

# О некоторых характеристиках нейронных схем

В. С. Половников

Нейронные сети рассматриваются с точки зрения структурной теории функциональных систем и реализуются схемами из функциональных элементов. Функции задаются схемами, которые являются суперпозициями следующих элементов:

- 1) константа  $g_c \equiv c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ;
- 2) сумматор с  $n$  входами  $\Sigma_n$ ,  $n \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $\Sigma_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $\Sigma_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n$ ;
- 3) усилитель  $f_\gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $f_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_\gamma(a) = \gamma a$ ;
- 4) функция  $\theta$ ,  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\theta(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \geq 0; \\ 0, & \text{если } a < 0; \end{cases}$
- 5) функция  $F$ ,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(a, b) = \begin{cases} a, & \text{если } b > 0; \\ 0, & \text{если } b \leq 0. \end{cases}$

Множество этих элементов обозначим  $\Delta'$ , а множество всех функций, реализуемых схемами над  $\Delta'$ , обозначим  $\mathcal{L}$ .

Рассмотрим все пути в некоторой схеме, ведущие от входа к выходу. Длиной пути назовем число нелинейных элементов ( $\theta$  или  $F$ ), содержащихся в нем. А нелинейной глубиной этой схемы назовем длину самого длинного пути.

Две схемы из элементов  $\Delta'$  эквивалентны, если они реализуют одну и ту же функцию. Имеет место

**Лемма 1.**  $\mathcal{L} = L$ , где  $L$  — множество всех кусочно-линейных функций.

С использованием этой леммы доказывается

**Теорема 1.** *Для любой схемы над  $\Delta'$  существует эквивалентная ей схема с нелинейной глубиной не больше двух.*

Далее будем рассматривать функции с памятью. Функцию, реализующую задержку с начальным состоянием  $a_0$ , обозначим  $\mathfrak{Z}_{a_0}$ .

Положим  $\Delta = \Delta' \cup \{\mathfrak{Z}_{a_0} | a_0 \in \mathbb{R}\}$ .

**Теорема 2.** *Пусть  $S$  — схема, построенная из элементов  $\Delta$  с использованием операций композиции. Тогда из элементов  $\Delta$ , используя лишь операции суперпозиции, можно построить схему, однократное применение к которой операции обратной связи приводит к схеме, реализующей ту же функцию с памятью, что и  $S$ .*

Автор выражает благодарность А. А. Часовских за постановку задачи.