

О форме конфигураций, растущих в симметрических однородных структурах

А. Г. Данилов

В настоящей работе изучаются некоторые геометрические свойства однородных структур. Однородная структура представляет собой множество одинаковых автоматов, каждый из которых функционирует в дискретном времени с учетом своего состояния и состояния соседних автоматов. Рассматриваются симметрические пороговые двумерные однородные структуры, имеющие два состояния ячейки 0 и 1. Для конфигураций в этих однородных структурах вводится понятие бесконечного роста и решается задача нахождения асимптотических очертаний бесконечно растущих конфигураций.

Однородной структурой (сокращенно ОС) σ называется набор

$$(\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi).$$

Здесь \mathbb{Z}^k — множество k -мерных векторов с целыми координатами. Элементы множества \mathbb{Z}^k называют *ячейками* однородной структуры σ . Элементы множества $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ называются *состояниями ячейки* ОС σ . $V = (\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1})$ — упорядоченный набор попарно различных ненулевых элементов из \mathbb{Z}^k называется *шаблоном соседства* ОС σ . Набор V определяет для каждой ячейки α ОС σ набор $\vec{V}(\alpha) = (\alpha, \alpha + \alpha_1, \dots, \alpha + \alpha_{h-1})$, называемый *упорядоченной окрестностью* ячейки α . Множество $\{\alpha, \alpha + \alpha_1, \dots, \alpha + \alpha_{h-1}\}$ называется *окрестностью ячейки* α и обозначается $V(\alpha)$. Функция $\varphi : (E_n)^h \rightarrow E_n$, $\varphi(0, \dots, 0) = 0$ называется *локальной функцией переходов* ОС σ .

Состоянием однородной структуры σ называется произвольная функция f , определенная на множестве \mathbb{Z}^k и принимающая значения из E_n . Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ и f состояние ОС σ , то значение $f(\alpha)$ называется значением ячейки α , определяемым состоянием f ОС σ . На множестве Σ всех состояний ОС σ определена глобальная функция переходов Φ однородной структуры σ , полагая $\Phi(f) = g$, если $f, g \in \Sigma$ и выполняется тождество

$$g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \dots, f(\alpha + \alpha_{h-1})).$$

Выделим подкласс Σ' класса Σ всех состояний ОС σ , полагая $f \in \Sigma'$ тогда и только тогда, когда равенство $f(\alpha) = 0$ выполняется для всех ячеек α , кроме, быть может, конечного их числа. Состояния ОС σ , принадлежащие Σ' , называются конфигурациями этой ОС. Легко видеть, что если $f \in \Sigma'$, то $\Phi(f) \in \Sigma'$.

Конфигурацию f однородной структуры σ назовем бесконечно растущей, если с течением времени число ненулевых ячеек конфигурации бесконечно увеличивается.

Далее в работе рассматриваются только однородные структуры размерности $k = 2$.

Расстоянием $\rho(A, B)$ между двумя замкнутыми множествами A и B точек плоскости называем величину:

$$\max \left(\max_{x \in A} \min_{y \in B} \rho(x, y), \max_{y \in B} \min_{x \in A} \rho(x, y) \right).$$

Далее каждой ячейке сопоставим на плоскости единичный квадрат с центром в ней самой и сторонами, параллельными главным осям. Для произвольной заданной конфигурации f рассмотрим объединение всех точек плоскости, содержащихся в квадратах ненулевых ячеек конфигурации. Данное множество точек плоскости будем называть покрытием конфигурации f и обозначать через $U(f)$.

Рассмотрим два односвязных замкнутых множества G_1 и G_2 точек плоскости, причем $G_1 \subset G_2$. Если для данной бесконечно растущей конфигурации f в ОС σ и некоторых положительных вещественных чисел α, β, v выполнено:

$$(\alpha + vt) \cdot G_1 \subset U(\Phi^t(f)) \subset (\beta + vt) \cdot G_2,$$

при всех t , начиная с некоторого, то говорим, что конфигурация f является (G_1, G_2) -растущей со скоростью v .

Если далее, в ОС σ каждая бесконечно растущая конфигурация является (G_1, G_2) -растущей со скоростью v , для некоторых v, G_1 и G_2 , то такую однородную структуру называем *правильной* для данного типа роста конфигураций.

Рассмотрим далее некоторую бесконечную последовательность $\{\sigma_m, G'_m, G''_m, v_m\}_{m=1}^\infty$, где σ_m — однородная структура, v_m — положительное вещественное число и G'_m, G''_m — односвязные замкнутые множества. Причем, для каждого m и некоторого односвязного замкнутого множества G выполнено:

$$G'_m \subset G \subset G''_m, \quad G'_m \subset G'_{m+1}, \quad G''_{m+1} \subset G''_m, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(G, G'_m) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(G, G''_m) = 0.$$

Пусть также каждая ОС σ_m является правильной для (G'_m, G''_m) -роста конфигураций со скоростью v_m для всех m , начиная с некоторого m_0 . В таком случае называем последовательность ОС $\{\sigma_m\}_{m=1}^\infty$ *аппроксимирующей G -рост*.

Далее через $\sigma(2m + 1, H)$, $H \in N$ и $H \leq (2m + 1)^2$ будем обозначать двумерную однородную структуру, имеющую два состояния ячейки 0 и 1, окрестность ячейки в виде квадрата $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leq m, |y| \leq m\}$ и симметрическую пороговую локальную функцию перехода. Причем локальная функция перехода принимает значение 1, если число активных ячеек в локальной окрестности больше или равно величине H , и 0 в остальных случаях.

Рассмотрим замкнутое множество на плоскости, которое симметрично относительно горизонтали, вертикали и диагоналей, и в первом октанте его граница задается уравнением:

$$y = \frac{D}{2} + \frac{S}{2x - D}, \quad \text{где } D > 0, S \in (0, D^2/2) \text{ и } x \in \left[\frac{D}{2} - \sqrt{\frac{S}{2}}, \frac{D}{2} - \frac{S}{D} \right].$$

Обозначим данное множество через $M(D, S)$.

Теорема 1. *Последовательность ОС $\{\sigma(2m+1, kt^2)\}_{m=1}^{\infty}$, $0 < k < 2$ является аппроксимирующей $M(2, k)$ -рост.*

Автор выражает благодарность А. С. Подколзину за постановку задачи.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.
- [2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.