Об отношении сложностей условного и безусловного установочного экспериментов

А. Е. Кирнасов

В статье рассматривается задача о соотношении длин условного и безусловного установочного экспериментов для автоматов. Получен порядок для максимального значения отношения длин безусловного и условного установочного экспериментов для автоматов с n состояниями при $n \to \infty$, а также получен порядок для значения отношения длин безусловного и условного установочного экспериментов для почти всех автоматов с n состояниями при $n \to \infty$.

1. Введение

Пусть дан автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$. Простым условным установочным экспериментом для автомата $\mathfrak{A}$ называется ориентированное от корня дерево, вершинам которого приписаны подмножества множества Q и слова входного алфавита, а ребрам приписаны слова в выходном алфавите автомата, причем таким образом, что корню приписано все множество состояний, а листьям одноэлементные подмножества, и для каждой неконцевой вершины v дерева выполняется следующее условие:

если α_v — слово, приписанное вершине v, то

1) для каждой вершины $q \in Q_v$, если $\beta_q = \overline{\psi}(q, \alpha_v)$, то найдется ребро $e = (vw)$, выходящее из вершины v и оканчивающееся в вершине w такое, что $\beta_q = \beta_e$ и $\overline{\varphi}(q, \alpha_v) \in Q_w$, где Q_v и Q_w — подмножества состояний, приписанные вершинам v и w соответственно, β_e — слово, приписанное ребру e;

2) если $e = (vw)$ — ребро, выходящее из вершины v и оканчивающееся в вершине w, то $Q_w \neq \varnothing$ и для каждого состояния $q' \in Q_w$ существует состояние $q \in Q_v$ такое, что $\overline{\varphi}(q, \alpha_v) = q'$ [1].

Пусть E — простой условный установочный эксперимент. Максимальная из сумм длин слов, приписанных вершинам ветвей описанного дерева, представляющего эксперимент E, ведущих от корня к листу, называется длиной эксперимента. Длину эксперимента E обозначим $l(E)$. Минимальную из длин экспериментов для автомата $\mathfrak{A}$ обозначим $l(\mathfrak{A})$. Если для автомата не существует простого условного установочного эксперимента, то полагаем $l(\mathfrak{A}) = 0$. Известно [1], что для приведенных автоматов такой эксперимент существует всегда.

Простым безусловным установочным экспериментом для автомата $\mathfrak{A}$ называется слово $\alpha \in A^*$, такое, что для любых двух состояний автомата $q_1, q_2 \in Q$ выполнено: если $\overline{\psi}(q_1, \alpha) = \overline{\psi}(q_2, \alpha)$, то $\overline{\varphi}(q_1, \alpha) = \overline{\varphi}(q_2, \alpha)$. Слово α называется установочным для $\mathfrak{A}$. Кратчайшую из длин установочных слов для автомата $\mathfrak{A}$ обозначим $l_u(\mathfrak{A})$. Если автомат $\mathfrak{A}$ не имеет ни одной установочной последовательности, то полагаем $l_u(\mathfrak{A}) = 0$. Известно [2], что если автомат приведен, то он имеет по крайней мере одну установочную последовательность.

Очевидно, что длина кратчайшего безусловного эксперимента для любого автомата всегда больше кратчайшей длины условного эксперимента для того же автомата. В статье ставится задача о нахождении оценок для максимально возможного отношения длины кратчайшего безусловного эксперимента к длине кратчайшего условного эксперимента, а также рассматривается задача о нахождении указанного отношения для почти всех автоматов при фиксации мощностей входного и выходного алфавитов и стремлении мощности множества состояний автомата к бесконечности. В обоих случаях получен порядок указанного отношения.

2. Основные определения и формулировка результатов

Рассмотрим класс автоматов $K_{m,n,k}$ — класс приведенных автоматов с m входами, n состояниями и k выходами. Через $K^0_{m,n,k}$ обозначим класс всех автоматов с m входами, n состояниями и k выходами. Также рассмотрим класс K_n — класс приведенных автоматов с n состояниями.

Пусть фиксирован автомат $\mathfrak{A}$. Пусть $l(\mathfrak{A})$ — длина кратчайшего условного эксперимента для автомата $\mathfrak{A}$, а $l_u(\mathfrak{A})$ — длина кратчайшего безусловного эксперимента для автомата $\mathfrak{A}$. Обозначим $\sigma(\mathfrak{A}) = \frac{l_u(\mathfrak{A})}{l(\mathfrak{A})}$.

Обозначим далее $\sigma(n) = \max\limits_{\mathfrak{A} \in K_n} \sigma(\mathfrak{A})$.

В статье доказываются следующие две теоремы:

Теорема 1. *Имеет место* $\frac{n}{4} \leqslant \sigma(n) \leqslant n$.

Теорема 2. *Если* $m \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ *фиксированы и* $n \to \infty$, *то для любой константы* $C > 15$ *для почти всех автоматов* $\mathfrak{A}$ *из* $K_{m,n,k}$ *выполнено* $\sigma(\mathfrak{A}) \leqslant C$.

3. Доказательство теоремы 1

Начнем с верхней оценки. Рассмотрим автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ из K_n и кратчайший условный установочный эксперимент E для этого автомата длины l_0. Найдем слово α во входном алфавите автомата $\mathfrak{A}$ длины не более $l_0 n$, являющееся установочным словом для автомата $\mathfrak{A}$. Это, очевидно, позволит доказать верхнюю оценку теоремы 1.

Для этого заметим предварительно такой факт. Назовем дерево E_S условным экспериментом для подмножества S множества состояний Q автомата $\mathfrak{A}$, если оно обладает всеми свойствами установочного эксперимента для автомата $\mathfrak{A}$ за исключением того, что корню дерева E_S приписано множество S. Нетрудно понять, что из каждого эксперимента E автомата $\mathfrak{A}$ отбрасыванием некоторых ветвей всегда можно получить эксперимент E_S для любого подмножества S состояний автомата $\mathfrak{A}$.

Указанное установочное слово α будем строить, последовательно применяя следующий алгоритм $\mathfrak{I}$. Алгоритм $\mathfrak{I}$ использует вспомогательное множество состояний S_i на каждом шаге, причем $S_0 = Q$. На i-ом шаге рассмотрим дерево E_{S_i}, полученное, как указывалось выше, отбрасыванием некоторых ветвей эксперимента E автомата $\mathfrak{A}$. Рассмотрим произвольный лист z дерева E_{S_i}. Пусть этому листу приписано состояние q_z. Рассмотрим произвольную ветвь, ведущую от корня к листу z, и составим конкатенацию слов, приписанных вершинам на этом пути. Полученное слово обозначим α_i. Очевидно, длина этого слова не превосходит l_0. Образуем теперь множество S_{i+1} следующим образом: $S_{i+1} = \{q \in Q | \exists q' \in S : \overline{\varphi}(q', \alpha) = q\} \setminus \{q_z^i\}$. Заметим, что, согласно определению установочного эксперимента для множества состояний S, всегда найдется состояние q_z' такое, что $\overline{\varphi}(q_z', \alpha) = q_z^i$, отсюда следует, что $|S_i| - |S_{i+1}| \geqslant 1$. Так как $|S_0| = n$, то не более чем за n шагов мы придем к множеству S_j с $|S_j| = 1$. На этом закончим наш алгоритм и образуем конкатенацию всех слов α_i, полученных на различных шагах алгоритма. Полученное слово назовем α. Его длина, очевидно, не превосходит $l_0 n$. Докажем, что оно является установочным для автомата $\mathfrak{A}$.

Обозначим α_i' конкатенацию первых i слов α_i. Докажем по индукции, что, проанализировав реакцию автомата на слово α_i, можно будет однозначно указать состояние, в которое перешел автомат, либо утверждать, что автомат находится в одном из состояний множества S_{i+1}.

Рассмотрим сразу шаг индукции, поскольку в данном случае база индукции проверяется также, как и шаг. Предположим, что по реакции на слово α_i' мы либо однозначно указали состояние, в которое перешел автомат и в таком случае, очевидно, слово α_{i+1}' будет обладать тем же свойством, либо мы смогли утверждать, что текущим состоянием автомата является одно из состояний множества S_{i+1}. В последнем случае, согласно определению слова α_{i+1}, по реакции на слово α_{i+1} можно будет однозначно судить о том, перешел ли автомат в состояние q_z^{i+1}, либо же автомат перешел в одно из состояний множества S_{i+2}. Что и требовалось.

Очевидно, теперь, что слово α является установочным для автомата $\mathfrak{A}$, что заканчивает доказательство верхней оценки теоремы 1.

Перейдем к нижней оценке. Рассмотрим случай четного n. Случай нечетного n рассматривается аналогично.

Пусть $n = 2k$. Рассмотрим следующий автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$. $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Функции φ и ψ зададим следующим образом:

$$\varphi(q_i, a_j) = q_i \text{ при всех } i, j;$$
$$\begin{cases} \psi(q_i, a_0) = b_j, & \text{если } i = 2j \text{ или } i = 2j-1, \\ \psi(q_i, a_s) = b_1, & \text{если } i = 2s, \\ \psi(q_i, a_s) = b_2, & \text{если } i = 2s-1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для автомата $\mathfrak{A}$ имеем $l(\mathfrak{A}) = 2$, $l_u(\mathfrak{A}) = k+1$, то есть $\sigma(\mathfrak{A}) \geqslant \frac{k}{2} = \frac{n}{4}$, что и требовалось. Это заканчивает доказательство теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2

Введем понятие канонического приведенного условного установочного эксперимента.

Пусть дан автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$. Пусть $|B| = k$. Ориентированное от корня полное k-арное дерево, вершинам которого сопоставлены символы из автомата A, а ребрам — символы из автомата B, назовем каноническим приведенным условным установочным экспериментом для автомата $\mathfrak{A}$, если существует такое отображение $\tau : V(E) \to 2^E$, что пара (E, τ) является установочным экспериментом для автомата $\mathfrak{A}$. Множество всех деревьев указанного вида для входного и выходного алфавитов мощностей m и k соответственно мы обозначим $D_{m,k}$. Будем называть элементы множества $D_{m,k}$ приведенными каноническими экспериментами. Высоту дерева E будем называть длиной канонического приведенного условного установочного эксперимента.

Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы:

Лемма 1. *Если автомат $\mathfrak{A}$ имеет условный установочный эксперимент E длины, не превосходящей l, то существует канонический приведенный эксперимент для автомата $\mathfrak{A}$ длины, не большей l.*

Очевидно, что число деревьев из множества $D_{m,n}$ высоты, не большей l, не превосходит m^{k^l}. Зафиксируем некоторую константу $C < \frac{1}{3}$. Рассмотрим произвольное дерево E из $D_{m,k}$ высоты, не большей $l_0 = C \log_k n$. Мы докажем следующее утверждение A.

Утверждение *A*. *Вероятность того, что для случайно выбранного автомата* $\mathfrak{A}$ *из класса* $K^0_{m,n,k}$ *дерево* E *является каноническим приведенным экспериментом для автомата* $\mathfrak{A}$*, не превосходит* $\frac{1}{m^{n^C}}\alpha(n)$*, где* $\alpha(n)\to 0$*, когда* $n\to\infty$*.*

Отсюда и из леммы 1 следует, что для почти всех автоматов $\mathfrak{A}$ из класса $K_{m,n,k}$ $l(\mathfrak{A})\geqslant C\log_k n$. С учетом результата Коршунова [3] о том, что для почти всех автоматов $\mathfrak{A}$ из $K_{m,n,k}$ $l_u(\mathfrak{A})\leqslant 5\log_k n$ и его же результата [4] о том, что при $m\geqslant 3$, $k\geqslant 2$ почти все автоматы являются приведенными при $n\to\infty$, а при $m=2$, $p\geqslant 2$ и $n\to\infty$ доля приведенных автоматов стремится к некоторой, зависящей только от p константе, получаем утверждение теоремы 2.

С каждым каноническим приведенным экспериментом E из $D_{m,k}$ можно связать множество вход-выходных слов $W(E)$ следующим образом. Рассмотрим произвольную ветвь $\alpha=(a_1,e_1,a_2,e_2,\dots,a_r,e_r)$ дерева E, где a_i — вершины пути, e_j — ребра. Ветви α поставим в соответствие пару $r(\alpha)=(v(\alpha),w(\alpha))$, где $v(\alpha)$ — входное слово, составленное из символов входного алфавита, соответствующих вершинам a_i и $w(\alpha)$ — выходное слово, составленное из символов выходного алфавита, соответствующих ребрам e_j. Теперь положим $W(E)=\{r(\alpha)|\alpha$ — ветвь $E\}$.

Из определения приведенного канонического эксперимента легко следует утверждение.

Лемма 2. *Если* E *— канонический приведенный эксперимент автомата* $\mathfrak{A}$*, то для любой пары* q_1,q_2 *состояний* $\mathfrak{A}$ *из соотношений* $(v,w)\in V(E)$*,* $\overline{\psi}(q_1,v)=w$ *и* $\overline{\psi}(q_2,v)=w$ *следует* $\overline{\varphi}(q_1,v)=\overline{\varphi}(q_2,v)$*.*

Перейдем к доказательству утверждения A. Пусть имеется некоторая стохастическая процедура $\Im$, с равной вероятностью порождающая различные автоматы из класса $K_{m,n,k}$. Если мы установим, что вероятность построения некоторого автомата $\mathfrak{A}$, для которого E — приведенный канонический условный установочный эксперимент, с помощью этой процедуры не превосходит $\frac{1}{m^{n^C}}\alpha(n)$, где $\alpha(n)\to 0$, то тем самым мы установим справедливость утверждения A.

Рассмотрим следующую стохастическую процедуру $\Im_0$ построения автоматов из класса $K_{m,n,k}$. Тот факт, что эта процедура с равной вероятностью приводит к построению любого автомата из класса $K_{m,n,k}$, будет непосредственно следовать из построения процедуры.

Зафиксируем множество состояний автомата Q. Рассмотрим произвольное состояние $q_0 \in Q$. Рассмотрим символ a_0 входного алфавита, приписанный корню дерева Ev_0. Случайно выбираем некоторое состояние q_1 и полагаем $\varphi(q_0, a_0) = q_1$, при этом выбор любого состояния из множества Q считаем равновероятным. Далее случайным образом выбираем некоторый символ b_1 выходного алфавита и полагаем $\psi(q_0, a_0)$, причем и в этом случае выбор любого из символов выходного алфавита считаем равновероятным. Так как по определению канонического приведенного эксперимента E является полным k-арным деревом, то найдется ребро e_0, выходящее из корня e, помеченное символом b_1. Рассмотрим теперь вершину v_1 дерева E, в которое ведет ребро e. Рассмотрим сначала случай, когда $q_1 \neq q_0$. В этом случае рассматриваем входной символ a_1, приписанный вершине v_1 и случайным образом выбираем состояние q_2 и полагаем $\varphi(q_1, a_1) = q_2$. При этом опять выбор состояния q_2 считается равновероятным. Далее случайным и равновероятным образом выбираем символ b_2 из выходного алфавита и полагаем $\psi(q_1, a_1) = b_2$. В случае, если $q_1 = q_0$, имеем два подслучая:

1) $a_1 \neq a_0$,

2) $a_1 = a_0$.

В первом подслучае стохастическая процедура работает также, как и в случае, когда $q_0 \neq q_1$. Во втором подслучае полагаем $q_2 = q_0$ и переходим к следующему шагу процедуры. Далее повторяем указанные действия до тех пор, пока очередная вершина v_i не окажется листом дерева E. На этом заканчивается первый этап процедуры $\Im_0$. Зафиксируем вершину $q' = q_i$. Слово $a_0 a_1 \ldots a_{i-1}$ обозначим α. Соответствующее выходное слово $b_1, b_2, \ldots, b_i$ обозначим β. Очевидно, длина слова α не превосходит $l_0 = C \log_k n$. Обозначим $l(\alpha) = l_1$.

Рассмотрим множество $Q' = Q \setminus \{q_j \mid 0 \leqslant j \leqslant i\}$. Рассмотрим в множестве Q' произвольный набор непересекающихся подмножеств S_j $1 \leqslant j \leqslant r$ мощности k_0, где k_0 и r — некоторые пока не фиксированные параметры, которые мы подберем позже. Пока потребуем только, чтобы выполнялось неравенство $k_0 r \leqslant |Q'|$.

Вершины множества S_j занумеруем следующим образом: $S_j = \{q_{j,t} \,|1 \leqslant t \leqslant k\}$. Рассмотрим множество S_1 и вершину $q_{1,1}$. Продолжаем процедуру $\Im_0$ следующим образом. Случайным и равновероятным образом выбираем состояние $q^1_{1,1}$ и полагаем $\varphi(q_{1,1}, a_0) = q^1_{1,1}$. Далее случайным и равновероятным образом выбираем символ b из выходного алфавита и полагаем $\psi(q^1_{1,1}) = b$. Далее переходим к вершине $q^1_{1,1}$ и повторяем указанные действия с заменой символа a_0 на a_1. Может оказаться, что $q^1_{1,1} = q_{1,1}$ и $a_0 = a_1$. В этом случае полагаем $q^2_{1,1} = q_{1,1}$ и продолжаем указанный процесс i раз. Далее переходим к $q_{1,2}$ и так далее. Наконец, по окончании работы с множеством S_1 переходим к множеству S_2 и так далее. Этим заканчивается второй этап процедуры $\Im_0$. Завершается процедура $\Im_0$ случайным и равновероятным доопределением функций φ и ψ.

Так же, как и в разделе 2, будем называть вершинным путем, ведущим из состояния q автомата $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ по слову $\alpha = a_0, a_1 \ldots a_w$, следующий упорядоченный набор состояний $\pi(q, \alpha) = (q_0, q_1, \ldots q_{w+1})$, где $q_0 = q$, $q_1 = \varphi(q_0, a_0), \ldots, q_{w+1} = \varphi(q_w, a_w)$.

Введем в рассмотрение следующее семейство событий Y_{j_1, j_2, j_d}, $j_v \neq j_{v'}$, если $v \neq v'$, $1 \leqslant j_v \leqslant r$, $d \leqslant r$. Событие $Y_{j_1, j_2, \ldots, j_d}$ состоит в том, что по завершении первых двух шагов процедуры $\Im_0$ выполняются следующие условия:
1) при v $1 \leqslant v \leqslant d$ вершинные пути $\pi(q_{j_v, m_1}, \alpha)$ и $\pi(q_{j_v, m_2}, \alpha)$ при разных m_1 и m_2 состоят из попарно различных вершин и могут пересекаться только по концевым вершинам;
2) если $z \neq j_v$ для некоторого v такого, что $1 \leqslant v \leqslant d$, то либо для некоторых m_1, m_2 вершинные пути $\pi(q_{z, m_1}, \alpha)$ и $\pi(q_{z, m_2}, \alpha)$ при разных m_1 и m_2 могут содержать повторения, либо пересекаться по неконцевым вершинам, либо некоторый путь $\pi(q_{z,m}, \alpha)$ пересекается с некоторым вершинным путем $\pi(q_{z', m'}, \alpha)$ при $z \neq z'$;
3) для любого v_1 такого, что $1 \leqslant v_1 \leqslant d$, для любого v_2 такого, что $1 \leqslant v_2 \leqslant d$, вершинные пути $\pi(q_{j_{v_1}, m_1}, \alpha)$ и $\pi(q_{j_{v_2}, m_2}, \alpha)$ при всевозможных допустимых m_1 и m_2 могут пересекаться только по концевым вершинам.

Очевидно, что события $Y_{j_1, j_2, \ldots, j_d}$ $j_v \neq j_{v'}$, если $v \neq v'$, $1 \leqslant j_v \leqslant r$, $d \leqslant r$ образуют полную систему событий, так как по окончании двух шагов процедуры $\Im_0$ найдется единственный, возможно пустой, набор $(j_1, \ldots j_d)$ такой, для которого будут одновременно выполняться три вышеперечисленных требования.

Обозначим вероятность события $Y_{j_1,j_2,\ldots,j_d}$ через $P_{j_1,j_2,\ldots,j_d}$. Установим справедливость следующей леммы.

Лемма 3. $P_{j_1,j_2,\ldots,j_d} \leqslant \frac{(k_0^2 r l_0)^{r-d}}{n^{r-d}}$ *для любых допустимых наборов* $(j_1, \ldots, j_d)$.

Доказательство. При $j \in E_r \setminus \{j_1, j_2, \ldots j_d\}$ обозначим $Y^j_{j_1,j_2,\ldots j_d}$ — событие, заключающееся в том, что после выполнения двух шагов процедуры $\Im_0$, для набора $(j_1, j_2, \ldots j_d)$ выполняются свойства 1)–3), причем для $z = j$ выполнено свойство 2). Ясно, что события $Y^j_{j_1,j_2,\ldots j_d}$ при разных j независимы, поэтому, если обозначить через $P^j_{j_1,j_2,\ldots j_d}$ вероятность события $Y^j_{j_1,j_2,\ldots j_d}$, будем иметь $P_{j_1,j_2,\ldots j_d} = \prod\limits_{j \in E_r \setminus \{j_1,j_2,\ldots j_d\}} P^j_{j_1,j_2,\ldots j_d}$. Оценим $P^j_{j_1,j_2,\ldots j_d}$. Выполнимость события $Y^j_{j_1,j_2,\ldots j_d}$ означает существование такого s, $s \in E_k$, что на втором шаге процедуры $\Im_0$ в процессе построения пути из $q_{j,s}$ одно из состояний $q^l_{j,s}$ при $l \leqslant l_1$ совпало с одним из уже выбранных на предыдущих шагах процедуры $\Im_0$состоянием. Очевидно, что вероятность совпадения $q^l_{j,s}$ с одним из уже выбранных ранее состояний, не превосходит $\frac{k_0 r}{n}$ для всех $s \in E_r$, для всех $l \in E_{l_1}$. Значит $P^j_{j_1,j_2,\ldots j_d} \leqslant \frac{k_0^2 l_0 r}{n}$, следовательно имеем

$$P_{j_1,j_2,\ldots j_d} = \prod_{j \in E_r \setminus \{j_1,j_2,\ldots j_d\}} P^j_{j_1,j_2,\ldots j_d} \leqslant \frac{(k_0^2 r l_1)^{r-d}}{n^{r-d}} \leqslant \frac{(k_0^2 r l_0)^{r-d}}{n^{r-d}}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь условную вероятность $p_{j_1,\ldots j_d}$ того, что результатом работы процедуры $\Im_0$ будет автомат, для которого E является приведенным каноническим экспериментом при условии выполнимости события $Y_{j_1,\ldots,j_d}$. Рассмотрим произвольное множество S_{j_v} и рассмотрим все номера $m_{u_1}, m_{u_2}, \ldots m_{u_t}$ такие, что $\overline{\psi}(q_{j_v, m_{u_w}}, \alpha) = \beta$ $\forall w 1 \leqslant w \leqslant t$. Множество указанных номеров обозначим $\widetilde{S_{j_v}}$. Очевидно, что для того, чтобы для получившегося на выходе процедуры $\Im_0$

автомата дерево E было бы каноническим приведенным экспериментом при условии выполнимости события $Y_{j_1,\ldots,j_d}$ необходимо, чтобы при h из $\widetilde{S_{j_v}}$ выполнялось следующее условие $\overline{\varphi}(q_{j_v,h},\alpha)=q'$. Вероятность такого события обозначим $p^{j_v}_{j_1,\ldots,j_d}$. Очевидно, что при разных v такие события независимы, поэтому $p_{j_1,\ldots j_d}\leqslant\prod\limits_{1\leqslant t\leqslant d}p^{j_t}_{j_q,\ldots,j_d}$.

Оценим теперь $p^{j_t}_{j_1,\ldots,j_d}$. Очевидно, что эта вероятность не превосходит суммы вероятностей того, что при выполнении события $Y_{j_1,\ldots,j_d}$ множество $\widetilde{S_{j_t}}=\varnothing$, и вероятности того, что при выполнении события $Y_{j_1,\ldots,j_d}$ и непустоты множества $\widetilde{S_{j_t}}$ для всех $h\in\widetilde{S_{j_t}}$ выполняется условие $\overline{\varphi(q_{j_t,h})}=q'$. Для оценки последней вероятности p_1, заметим, что условие $\overline{\varphi}(q_{j_v,h},\alpha)=q'$ равносильно тому, что в процессе случайного построения вершинного пути из состояния $q_{j_v,h}$ с помощью процедуры $\Im_0$, последняя вершина пути $q^{l_1+1}_{j_v,h}$ совпала с q'. Отсюда вытекает, что, если обозначить $|\widetilde{S_{j_t}}|=h_t$, то для вероятности p_1 имеем $p_1\leqslant\frac{1}{n^{h_t}}\leqslant\frac{1}{n}$. Оценим первую вероятность. Так как вершинные пути $\pi(q_{j_t,m},\alpha)$ состоят из попарно разных вершин и могут пересекаться только по концевым вершинам, то можно считать, что распределение вероятности того, что $\overline{\psi}(q_{j_t,m},\alpha)=\beta$ при разных m $1\leqslant m\leqslant k_0$ происходит по схеме Бернулли с вероятностью успеха $p_0=\frac{1}{k^{l_0}}$, отсюда вытекает, что вероятность пустоты множества $\widetilde{S_{j_t}}$ не превосходит $\dfrac{e^2k_0}{2^{k_0p_0}}$. Наложим теперь следующее ограничение на k_0

$$\frac{e^2k_0}{2^{k_0p_0}}\lesssim\frac{1}{n}. \tag{1}$$

Теперь в предположении, что выполняется (1), получаем $p^{j_t}_{j_1,\ldots,j_d}\lesssim\frac{2}{n}$. Тогда для вероятности $p_{j_1,\ldots,j_t}$ получаем $p_{j_1,\ldots,j_t}\lesssim\frac{2^dk_0^d}{n^d}$. Теперь, используя формулу полной вероятности, получаем для вероятности P получения на выходе процедуры $\Im_0$ автомата, для которого E является приведенным каноническим экспериментом, следующую формулу

$$P=\sum_{\substack{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_d\leqslant r\\ 0\leqslant d\leqslant r}}P_{j_1,,j_2,\ldots,j_d}p_{j_1,j_2,\ldots,j_d}.$$

Отсюда, используя лемму 3 и предполагая, что (1) выполнено, получаем

$$P \lesssim 4^r \frac{k_0^{2r}(4Cr\log_k n)^r}{n^r}.$$

Наложим теперь второе ограничение на k_0, r

$$\frac{n^r}{(Ck_0^2 r\log_k n)^r} \gtrsim m^{k^{l_0}} \log_2 n. \qquad (2)$$

Очевидно, что, подобрав k_0 и r таким образом, чтобы выполнялись (1) и (2), мы тем самым сможем гарантировать справедливость утверждения A, а вместе с ним и теоремы 2.

Нетрудно убедиться в том, что для этого достаточно положить $r = n^C$, $k_0 = n^{\frac{1}{3}}$. Теорема 2 доказана.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность В. Б. Кудрявцеву и А. С. Подколзину за поддержку и помощь в работе.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Hibbard T. H. Least upper bounds on minimal terminal state experiments for two classes of sequential machines // J. Assoc. Comp. Mach. 8, №4 (1961). 601–612. [Русский перевод см. Кибернитический сборник (новая серия). Вып. 2 (1966). 7–23.]

[3] Коршунов А. Д. О верхней оценке длин кратчайших однородных экспериментов по распознаванию заключительного состояния автомата для почти всех автоматов // ДАН СССР. 184. № 1 (1969). 28–29.

[4] Коршунов А. Д. Об асимптотических оценках числа приведенных конечных автоматов // Дискретный анализ. Вып. 6 (1966). 35–50.