведены лабиринты, которые различаются только простыми или только кратными экспериментами, а также и следующее утверждение, которое понижает оценку теоремы 5.4.

Теорема 5.6. *Если для графов $G, H \in \Gamma_n$, существуют только простые различающие эксперименты, то сложность кратчайшего эксперимента не превосходит n, и эта оценка не допускает уменьшения.*

Вместо заключения

Как видно из изложенного, изучение поведения автоматов в лабиринтах привело к созданию и утверждению важного направления в теории автоматов. Разработан солидный понятийный аппарат, позволяющий решать имеющиеся проблемы и формулировать новые. Много важных проблем решено, некоторые уже известные проблемы остаются и дальше «крепкими орешками» и требуют своего решения. Многие из них приведены в нашем обзоре. Заметим, что направление автоматы в лабиринтах развивалось благодаря в основном усилиям ученых Германии, России, Сербии и Черногории, США и Японии. С сожалением можно отметить, что в последние несколько лет ощущается своеобразное затишье в исследуемой области. Это может быть, отчасти, объясняется тяжестью проблем, стоящих сейчас перед учеными, занимающимися этой проблематикой, а также прикладной значимостью направления. Следует также иметь в виду, что некоторые центры, в которых направление стремительно развивалось, угасли. Надеемся, что изложенные здесь вопросы заинтересуют новое поколение математиков.

Список литературы

[1] Antelmann H., Budach L., Rollik H. A. On universal traps // EIK. 1979. Vol. 15. No. 3. Pp. 123–131.

[2] Antelmann H. An application of the prime number theorem in automata theory // ICS PAS Reports 411. 1980. Pp. 9–11.

[3] Asser G. Bemerkungen zum Labyrinth-Problem // EIK. 1977. Vol. 13. No. 4/5. Pp. 203–216.

[4] Beneš J., Kolář P. Automatic cooperative control of a group of mobiles // Automatica. 1978. Vol. 14. Pp. 313–324.

[5] Blum M., Hewitt C. Automata on a two-dimensional tape // Proc. 8th IEEE SWAT Conf. 1967. Pp. 155–160.

[6] Blum M., Sakoda W. On the capability of finite automata in 2 and 3 dimensional space // Proc. 17th IEEE FOCS Conf. 1977. Pp. 147–161.

[7] Blum M., Kozen D. On the power of the compass // Proc. 19th IEEE FOCS Conf. 1978. Pp. 132–142.

[8] Budach L. On the solution of the labyrinth problem for finite automata // EIK. 1975. Vol. 11. No. 10–12. Pp. 661–672.

[9] Budach L. Environments, labyrinths and automata // Lecture Notes in Computer Science 56. Springer, 1977. Pp. 54–64.

[10] Budach L. Automata and labyrinths // Math. Nachrichten 86. 1978. Pp. 195–282.

[11] Budach L. Two pebbles don't suffice // Foundation of Computing Theory 79. Vol. 1. Berlin, 1980. Pp. 578–589.

[12] Budach L., Meinel Ch. Umwelten und Automaten in Umwelten // Seminarberichte Sektion Mathematik d. Humboldt-Universität zu Berlin. 1980. Nr. 23.

[13] Budach L., Meinel Ch. Environments and automata // EIK. 1982. Vol. 18. No. 1/2. Pp. 3–40; No. 3. Pp. 115–139.

[14] Budach L., Waack S. On the halting problem for automata in cones // EIK. 1982. Vol. 18. No. 9. Pp. 489–499.

[15] Bull M., Hemmerling A. Finite embedded trees and simply connected mazes cannot be searched by halting finite automata // Journal of Inf. Process. and Cybern. EIK. 1990. Vol. 26. No. 1/2. Pp. 65–73.

[16] Coy W. Automata in labyrinths // Fundamentals of Computation Theory / Editor: M. Karpiński. Berlin: Springer-Verlag, 1977. Pp. 65–71.

[17] Coy W. Of Mice and Maze // EIK. 1978. Vol. 14. No. 5 Pp. 227–232.

[18] Danecki R., Karpinski M. Decidability results on plane automata searching mazes // Proc. 2nd Int. FCT'79. Berlin: Conf. Akademie Verlag, 1979. Pp. 84–91.

[19] Döpp K. Automaten in Labyrinthen I // EIK. 1971. Vol. 7. No. 2. Pp. 79–94.

[20] Döpp K. Automaten in Labyrinthen II // EIK. 1971. Vol. 7. No. 3. Pp. 167–190.

[21] Ejsmont M. Problems in labyrinths decidable by pebble automata // EIK. 1984. Vol. 20. No. 12. Pp. 623–632.

[22] FCT Computing Problem Book / Editor: M. Karpiński. Poznań, 1977.

[23] Fischer P. C. Multi-tape and infinite-state automata: A survey // Comm. ACM. 1965. Vol. 8. No. 12. Pp. 799–805.

[24] Graw B. On tape complexity classes and Savitch mazes // EIK. 1981. Vol. 17. No. 10. Pp. 501–510.

[25] Habasinski Z., Karpinski M. A codification of Blum-Sakoda 7-pebbles algorithm // ICS PAS Reports 448. Warszawa, 1981.

[26] Hemmerling A., Kriegel K. On searching of special classes of mazes and finite embedded graphs // Lecture Notes in Computer Science 176. 1984. Pp. 291–300.

[27] Hemmerling A. 1-pointer automata searching finite plane graphs // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1986. Vol. 32. Pp. 245–256.

[28] Hemmerling A. Remark on the power of compass // Lecture Notes in Computer Science 233. Springer-Verlag, 1986. Pp. 405–413.

[29] Hemmerling A. Three-dimensional traps and barrages for cooperating automata // Lecture Notes in Computer Science 278. Berlin: Springer-Verlag, 1987. Pp. 197–203.

[30] Hemmerling A. Normed two-plane traps for finite systems of cooperating compass automata // J. Inf. Process. Cybern. EIK 1987. Vol. 28. No. 8/9. Pp. 453–470.

[31] Hemmerling A. Labyrinth problems. Labyrinth-searching abilities of automata. Teubner-Texte zur Mathematik. Vol. 114. Leipzig, 1989.

[32] Hemmerling A. Pebble automata in labyrinths with rotation systems // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1991. Vol. 37. No. 5. Pp. 453–466.

[33] Hoffmann F. One pebble does not suffice to search plane labyrinths // Lecture Notes in Computer Science. 1981. Vol. 117. Pp. 433–444.

[34] Hoffman F. 1-Kiesel-Automaten in Labyrinthen // Report R-Math-06/82. AdW der DDR, Berlin, 1982.

[35] Hoffman F., Kriegel K. Quasiplane labyrinths. Preprint / P-Math-20/83. AdW der DDR, Berlin, 1983.

[36] Inoue K., Takanami I., Nakamura A. A note on two-dimensional finite automata // Information Processing Letters. 1978. Vol. 7. No. 1. Pp. 49–52.

[37] Inoue K., Nakamura A. Two-dimensional finite automata and unacceptable functions // International Journal of Computer Mathematics. Section A. 1979. Vol. 7 Pp. 207–213.

[38] Inoue K., Takanami I. A note on decision problems for three-way two-dimensional finite automata // Information Processing Letters. 1980. Vol. 10. Pp. 245–248.

[39] Karpiński M., van Emde Boas P. On the Mouse in the First Octant Problem // EATCS Bull. 12, 1980.

[40] Kilibarda G. On the minimum universal collectives of automata for plane labyrinths // Discrete Math. Appl. 1993. Vol. 3. No. 6. Pp. 555–586.

[41] Kinber E. B. Three-way automata on rectangular tapes over a one-letter alphabet // Information Sciences. 1985. Vol. 35. Pp. 61–77.

[42] Kozen D. Automata and planar graphs // Fundamentals of Computation Theory, FCT'79 / L. Budach, ed. Mat. Res., 2 Berlin: Akademie-Verlag, 1979. Pp. 243–254.

[43] Kriegel K. Universelle 1-Kiesel-Automaten für k-komponentige Labyrinthe // Report R-Math-04/84. AdW der DDR, Berlin, 1984.

[44] Kudryavtsev V. B., Ushchumlich Sh., Kilibarda G. The behavior of automata in labyrinths // Discrete Math. Appl. 1993. Vol. 3. No. 1. Pp. 1–28.

[45] Meinel C. The importance of plane labyrinths // EIK. 1982. Vol. 18. No. 7/8. Pp. 419–422.

[46] Miligram D. L., Rosenfeld A. Array automata and array grammars // IFIP '71 Conference Proceedings. North-Holland, Amsterdam, 1972. Pp. 69–74.

[47] Miligram D. A region-crossing problem for array-bounded automata // Information and Control. 1976. Vol. 31. No. 2. Pp. 147–152.

[48] Müler H. Endliche Automaten und Labyrinthen // EIK. 1971. Vol. 7. No. 4. Pp. 261–264.

[49] Müler H. Automata catching labyrinths with at most three components // EIK. 1979. Vol. 15. No. 1/2. Pp. 3–9.

[50] Mylopoulus J. On the definition and recognition of patterns in discrete spaces // TR-84, Dept. of Electrical Engineering, Princeton University, 1970.

[51] Mylopoulos J. On the recognation of topological invariants by 4-way finite automata // Computer Graphics and Image Processing. 1972. Vol. 1. Pp. 308–316.

[52] Mylopoulus J. On the application of formal languages and automata theory to pattern recognition // Pattern Recognition 1972. Vol. 4. No. 1. Pp. 37–51.

[53] Pultr A., Úlehla J. On two problems of mice // Rend. Circ. Mat. di Palermo. 1982. Vol. 31. No. 2. Pp. 249–262.

[54] Ritchie R. W. Finite automata and the set of squares // J. ACM. 1963. Vol. 10. No. 4. Pp. 528–531.

[55] Rollik H. A. Automaten in planaren Graphen // Acta Informatica. 1980. Vol. 13. Pp. 287–298.

[56] Rosenfeld A. Sequential and parallel picture acceptors // TR-613, AFOSR-77-3271, Computer Science Technical Report Series, University of Maryland, College Park, MD, 1977.

[57] Rosenfeld A. Picture Languages (Formal Models for Picture Recognition). New York: Academic Press, 1979.

[58] Savitch W. Relations between nondeterministic and deterministic tape complexities // Journal of Computer and System Science. 1970. Vol. 4. Pp. 177–192.

[59] Savitch W. Maze recognizing automata and nondeterministic tape complexity // Journal of Computer and System Science. 1973. Vol. 7. Pp. 389–403.

[60] Shah N. A. Pebble automata on arrays // Computer Graphics and Image Processing. 1974. Vol. 3. Pp. 236–246.

[61] Shannon Cl. E. Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found / Editor: H. Forester. 1951. Pp. 173–180.

[62] Stahl S. The embeddings of a graph: A survey // Journal of Graph Theory. 1978. Vol. 2. Pp. 275–298.

[63] Szepietowski A. A finite 5-pebble-automaton can search every maze // Information Processing Letters. 1982. Vol. 15. No. 5. Pp. 199–204.

[64] Szepietowski A. On searching plane labyrinths by 1-pebble automata // EIK. 1983. Vol. 19. No. 1/2. Pp. 79–84.

[65] Szepietowski A. Remarks on searching labyrinths by automata // Lecture Notes in Computer Science. 1983. Vol. 158. Pp. 457–464.

[66] Taniguchi K., Kasami T. Some decision problems for two-dimensional nonwriting automata // IECE Japan (C). 1971. Pp. 578–585.

[67] Vijayan G., Wigderson A. Rectilinear graphs and their embeddings // SIAM J. Comput. 1985. Vol. 14. Pp. 355–372.

[68] Анджанс А. В. О возможностях автоматов при обходе одномерных областей // Латвийский математический ежегодник. Вып. 27. Рига, 1983. С. 191–201.

[69] Анджанс А. В. Возможности автоматов при обходе плоскости // Проблемы передачи информации. 1983. Т. 19. Вып. 3. С. 78–89.

[70] Анджанс А. В. Сложность определения автоматом его расположения относительно замкнутого контура // Математическая логика, математическая лингвистика и теория автоматов. Калинин, 1983. С. 88–90.

[71] Анджанс А. В. О возможностях автоматов при обходе пространства // Межвузовский сборник работ по теории автоматов, алгебре и теории чисел. Рига, 1984. С. 3–17.

[72] Анджанс А. В. Поведение детерминированных и вероятностных автоматов в лабиринтах: Дисс. канд. физ.-мат. наук. Рига, 1987. 90 с.

[73] Богомолов С. А., Золотых А. А., Зыричев А. Н. Автоматы и графы. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1992. 180 с.

[74] Голованов А. В. Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими след в вершинах лабиринта // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3. Вып. 3–4. С. 193–212.

[75] Голубев Д. В. Об обходе графов автоматами с одной нестираемой краской // Интеллектуальные системы. 1999. Т. 4. Вып. 1–2. С. 243–272.

[76] Грунская В. И. О взаимодействии автоматов типа «хищник — жертва»: Дипломная работа. МГУ, 1988.

[77] Грунская В. И. О динамическом взаимодействии автоматов // Математическая кибернетика и ее приложения к биологии. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 8–18.

[78] Грунская В. И. О контекстной зависимости множеств протоколов автоматов в геометрических средах // Труды международной конференции по интеллектуальным системам, 1994.

[79] Грунский И. С., Олейник Р. И. Об отличимости инициальных автоматных лабиринтов конечными автоматами // Интеллектуальные системы. 1999. Т. 4. Вып. 1–2. С. 273–283.

[80] Золотых А. А. Обход лабиринтов с ограниченными в фиксированных направлениях дырами // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 1. С. 59–69.

[81] Зыричев А. Н. О синтезе автомата, обходящего плоские лабиринты с ограниченными дырами // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 1. С. 105–113.

[82] Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 384 с.

[83] Килибарда Г. О два карактеристична модела функционалних система са аутоматним операцијама затварања: Докторска дисертација. Факултет математичких наука, Београд, 1989. 117 с.

[84] Килибарда Г. Об универсальных лабиринтах-ловушках для конечных множеств автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 1. С. 72–79.

[85] Килибарда Г. Об обходе конечных лабиринтов системами автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 2. С. 71–81.

[86] Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха-Подколзина // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 3. С. 135–146.

[87] Килибарда Г., Ушчумлич Ш. О лабиринтах-ловушках для коллективов автоматов // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 2. С. 29–50.

[88] Килибарда Г. О сложности автоматного обхода лабиринтов // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 3. С. 116–124.

[89] Килибарда Г. О минимальных универсальных коллективах автоматов для плоских лабиринтов // Дискретная математика. 1994. Т. 6. Вып. 4. С. 133–153.

[90] Килибарда Г., Ушчумлич Ш. О задаче синтеза для автоматов в одном классе лабиринтов // FILOMAT (Niš). 9:3 (1995). 743–751.

[91] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 2003. Т. 15. Вып. 2. С. 3–39.

[92] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 2003. Т. 15. Вып. 3. С. 3–39.

[93] Климов И. В. Поведение в лабиринтах некоторых автоматов с краской // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3. Вып. 3–4. С. 251–268.

[94] Клини С. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 15–67.

[95] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. М.: Изд-во МГУ, 1985.

[96] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[97] Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 1993. Т. 4. Вып. 3. С. 3–26.

[98] Кудрявцев Г. Ю. О времени решения лабиринтной задачи конечными автоматами // Сб. науч. трудов 138. М.: МЭИ, 1987, С. 14–18.

[99] Кудрявцев Г. Ю. О времени обхода лабиринтов без циклов конечными автоматами // Материалы 2-го Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во МГУ, 1988. С. 202–208.

[100] Кудрявцев Г. Ю. О сложности конечных автоматов, решающих задачу о лабиринте. Деп. в ВИНИТИ, 4.05.88, 3430–В88.

[101] Кудрявцев Г. Ю. О сложности конечных автоматов, решающих лабиринтную задачу // Алгебро-логические конструкции: Межвуз. темат. сб. трудов. Калинин: Калининский гос. ун-т, 1989. С. 68–71.

[102] Кудрявцев Г. Ю. О времени обхода лабиринтов конечными автоматами // Межвуз. сб. трудов. Саратов: Саратовский гос. ун-т, 1989. С. 95–105.

[103] Кудрявцев Г. Ю. О сложности экспериментов с конечными графами. Деп. в ВИНИТИ 20.11.89, 6961–В89.

[104] Кудрявцев Г. Ю. О времени решения лабиринтных задач конечными автоматами: Дисс. канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1990. 127 с.

[105] Кудрявцев Г. Ю. Об отличимости вершин автоматных лабиринтов конечными автоматами // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 4. С. 143–152.

[106] Кудрявцев Г. Ю. О длине тестовых автоматно реализуемых экспериментов с автоматным лабиринтами // Дискретная математика. 1992. Т. 4. Вып. 3. С. 86–100.

[107] Кудрявцев Г. Ю. О времени решения лабиринтных проблем конечными автоматами // Доклады АН России. 1992. Т. 326. № 4. С. 601–604.

[108] Курдюмов Г. Л. Коллектив автоматов с универсальной проходимостью // Проблемы передачи информации. 1981. Т. 17. Вып. 4. С. 98–112.

[109] Курепа J.-А. Моделирање понашања аутомата у једној класи лавирината: Магистарска дисертација. Математички факултет, Београд, 2000. 56 с.

[110] Максимовић З. О синтези оптималних аутомата у неким класама лавирината: Магистарска дисертација. Математички факултет, Београд, 2001. 72 с.

[111] Насыров А. З. Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые метки // Дискретная математика. 1997. Т. 9. Вып. 1. С. 123–133.

[112] Насыров А. З. Об обходе автоматами лабиринтов в n-мерном пространстве // Дискретная математика. 2000. Т. 12. Вып. 4. С. 121–137.

[113] Насыров А. З. О бесконечной ловушке для автоматов со следом // Интеллектуальные системы. 2000. Т. 5. Вып. 1–4. С. 273–285.

[114] Стаматовић Б. Препознавање специјалних класа π-лавирината аутоматима: Докторска дисертација. Математички факултет, Београд, 1999. 101 с.

[115] Стаматович Б. Распознавание односвязных цифр автоматом // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3. Вып. 3–4. С. 291–305.

[116] Стаматович Б. Распознавание двусвязных цифр коллективами автоматов // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 4. Вып. 1–2. С. 321–337.

[117] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 528 с.

[118] Харари Ф. Теория графов / Пер. с англ. М.: Мир, 1973.

[119] Цейтлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969.