Решение автоматных уравнений в множестве детерминированных функций

И. В. Лялин

В данной работе рассматривается задача существования детерминированных функций, являющихся решением заданного автоматного уравнения. Доказывается, что для уравнений с одной неизвестной детерминированное решение существует тогда и только тогда, когда существует ограниченно-детерминированное решение. Для уравнений с большим числом неизвестных детерминированное решение может существовать, даже если ограниченно-детерминированного решения нет.

1. Постановка задачи

Определение 1. Пусть дана произвольная схема S из $(P_{o.\partial.}, C)$ (ограниченно-детерминированные функции с операцией суперпозиции[1]), у которой несколько о.-д. функций (обозначим их $x_1, x_2, \ldots, x_n$) выделены. Будем x_i называть *i-ой свободной позицией*, остальные о.-д. функции — *фиксированными*. Назовем такую схему со свободной позицией *схемой-шаблоном*. Будем ее обозначать $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Предполагается, что на свободные позиции в схеме-шаблоне $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно подставлять всевозможные о.-д. функции. Например, на место x_i можно подставить произвольную о.-д. функцию c_i с тем же количеством входов и выходов, что и у x_i, но так,

[1] Что такое схема из о.-д. функций и операция суперпозиции см., например, [1, Глава 2 § 1 и Глава 3 § 4]

чтобы j-тый вход c_i подсоединялся вместо j-того входа x_i а k-тый выход c_i подсоединялся вместо k-того выхода x_i. Полученная при этом схема станет эквивалентна какой-то о.-д. функции F. Будем это записывать так:

$$S(c_1, c_2, \ldots, c_n) = F.$$

Определение 2. *Автоматным уравнением* называется пара: схема-шаблон $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и о.-д. функция h, имеющая то же число входов и выходов, что и схема S. Записывается уравнение так:

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h.$$

Определение 3. *Ограниченно-детерминированным решением* автоматного уравнения $S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$ является такой набор о.-д. функций $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что автомат $S(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ эквивалентен автомату h.

Ранее [3] был найден алгоритм для решения автоматных уравнений с одной неизвестной во множестве о.-д. функций. Однако интерес представляет также решение автоматных уравнений во множестве детерминированных функций, являющегося естественным расширением множества о.-д. функций. Действительно: операция суперпозиции, используемая для построения автоматных схем, может быть доопределена на множестве всех детерминированных функций, причем результат операции не будет выходить за это множество.

Определение 4. *Детерминированным решением* автоматного уравнения $S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$ является такой набор детерминированных функций

$$c_1, c_2, \ldots, c_n,$$

что $S(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ эквивалентен автомату h.

Обратите внимание: несмотря на то, что в схему-шаблон подставляются детерминированные функции, возможно не являющиеся ограниченными, требуется все же, чтобы схема была эквивалентна ограниченной детерминированой функции h.

Поставим такую задачу: описать все детерминированные решения автоматного уравнения.

Такая постановка задачи содержит в себе некоторый элемент неконструктивности, поскольку требуется определить наличие детерминированного решения (или даже как-то описать все множество решений — см. ниже). Детерминированное же решение не является конструктивным объектом, поскольку в общем случае не может быть задано конечным образом. Однако задача имеет еще одну постановку, эквивалентную данной, но не использующую неконструктивных объектов.

Определение 5. *t-решением* автоматного уравнения

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$$

является такой набор о.-д. функций $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что $S(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ведет себя так же, как автомат h на всех словах длины не более чем t.

Два t-решения будем считать неотличимыми, если неотличимо их поведение на всех словах длины не более чем t.

Определение 6. Будем говорить, что автоматное уравнение

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$$

имеет *A-решение*, если $\forall t > 0$ оно имеет t-решение.

Очевидно, что если уравнение имеет детерминированное решение, то оно имеет и A-решение, поскольку для любого $t > 0$ из детерминированного решения можно сделать ограниченно-детерминированное t-решение. Можно считать, что детерминированное решение и является A-решением.

Обратно: пусть уравнение имеет A-решение. t-решение будем называть белым, если для любого $m > t$ существует m-решение, являющееся его продолжением. Из конечного множества 1-решений хотя бы одно должно быть белым, иначе уравнение не будет иметь A-решение. Далее: если t-решение белое, то в конечном множестве его продолжений существует хотя бы одно белое $t + 1$-решение. Возьмем любое белое 1-решение. Затем любое его продолжение, являющееся белым 2-решением. Затем любое продолжение последнего, являющееся белым 3-решением и т. д. Этот процесс задает набор детерминированных функций $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которые являются решением уравнения,

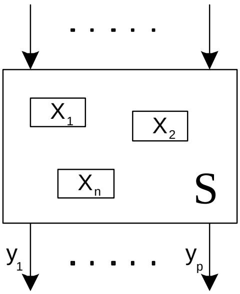

Рис. 1.

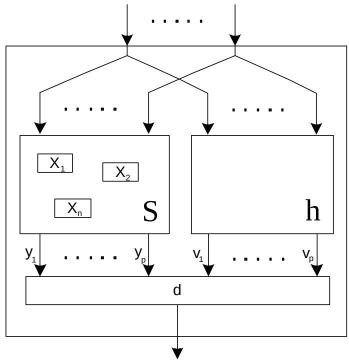

Рис. 2.

поскольку на словах любой длины $S(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ведет себя так же, как автомат h.

Таким образом, обе формулировки эквивалентны (A-решение существует тогда и только тогда, когда существует детерминированное решение). Далее в статье будем использовать первую из них: решение автоматных уравнений в детерминированных функциях.

Произвольное автоматное уравнение $S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$ можно привести к уравнению вида $S'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h_0$, где h_0 — константный автомат, всегда выдающий на своем выходе ноль вне зависимости от того, что пришло на его вход. Причем набор $c_1, c_2, \ldots, c_n$ является решением изначального уравнения тогда и только тогда, когда он является решением уравнения $S'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h_0$.

Приведение показано на рисунках 1 и 2. На рисунке 1 вы видите начальную схему-шаблон $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. На рисунке 2 — приведенную схему-шаблон $S'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В S' соответствующие входы схемы S и автомата h отождествляются и являются входами S'. Свободные позиции схемы S являются свободными позициями схемы S'. Выходы S и h подаются на вход автомата d. d имеет одно внутреннее состояние и реализует следующую функцию: если в момент времени t $\forall i$ $y_i = v_i$, то в этот момент времени на выходе d будет 0, иначе будет 1. Очевидно, что $S'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h_0$ тогда и только тогда, когда выходы S и h совпадают, то есть $S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$.

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать только приведенные уравнения вида $S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h_0$, поскольку, умея решать их, мы научимся решать уравнение произвольного вида.

2. Уравнение с одной неизвестной

Вкратце сформулируем, как решается в [3] автоматное уравнение с одной неизвестной во множестве ограниченно-детерминированных функций.

Договоримся, что длину слова a обозначим $|a|$, конкатенацию двух слов a и b будем обозначать ab. Начало слова a длины t будем обозначать $|a|_t$. Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. E_k^t — множество всех слов из E_k длины t, E_k^∞ — множество всех сверхслов из E_k. Обозначим $E_k(n) = \underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n}$.

Пусть M_k — множество всех подмножеств множества E_k^∞, исключая пустое множество. Если $\lambda \in M_k$, то через $|\lambda|_t$ будем обозначать множество всех слов в алфавите E_k^t, являющихся началами длины t сверхслов из λ ($\{a \in E_k^t \mid \exists \alpha \in \lambda$ *такие, что* $|\alpha|_t = a\}$).

Определение 7. Функцию $g : E_k^\infty(n) \to M_k$ будем называть *γ-недетерминированной*, если:

$$\forall t \geqslant 1, \forall \alpha, \beta \in E_k^\infty(n) \quad (|\alpha|_t = |\beta|_t) \Rightarrow (|g(\alpha)|_t = |g(\beta)|_t).$$

Пусть $t \geqslant 1$, M_k^t — множество всех непустых подмножеств множества E_k^t. Также как и в случае рассмотрения о.-д. функции, каждая γ-недетерминированная функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ для любого $t \geqslant 1$ индуцирует некоторое γ-недетерминированное отображение множества $E_k^t(n)$ в M_k^t, то есть некоторую γ-недетерминированную функцию $g^t(x_1, \ldots, x_n)$, определенную на наборах слов в алфавите E_k длины t. Очевидно, что любая γ-недетерминированная функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ однозначно определяется последовательностью γ-недетерминированных функций

$$g^1(x_1, \ldots, x_n), g^2(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

По аналогии с тем, как это делается для детерминированных функций [2, Гл. 3 § 2], введем понятие остаточной функции для γ-недетерминированной функции $g(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 8. Пусть $\alpha \in E_k^\infty(n)$, $\beta \in g(\alpha)$. Пусть $t \geqslant 1$, $a = |\alpha|_t$, $b = |\beta|_t$. Тогда функцию $f_{a,b} : E_k^\infty(n) \to M_k$ будем называть *остаточной функцией* для g, если $\forall x \in E_k^\infty(n) \quad f_{a,b}(x) = \{y \in M_k \mid$ $\exists \gamma \in g(a \circ x)$ *такое, что* $\gamma = b \circ y\}$.

Заметим, что в отличие от детерминированных функций остаточные функции для γ-недетерминированных функций определяются не только по набору $\alpha = (b_1, \ldots, b_n)$, но и по слову $\beta \in g^t(b_1, \ldots, b_n)$.

В [3] доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *$f_{a,b}$ — γ-недетерминированная функция.*

Определение 9. γ-недетерминированная функция называется *ограниченно–недетерминированной* (о.-нд. функцией), если множество всех ее остаточных функций конечно.

Определение 10. Будем говорить, что детерминированная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *вложима* в о.-нд. функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, если для любого набора $(b_1, \ldots, b_n)$ элементов из E_k^∞ $f(b_1, \ldots, b_n) \in g(b_1, \ldots, b_n)$.

Главным результатом [3] является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $S(x) = h$ — произвольное автоматное уравнение, имеющее непустое множество решений. Тогда по схеме S эффективно строится о.-нд. функция g такая, что о.-д. функция f является решением уравнения тогда и только тогда, когда она вложима в g. Данную о.-нд. функцию g будем называть* о.-нд. функцией всех решений.

Главным результатом данного раздела является следующее утверждение.

Утверждение 1. *Детерминированная функция является решением автоматного уравнения тогда и только тогда, когда она вложима в его о.-нд. функцию всех решений.*

Таким образом, для любого автоматного уравнения с одной неизвестной одна и та же о.-нд. функция определяет как множество ограниченно-детерминированных, так и множество детерминированных решений. Следовательно, если автоматное уравнение имеет детерминированное решение, то оно имеет и ограниченно-детерминированное решение. Докажем последний факт отдельно.

Утверждение 2. *Если детерминированная функция f является решением автоматного уравнения $S(x) = h_0$, то для любого натурального t существует о.-д. функция f', совпадающая с f до глубины t и являющаяся решением этого же уравнения.*

Доказательство. Состоянием схемы S будем называть набор состояний всех фиксированных автоматов. Пусть для состояния q функции f $M(q)$ — множество состяний, в которых может находиться схема S, когда f находится в состоянии q. Пусть $N(q)$ — ярус состояния, то есть длина входного слова для f, в результате которого f перейдет в состояние q (будем считать, что для каждого состояния такое слово единственно).

Поскольку множество, которому принадлежит $M(q)$, конечно, то существует такое натуральное u, что для любого состояния q функции f найдется такое состояние q' функции f, что $M(q) = M(q')$ и $N(q') < u$.

Построим о.-д. функцию f'. Пусть $v = \max(t, u)$. Множеством состояний f' будет множество всех таких состояний q функции f, что $N(q) \leqslant v$. Начальным состоянием f' будет начальное состояние f. Введем отображение L множества состояний f в множество состояний f'. Если $N(q) < v$, то $L(q) = q$. Если же $N(q) = v$, то существует такое состояние q' функции f, что $M(q) = M(q')$ и $N(q') < v$. Положим $L(q) = q'$. Заметим, что $\forall q\ M(q) = M(L(q)),\ N(L(q)) < v$. Функции выходов и переходов для состояния q функции f' будут такими же как у $L(q)$. О.-д. функция f' таким образом полностью определена. Очевидно, что она совпадает с f до глубины t.

Докажем, что если в процессе работы $S(f')$ f' находится в состоянии q, а S — в состоянии r, то $r \in M(q)$. Предположим, что это не так. То есть, что найдется такое слово w_1 на входе S, при котором

f' перейдет в некое состояние q, а S в некое состояние $r \notin M(q)$. Пусть w_1 будет наикратчайшим словом, обладающим таким свойством. Пустым словом w_1 быть не может, поскольку в начальный момент времени состояния схемы S в обоих случаях $S(f)$ и $S(f')$ совпадают. Пусть $w_1 = w_1'a$. Пусть при подаче на вход $S(f')$ слова w_1 f' переходит в состояние q_1, а S переходит в состояние r_1. Поскольку $|w_1| < |w|$, то $r_1 \in M(q_1)$. По определению M существует такое слово w_2, подавая которое на вход $S(f)$ f перейдет в состояние $L(q_1)$, а S в состояние $r_1 \in M(q_1)$. Функции выходов и переходов в состоянии q_1 у f' и в состоянии $L(q_1)$ у f совпадают и, следовательно, при одинаковом входе $S(f)$ будет функционировать так же, как и $S(f')$. То есть, если подать a, то f перейдет в состояние q, а S в состояние $r \in M(q)$. Противоречие.

Итак, мы доказали, что если f' находится в состоянии q, а S в состоянии r, то $r \in M(q)$.

Предположим, что $S(f') \neq h_0$. Пусть $w = w_1a$ — наименьшее слово, такое, что $S(f')(w) \neq h_0(w) = 000\ldots0$. Пусть при подаче на вход $S(f')$ слова w_1 f' переходит в состояние q, а S переходит в состояние $r \in M(q)$. Пусть w_2 — такое слово, при подаче которого на вход $S(f)$ f переходит в состояние $L(q)$, а S переходит в состояние $r \in M(L(q)) = M(q)$. Функции выходов в состоянии q у f' и в состоянии $L(q)$ у f совпадают. Следовательно, если подать a, то $S(f')$ выдаст на выходе ту же букву, что и $S(f)$, то есть 0. Значит $S(f')(w) = 000\ldots0 = h_0(w)$. Противоречие. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 1. Пусть детерминированная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ вложима в о.-нд. функцию всех решений $g(x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что f не является решением уравнения. Тогда найдется такое входное для S слово длины t, на котором $S(f) \neq h_0$. В силу определения вложимости для любого натурального t найдется такая о.-д. функция $f'(x_1, \ldots, x_n)$, совпадающая с f до глубины t и вложимая в g. Тогда получается, что $S(f') \neq h_0$, что противоречит теореме 1.

Обратно: пусть детерминированная функция f — решение уравнения $S(f) = h$. Предположим, что f не вложима в g. Тогда найдется такое натуральное t, что начало длины t функции f не вложимо в g.

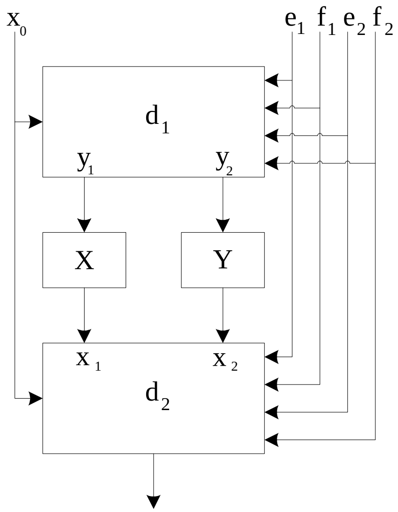

Рис. 3.

По утверждению 2 существует о.-д. функция f', совпадающая с f до глубины t и $S(f') = h_0$. С одной стороны, поскольку f' совпадает с f до глубины t и начало длины t функции f не вложимо в g, то f' не вложима в g. С другой стороны, $S(f') = h_0$ и следовательно f' вложима в g. Противоречие. Утверждение доказано.

3. Уравнение с двумя и более неизвестными

Как было показано в предыдущем разделе, в случае с одной неизвестной автоматное уравнение имеет детерминированное решение тогда и только тогда, когда оно имеет ограниченно-детерминированное решение. Для случая с двумя и более неизвестными это не так, что будет показано в данном разделе. Ниже будет приведено уравнение с двумя неизвестными, имеющее детерминированное решение, но не имеющее ограниченно-детерминированного решения.

В уравнении две неизвестных X и Y и два фиксированных автомата d_1 и d_2. Схема S изображена на рис. 3.

Прежде чем определить d_1 и d_2, введем несколько определений.

1) Пусть a — произвольное слово в алфавите E_2. Тогда $|a|$ будем обозначать длину слова a.
2) Пусть a — произвольное слово (сверхслово) в алфавите E_2. $a(i)$ будем обозначать i-ую букву слова (сверхслова) a.
3) Пусть a — произвольное слово (сверхслово) в алфавите E_2, n и m — натуральные числа, $1 \leqslant n \leqslant m \leqslant |a|$. Тогда $a[n,m]$ будет таким словом в E_2 длины $m-n+1$, что $a[n,m](i) = a(n+i-1)$. То есть $a[n,m]$ — подслово слова (сверхслова) a от n-ой буквы до m-ой включительно.
4) Пусть a — произвольное слово в алфавите E_2, f и e — буквы из E_2 (то есть 0 или 1). Под $\operatorname{add}(a,f,e)$ будем подразумевать такое слово b, что если $e=0$, то $b=fa$, а если $e=1$, то $b=af$. То есть мы просто добавляем к слову a букву f в начало или в конец, в зависимости от e.
5) Пусть a — произвольное слово в алфавите E_2 и $e \in E_2$. Тогда $\operatorname{sym}(a,e)$ будем обозначать букву в алфавите E_p, такую, что $\operatorname{sym}(a,0) = a(1)$ и $\operatorname{sym}(a,1) = a(|a|)$.
6) Пусть a — произвольное слово в алфавите E_2, такое, что $|a| \geqslant 1$ и $e \in E_2$. Обозначим $\operatorname{del}(a,e)$ следующее слово в алфавите E_2:

$$\begin{cases} \operatorname{del}(a,e) = a(2)a(3)\ldots a(|a|), & \text{если } e=0, \\ \operatorname{del}(a,e) = a(1)a(2)\ldots a(|a|-1), & \text{если } e=1. \end{cases}$$

7) Пусть c — произвольное сверхслово в алфавите E_3. Обозначим $\operatorname{fst}(c)$ такое наименьшее натуральное число i, что $c(i) = 2$. То есть $\operatorname{fst}(c)$ — это номер первой двойки в c.

d_1 имеет 5 входов x_0, e_1, f_1, e_2, f_2 и 2 выхода y_1, y_2. На входе x_0 алфавит E_3. На остальных входах алфавит E_2. На выходах алфавит E_3. Пусть $xp_0 = x_0[1, \operatorname{fst}(x_0)-1]$. На выходе d_1 реализуются следующие функции:

$$y_1 = \operatorname{add}(xp_0, f_1, e_1)222\ldots,$$
$$y_2 = \operatorname{add}(xp_0, f_2, e_2)222\ldots$$

d_2 имеет 7 входов $x_0, x_1, x_2, e_1, f_1, e_2, f_2$ и 1 выход y_1. На входах x_0, x_1 и x_2 алфавит E_3. На остальных входах и выходах алфавит E_2. Пусть $xp_1 = x_1[\operatorname{fst}(x_0)+1, \operatorname{fst}(x_1)-1]$, $xp_2 = x_2[\operatorname{fst}(x_0)+1, \operatorname{fst}(x_2)-1]$.

d_2 обладает следующим свойством: $y_1 = (00\ldots)$, если и только если выполняются следующие условия:

1) $\mathrm{fst}(x_2) = \mathrm{fst}(x_1) > \mathrm{fst}(x_0)$;
2) $\mathrm{sym}(xp_1, e_1) = f_1$;
3) $\mathrm{sym}(xp_2, e_2) = f_2$;
4) $\mathrm{del}(xp_1, e_1) = \mathrm{del}(xp_2, e_2)$.

Приведем детерминированное решение данного уравнения. X и Y — одна и та же детерминированная функция F, которая устроена следующим образом. Пока на входе F не появится двойка, F запоминает слово, поступающее на ее вход, на выходе F в это время выдает ноль. Начиная с момента времени, когда на вход была подана двойка, F начинает выдавать на выходе запомненное слово. Когда слово закончится, F начинает всегда выдавать на выходе двойку. То есть F — это память, которая сначала запоминает слово любой длины, а затем выдает его.

Убедимся, что выполняются все свойства для автомата d_2, если $X = F$ и $Y = F$. В этом случае

$$\begin{aligned} x_1 &= \underbrace{00\ldots0}_{|\,\mathrm{add}(xp_0,f_1,e_1)|} \quad \mathrm{add}(xp_0, f_1, e_1)22\ldots, \\ x_2 &= \underbrace{00\ldots0}_{|\,\mathrm{add}(xp_0,f_2,e_2)|} \quad \mathrm{add}(xp_0, f_2, e_2)22\ldots, \\ xp_1 &= \mathrm{add}(xp_0, f_1, e_1), \\ xp_2 &= \mathrm{add}(xp_0, f_2, e_2). \end{aligned}$$

1) $\mathrm{fst}(x_1) = 2 * |\,\mathrm{add}(xp_0, f_1, e_1)| = 2 * (|xp_0| + 1)$,
$\mathrm{fst}(x_2) = 2 * |\,\mathrm{add}(xp_0, f_2, e_2)| = 2 * (|xp_0| + 1)$,
$\mathrm{fst}(x_0) = |xp_0| + 1$.
Значит $\mathrm{fst}(x_2) = \mathrm{fst}(x_1) > \mathrm{fst}(x_0)$.
2) $\mathrm{sym}(xp_1, e_1) = \mathrm{sym}(\mathrm{add}(xp_0, f_1, e_1), e_1) = f_1$.
3) $\mathrm{sym}(xp_2, e_2) = \mathrm{sym}(\mathrm{add}(xp_0, f_2, e_2), e_2) = f_2$.
4) $\mathrm{del}(xp_1, e_1) = \mathrm{del}(\mathrm{add}(xp_0, f_1, e_1), e_1) = xp_0$,
$\mathrm{del}(xp_2, e_2) = \mathrm{del}(\mathrm{add}(xp_0, f_2, e_2), e_2) = xp_0$.

Следовательно, на выходе d_2 всегда 0 и $S(F, F) = h$.

Докажем теперь, что ограниченно-детерминированных решений нет. Для этого достаточно доказать, что решение обязано вести себя как функция F, то есть быть неограниченной памятью, что невозможно для о.-д. функции.

Утверждение 3. *Если* $S(X,Y)=h$, *то*

$$\forall i\ 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{fst}(x_0) = |xp_0| \quad xp_1(i) = y_1(i),\ xp_2(i) = y_2(i).$$

Доказательство. Доказывать будем индукцией по i.

$i=1$. Предположим, что при некотором входном слове y_1 для X $xp_1(1) \neq y_1(1)$. Тогда найдется такой вход для схемы S, при котором на вход X по-прежнему будет подаваться тот же y_1, но при этом $e_1=0$. В этом случае $\mathrm{sym}(xp_1, e_1) = xp_1(1)$ и $y_1(1) = \mathrm{add}(xp_0, f_1, e_1)(1) = f_1$. Выходит, что не выполняется второе условие для автомата d_2: $\mathrm{sym}(xp_1, e_1) \neq f_1$. Противоречие. Значит, $xp_1(1) = y_1(1)$. Аналогично доказывается $xp_2(1) = y_2(1)$.

Пусть утверждение индукции доказано для $i = n-1 < \mathrm{fst}(x_0)$. Докажем его для $i = n \leqslant \mathrm{fst}(x_0)$. Предположим, что при некотором входном слове y_1 для X и y_2 для Y $xp_1(n) \neq y_1(n)$. Тогда найдется такой вход для схемы S, при котором на вход X по-прежнему будет подаваться тот же y_1, но при этом $e_1 = 0$ и $e_2 = 1$. В этом случае $y_1(n) = (\mathrm{add}(xp_0, f_1, e_1)222\ldots)(n) = xp_0(n-1)$. По предположению индукции $xp_2(n-1) = y_2(n-1)$.

$y_2(n-1) = (\mathrm{add}(xp_0, f_2, e_2)222\ldots)(n-1) = xp_0(n-1)$. Выходит, что $xp_1(n) \neq xp_2(n-1)$. В то же время по 4-му свойству автомата d_2 имеем $\mathrm{del}(xp_1, e_1)(n-1) = \mathrm{del}(xp_2, e_2)(n-1)$, что при данных e_1 и e_2 означает, что $xp_1(n) = xp_2(n-1)$. Противоречие. Аналогично рассматривается предположение $xp_2(n) \neq y_2(n)$. Утверждение доказано.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

[3] Лялин И. В. О решении автоматных уравнений // Дискретная математика. Т. 16, вып. 2. 2004.