Некоторые замечания о формулах сложности минимальных объектов

М. В. Носов

В работе приводятся рассуждения о выводе формул длины минимального теста и числа элементов в минимальной схеме, состоящей из функций Шеффера. Представление формул в законченном виде приводит к сложным арифметико-комбинаторным выражениям.

1. Длина минимального теста

Пусть n — размерность пространства, T — таблица сравнения, $|T| = m$. Пусть $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Определим функцию $g(\tau)$

$$\begin{aligned} &g(\tau) = \sum_{t \in T} \prod_{i=1}^{n} (1 - \tau_i t_i). \\ &g(\tau) = 0, \quad \text{если } \tau \text{ — тест,} \\ &g(\tau) \in \{1, \ldots, m\}, \quad \text{если } \tau \text{ не тест.} \end{aligned}$$

Определим функцию $h(d, \tau), d \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} &h(d, \tau) = g(\tau) + (m+1)(\tau_1 + \ldots + \tau_n - d). \\ &h(d, \tau) = 0, \quad \text{если } \tau \text{ — тест и длина его равна } d. \\ &h(d, \tau) \in \{-(m+1)(n+1), \ldots, -1, 1, \ldots, (m+1)(n+1)\}, \end{aligned}$$

если τ не тест или длина τ не равна d.

Если $K(d)$ — число тестов длины d, то

$$K(D) = \frac{(-1)^{(n+1)(m+1)}}{(((n+1)\,(m+1))!)^2} \sum_{\tau \in E_2^n} \prod_{j=1}^{(n+1)(m+1)} \left(h^2 - j^2\right).$$

Длина минимального текста задается формулой

$$\ell_{\min}(T) = \sum_{d=0}^{n} \frac{1}{(2^n)!} \prod_{s=1}^{2^n} \left(K(d) - s\right).$$

2. Сложность минимальной схемы

Базис состоит из функции Шеффера. Выходная функция $y_m = f(y_1, \ldots, y_n)$, зависящая от переменных $y_1, \ldots, y_n$, $y_m \neq y_i$, $i = 1, \ldots, n$, имеет индекс больший, чем какая-нибудь верхняя граница числа элементов в схеме для реализации любой функции в этом базисе, например, $m = 9n^2 2^{2n} + n + 1$, и задается формулой

$$y_m = \sum_{\beta, \beta \in \{1,\ldots,n\}} a_\beta \prod_{i \in \beta} y_i. \tag{1}$$

Например, по табличному заданию коэффициенты a_β находятся несложно. Схема имеет $m - n$ элементов с выходами $y_{n+1}, \ldots, y_m$, выход последнего элемента и есть выход схемы. К каждому i-ому элементу подходит две группы входов от всех входов и элементов, имеющих меньший номер. Таким образом, работа схемы определяется формулой (1) и нижеследующими условиями

$$y_i = 1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji} y_j\right) \left(\sum_{j=1}^{i-1} \tau_{ji} y_j\right), \quad i = n+1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$t_{1i}, \ldots, t_{i-1,i}, \tau_{1i}, \ldots, \tau_{i-1,i} \in \{0, 1\}.$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji} \in \{0, 1\}. \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \tau_{ji} \in \{0, 1\}. \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji} + \sum_{j=1}^{i-1} \tau_{ji} \in \{0, 2\}. \tag{5}$$

Если в условиях (3) и (4) соответствующие суммы равны 0, то выходом элемента является 1, для реализации которой нужно две функции Шеффера. С учетом условий (3), (4), (5) определим функцию $g(x,y)$, где x,y — неотрицательные целые числа не большие m

$$g(x,y)=\frac{1}{(m!)^2}\prod_{i=1}^{m}(x-i)\prod_{i=1}^{m}(y-i)+\frac{1}{((m-1)!)^2}x\prod_{i=2}^{m}(x-i)y\prod_{i=2}^{m}(y-i).$$

Функция g равна 1 только в точках (0,0) и (1,1), во всех остальных 0. Сформируем функцию F

$$F=\sum_{i=n+1}^{m}\left(y_i-\left(\sum_{j=1}^{i-1}t_{ji}y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{i-1}\tau_{ji}y_j\right)\right)^2 g\left(\sum_{j=1}^{i-1}t_{ji},\sum_{j=1}^{i-1}\tau_{ji}\right)+$$
$$+\left(y_m-\sum_{\beta,\beta\in\{1,\dots,n\}}a_\beta\prod_{i\in\beta}y_i\right)^2+\sum_{i=n+1}^{m}\left(1-g\left(\sum_{j=1}^{i-1}t_{ji},\sum_{j=1}^{i-1}\tau_{ji}\right)\right).$$

Если переменные $y_1,\dots,y_m$ считать независимыми, то выражение F равно 0 тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (1)–(5), в противном случае принимает значения из множества $\{1,\dots,2(m-n)+1\}$.

Сформируем интерполяционный многочлен

$$\chi\left(F\right)=\frac{1}{\left(2\left(m-n\right)+1\right)!}\prod_{r=1}^{2(m-n)+1}\left(F-r\right).$$

Зафиксируем все перменные t и τ с любыми индексами, тогда $\chi\left(F\right)$ функция переменных $(y_m,\dots,y_{n+1},y_n,\dots,y_1)$. Если значения t и τ таковы, что соответствующие функции реализуют функцию y_m, то функция $\chi\left(F\right)$ имеет 2^n единиц, так как значения $(y_m,\dots,y_{n+1})$ находятся по $(y_n,\dots,y_1)$ однозначно, в противном случае $\chi\left(F\right)$ имеет строго меньше 2^n единиц. Пусть

$$\varphi(t,\tau)=\sum_{(y_m,\dots,y_1)\in E_2^m}\chi(F).$$

$\varphi(t,\tau)=2^n\Longleftrightarrow$ схема реализует y_m.

$\varphi(t,\tau)\in\{0,\dots,2^n-1\}\Longleftrightarrow$ схема не реализует y_m.

Далее рассуждение аналогично рассуждениям в первой части. Пусть

$$\psi(t,\tau) = \frac{1}{(2^n-1)!}\prod_{q=0}^{2^n-1}\left(\varphi\left(t,\tau\right)-q\right).$$

$$h(d,t,\tau) = \left(1-\psi\left(t,\tau\right)\right) + 2\left(\sum_{j=n+1}^{m}\sum_{i=1}^{j-1}\left(t_{ji}+\tau_{ji}\right)-2d\right).$$

$h(d,t,\tau)=0,$ если переменные t и τ распределены так, что схема реализует y_m и число фактически используемых элементов d (при этом может быть использована тождественная 1).

$h(d,t,\tau)\in\{-(n+m-1)(m-n-1)-1,\ldots,-1,1,\ldots$
$\ldots,(n+m-1)(m-n-1)+1\},$ в противном случае.

Если $K(d)$ — число схем, в которых использовано d элементов, то

$$K(d)=\frac{(-1)^{(n+m-1)(m-n-1)+1}}{\left(\left(\left(n+m-1\right)\left(m-n-1\right)+1\right)!\right)^2}\cdot$$
$$\cdot\sum_{(t,\tau)\in E_2^{(n+m-1)(m-n-1)+1}}\ \prod_{j=1}^{(n+m-1)(m-n-1)+1}\left(h^2-j^2\right).$$

Если появились схемы, начиная с некоторого числа элементов, то и для большего числа обязательно есть схемы, реализующие требуемую функцию. Для этого достаточно в первой реализуемой схеме расположить все существенно используемые элементы в верхней части и один в самом низу и к группе верхних элементов присоединять новые, выходы которых фактически не использовать. С учетом того, что может быть использована тождественная 1, которая не подсчитана, получаем для произвольной функции $f(y_1,\ldots,y_n)$, отличной от селектора, в базисе, состоящем из функции Шеффера,

$$L\left(f\right)=1+\frac{1}{2^{(m-n)!}}\sum_{d=1}^{(n+m-1)(m-n-1)}\ \prod_{s=1}^{2^{m-n}}\left(K\left(d\right)-s\right)+\delta,\qquad \delta\in\{0,2\}.$$