Об одной алгебре булевых векторов с покомпонентными операциями

К. А. Казак

Введение

Рассматриваемая в данной работе проблема возникла при исследовании формальных моделей изображений и процессов их обработки. Имеют место различные подходы к таким исследованиям: от построений частных моделей для каждой практической задачи до более глубоких теоретических исследований чисто математических моделей. В частности, в работе [3] рассматривались растровые двухцветные (черно-белые) изображения как элементы универсальной алгебры с поточечными логическими операциями типа пересечения, объединения и дополнения. В настоящей работе рассматривается аналогичная алгебраическая структура на множестве многомерных булевых векторов. Заметим, что переход от растровых изображений к многомерным векторам не сузил задачу, рассматриваемую в работе [3], так как любое растровое изображение можно задать с помощью некоторого вектора. Такой переход позволил получить новые результаты в исследуемой проблеме. В частности, были получены исчерпывающие ответы на вопросы о возможности получения требуемого изображения из заданных при помощи операций данной алгебраической структуры, а также о нахождении базисного набора изображений для заданного класса. Отметим, что эти вопросы представляют собой частный случай проблем полноты и выразимости [2] для данной универсальной алгебры.

Перейдем к точному описанию изучаемой алгебраической структуры. Рассмотрим множество булевых векторов $E_2^n = \{(a^1, \ldots, a^n) \mid a^i \in E_2\}$, где $n \geqslant 2$, $E_2 = \{0, 1\}$. Определим на множестве E_2^n операции $\Omega = \{\widehat{\&}, \widehat{\vee}, \widehat{\neg}\}$ — покомпонентные аналоги конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Пусть векторы $a, b \in E_2^n$, тогда

$$\begin{aligned} a \mathbin{\widehat{\&}} b &= (a^1 \& b^1, \ldots, a^n \& b^n), \\ a \mathbin{\widehat{\vee}} b &= (a^1 \vee b^1, \ldots, a^n \vee b^n), \\ \widehat{\neg} a &= (\neg a^1, \ldots, \neg a^n). \end{aligned}$$

В соответствии с работой [3] множество E_2^n с операциями Ω будем называть алгеброй $\langle E_2^n, \Omega \rangle$.

Замыкание системы векторов $\{f_1, \ldots, f_p\} \subseteq E_2^n$ будем обозначать через $[f_1, \ldots, f_p]_\Omega$. Отметим, что полнота в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ данной системы означает, что $[f_1, \ldots, f_p]_\Omega = E_2^n$. Очевидно, что множество $[f_1, \ldots, f_p]_\Omega$ является подалгеброй алгебры $\langle E_2^n, \Omega \rangle$.

Примером полной в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ системы векторов является множество $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset E_2^n$, где $e_i^j = 1$, если $j = i$, и $e_i^j = 0$ в противном случае. Нетрудно заметить, что любой вектор $f \in E_2^n$ выражается через данную систему:

$$f = \widehat{\bigvee_{i\,:\, f^i = 1}} e_i,$$

если f — ненулевой вектор, нулевой вектор получается отрицанием единичного.

1. Полнота системы векторов. Базисы

Рассмотрим систему векторов $\{f_1, \ldots, f_p\} \subseteq E_2^n$. Построим матрицу $\mathcal{F}_{f_1, \ldots, f_p}$ размера $n \times p$, столбцами которой являются векторы данной системы:

$$\mathcal{F}_{f_1, \ldots, f_p} = \begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_p^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^n & \cdots & f_p^n \end{pmatrix}.$$

Определение. *Весом* системы векторов $\{f_1, \ldots, f_p\}$ называется количество классов эквивалентности в строках матрицы $\mathcal{F}_{f_1, \ldots, f_p}$ по отношению равенства строк матрицы. Вес данной системы обозначим через $\omega(f_1, \ldots, f_p)$.

Отметим, что $\omega(f_1, \ldots, f_p) = n$ тогда и только тогда, когда в матрице $\mathcal{F}_{f_1, \ldots, f_p}$ все строки различны.

Теорема 1 (Критерий полноты).

$$[f_1, \dots, f_p]_\Omega = E_2^n \quad \Longleftrightarrow \quad \omega(f_1, \dots, f_p) = n.$$

Доказательство. *Необходимость.* Докажем от противного. Имеем, что $[f_1, \dots, f_p]_\Omega = E_2^n$. Предположим, что $\omega(f_1, \dots, f_p) \neq n$, тогда в матрице $\mathcal{F}_{f_1,\dots,f_p}$ найдутся две одинаковые строки. Пусть в матрице $\mathcal{F}_{f_1,\dots,f_p}$ совпадают i-ая и j-ая строки, тогда $f_l^i = f_l^j$ для каждого $l = 1, \dots, p$. В силу того, что операции Ω действуют покомпонентно, для любого вектора $g \in [f_1, \dots, f_p]_\Omega$ имеем, что $g^i = g^j$. То есть $[f_1, \dots, f_p]_\Omega \neq E_2^n$. Получили противоречие.

Достаточность. По условию теоремы имеем, что $\omega(f_1, \dots, f_p) = n$. Для доказательства полноты данной системы, достаточно доказать, что все векторы e_k, где $k = 1, \dots, n$, содержатся в множестве $[f_1, \dots, f_p]_\Omega$. Покажем, что каждый вектор e_k можно выразить через систему векторов $\{f_1, \dots, f_p\}$ следующим образом:

$$e_k = \widehat{\underset{i=1}{\overset{p}{\&}}} (f_i)^{f_i^k}, \tag{1}$$

где $(f_i)^{f_i^k} = f_i$, если $f_i^k = 1$, и $(f_i)^{f_i^k} = \widehat{\neg} f_i$, если $f_i^k = 0$. Действительно, вычислим значение выражения (1) в j-ой компоненте:

$$(f_1^j)^{f_1^k} \;\&\; \dots \;\&\; (f_p^j)^{f_p^k},$$

здесь конъюнкция и отрицание понимаются в обычном смысле. Полученное выражение принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $f_i^j = f_i^k$ для каждого $i = 1, \dots, p$ (см. [1]). То есть когда j-ая и k-ая строки в матрице $\mathcal{F}_{f_1,\dots,f_p}$ совпадают. В силу того, что в матрице $\mathcal{F}_{f_1,\dots,f_p}$ все строки различны, такое возможно тогда и только тогда, когда $j = k$. Таким образом, k-ая компонента выражения (1) равна 1, а остальные компоненты равны 0, то есть выражение (1) равно вектору e_k. Теорема доказана.

Определение. Система векторов $B \subset E_2^n$ называется базисом в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$, если

1) $[B]_\Omega = E_2^n$,
2) $\forall B' \subsetneq B \quad [B']_\Omega \neq E_2^n$.

Очевидно, что в силу конечности множества E_2^n алгебра $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ всегда имеет базис.

Отметим, что выше был приведен пример полной в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ системы векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$, которая не является базисом, так как для любого $i = 1, \ldots, n$ имеем $\omega(\{e_1, \ldots, e_n\} \backslash \{e_i\}) = n$, то есть каждая система векторов $\{e_1, \ldots, e_n\} \backslash \{e_i\}$ полна в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$. Аналогичным образом нетрудно проверить, что системы векторов вида $\{e_1, \ldots, e_n\} \backslash \{e_i\}$ являются базисами в алгебре $\langle E_2^n, \Omega\rangle$.

Теорема 2 (О спектре мощности базисов).

1) *Если множество $B \subset E_2^n$ является базисом в алгебре $\langle E_2^n, \Omega\rangle$, то*
$$\lceil \log_2 n \rceil \leqslant |B| \leqslant n - 1.$$
2) *Для любого целого k из отрезка $\big[\lceil \log_2 n\rceil, n-1\big]$ существует базис $B \subset E_2^n$ в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ такой, что $|B| = k$.*

Доказательство. 1) Докажем сначала нижнюю оценку. В силу критерия полноты в матрице $\mathcal{F}_B$ все строки должны быть различны. Строки матрицы $\mathcal{F}_B$ состоят из нулей и единиц и имеют длину $|B|$. Количество всех таких строк равно $2^{|B|}$. Таким образом, так как в матрице $\mathcal{F}_B$ — n строк, то для выполнения критерия полноты необходимо, чтобы выполнялось неравенство $2^{|B|} \geqslant n$, из которого получаем нижнюю оценку.

Замечание. Приведем пример базиса в алгебре $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ с мощностью $\lceil \log_2 n\rceil$. Рассмотрим матрицу, строки которой образуют последовательность чисел $0, 1, \ldots, n-1$ в двоичной системе счисления. Обозначим данную матрицу через $\mathcal{F}^n_{\min}$. Количество столбцов в этой матрице равно количеству двоичных разрядов в числе $n-1$, то есть равно $\lceil \log_2 n\rceil$. Столбцы матрицы $\mathcal{F}^n_{\min}$ образуют полную в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ систему векторов, так как все строки матрицы различны. В силу того, что мощность данной системы векторов совпадает с нижней оценкой для мощностей базисов в алгебре $\langle E_2^n, \Omega\rangle$, данная система векторов является базисом минимальной мощности в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$.

Доказательство верхней оценки будем вести от противного. Предположим, что существует базис B такой, что $|B| \geqslant n$. Рассмотрим матрицу $\mathcal{F}_B$, соответствующую этому базису. Так как B — базис, то все строки в матрице $\mathcal{F}_B$ различны и, при удалении любого столбца из матрицы $\mathcal{F}_B$, в полученной матрице найдутся две одинаковые строки. Для каждого столбца выберем ровно одну пару строк, которые совпадают при отбрасывании данного столбца. Рассмотрим граф $G_B = (V_B, E_B)$, где множество вершин V_B соответствует строкам матрицы $\mathcal{F}_B$, а множество ребер E_B — множеству выбранных пар строк. В силу того, что $|V_B| = n$ и $|E_B| = |B| \geqslant n$, в графе G_B существует цикл

$$(v_{i_1}, v_{i_2})\,(v_{i_2}, v_{i_3})\ \ldots\ (v_{i_{k-1}}, v_{i_k})\,(v_{i_k}, v_{i_1}).$$

Ребру (v_{i_1}, v_{i_2}) соответствует пара строк в матрице $\mathcal{F}_B$ с номерами i_1 и i_2, которые отличаются только по некоторой p-ой компоненте, где p — номер столбца, для которого была выбрана данная пара строк. Далее, ребру (v_{i_2}, v_{i_3}) соответствует пара строк с номерами i_2, i_3, которые отличаются только по некоторой q-ой компоненте, где $q \neq p$ в силу того, что для каждого столбца выбирается ровно одна пара строк. То есть p-ые компоненты строк i_2 и i_3 совпадают и, следовательно, строки i_1, i_3 отличаются по p-ой компоненте. Аналогичным образом, перебирая последующие ребра цикла, будем получать, что в каждой паре строк i_1 и i_t, где $t = 2, \ldots, k$, p-ые компоненты различны. В итоге, рассмотрев ребро (v_{i_k}, v_{i_1}), получим, что в паре строк i_1, i_1 p-ые компоненты также различны. Данное противоречие доказывает справедливость верхней оценки.

Замечание. В качестве примера базиса в алгебре $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ с максимальной мощностью можно рассмотреть описанные выше системы векторов вида $\{e_1, \ldots, e_n\} \backslash \{e_i\}$, которые являются базисами в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ с мощностью $n - 1$.

2) Рассмотрим систему векторов $B \subset E_2^n$ с матрицей $\mathcal{F}_B$, где

$$\mathcal{F}_B = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathcal{F}^m_{\min} & & 0 & \\ \hline & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right). \tag{2}$$

Матрица $\mathcal{F}^m_{\min}$, строки которой — двоичные записи чисел $0, 1, \ldots, m-1$, имеет размер $m \times \lceil \log_2 m \rceil$, где $2 \leqslant m \leqslant n$. Следовательно, матрица $\mathcal{F}_B$ имеет размер $n \times \big(\lceil \log_2 m \rceil + n - m\big)$. Нетрудно понять, что все строки в матрице $\mathcal{F}_B$ различны и при удалении любого столбца из матрицы $\mathcal{F}_B$ в полученной матрице найдутся две одинаковые строки:

– если удалить один из первых $\lceil \log_2 m \rceil$ столбцов, то в первых m строках полученной матрицы найдутся две одинаковые строки, так как матрица $\mathcal{F}^m_{\min}$ соответствует базису в алгебре $\langle E_2^m, \Omega\rangle$,
– если удалить один из последних $n-m$ столбцов, то среди последних $n-m$ строк полученной матрицы найдется нулевая строка, совпадающая с первой.

Следовательно, система векторов B, соответствующая матрице $\mathcal{F}_B$, является базисом. При этом $|B| = \lceil \log_2 m \rceil + n - m$.

Таким образом, чтобы доказать теорему, осталось доказать, что для любого целого k из отрезка $\big[\lceil \log_2 n \rceil, n-1\big]$ существует целое число m такое, что $2 \leqslant m \leqslant n$ и

$$\lceil \log_2 m \rceil + n - m = k. \tag{3}$$

Преобразуем данное выражение к виду

$$m - \lceil \log_2 m \rceil = n - k,$$

где $1 \leqslant n-k \leqslant n - \lceil \log_2 n \rceil$. Заметим, что при увеличении m на единицу значение целочисленной функции $m - \lceil \log_2 m \rceil$ не изменится, если m было степенью двойки, и увеличится на единицу в противном случае. Таким образом, когда m пробегает все значения от 2 до n, данная функция не убывает и принимает все целочисленные значения на отрезке $\big[1, n - \lceil \log_2 n \rceil\big]$. То есть для любого значения k, удовлетворяющего условиям теоремы, найдется целое m такое, что $2 \leqslant m \leqslant n$ и имеет место равенство (3). Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства данной теоремы можно извлечь следующий метод построения некоторого базиса любой допустимой мощности в алгебре $\langle E_2^n, \Omega\rangle$:

1) для заданной мощности k из целочисленного уравнения (3) находим параметр m,
2) по параметру m строим матрицу вида (2), которая соответствует искомому базису в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$.

2. Базисы из векторов с ограниченной нормой

Рассмотрим множество $V_n(k) = \{f \in E_2^n : \|f\| \leqslant k\}$, где $k = 1, \ldots, n-1$, $\|f\|$ — норма вектора f, определенная как $\|f\| = \sum_{i=1}^{n} f^i$. Будем рассматривать базисы в алгебре $\langle E_2^n, \Omega\rangle$, принадлежащие множеству $V_n(k)$. Найдем минимальные и максимальные мощности таких базисов. Нетрудно понять, что максимальная мощность равна $n-1$ и достигается на базисах вида $\{e_1, \ldots, e_n\} \backslash \{e_i\} \subset V_n(1) \subset V_n(k)$. Обозначим через $\varkappa_n(k)$ минимальную мощность базисов алгебры $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ из множества $V_n(k)$ и оценим ее.

Замечание. В рассмотренной выше матрице $\mathcal{F}^n_{\min}$, которая соответствует базису в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ минимальной мощности, принадлежащему множеству E_2^n, количество единиц в каждом столбце не превосходит $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Действительно, в каждом столбце количество единиц не превосходит количество нулей и их общее количество в столбце равно n, причем, заметим, что в столбце, соответствующем первому двоичному разряду, количество единиц в точности равно $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Таким образом, соответствующий базис минимальной мощности принадлежит множеству $V_n\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. То есть для оценки величины $\varkappa_n(k)$ имеет смысл рассматривать $k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Для нахождения нижней оценки величины $\varkappa_n(k)$ воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. *Пусть $A \subset E_2^n$ — некоторая система векторов и вектор $g \in E_2^n$, тогда*

$$\omega(A \cup g) \leqslant \omega(A) + \min\bigl(\omega(A)\,, \|g\|, n - \|g\|\bigr). \qquad (4)$$

Доказательство. Данное неравенство вытекает из того, что при добавлении вектора-столбца g к матрице $\mathcal{F}_A$ каждый класс эквивалентных строк в матрице $\mathcal{F}_A$ разбивается не более чем надвое, а каждая единица вектора g разбивает не более одного класса эквивалентных строк и то же самое можно сказать про каждый ноль вектора g.

Будем строить полную в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ систему векторов, поочередно добавляя к некоторой исходной системе векторы из множества $V_n(k)$. Положим в качестве исходной системы векторов систему, состоящую из одного произвольного вектора (кроме единичного и нулевого), принадлежащего множеству $V_n(k)$, тогда вес исходной системы будет равен 2. По неравенству (4), вес строящейся системы будет максимально возрастать при добавлении векторов из $V_n(k)$, если мы будем добавлять векторы нормы k ($k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$), и для этих векторов неравенство (4) будет обращаться в равенство. Таким образом, если возрастание веса строящейся системы векторов будет наибольшим, то для построения полной в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ системы, вес которой равен n, нам потребуется минимальное число векторов. Предположим, что нашлись векторы нормы k, при построении из которых полной системы в соотношении (4) выполняется равенство. Вычислив количество этих векторов, получим оценку снизу для $\varkappa_n(k)$:

$$\lceil \log_2 k \rceil + \left\lceil \frac{n - 2^{\lceil \log_2 k \rceil}}{k} \right\rceil \leqslant \varkappa_n(k).$$

Первое слагаемое равно количеству векторов, которые добавлялись к исходной системе вначале, и при добавлении которых вес строящейся системы не превосходил k, то есть, по неравенству (4), имело место экспоненциальное возрастание веса строящейся системы векторов. Второе слагаемое равно количеству векторов, которые добавлялись к строящейся системе после того, как ее вес превысил k и, соответственно, стал возрастать линейно, пока не достиг значения n.

Для нахождения верхней оценки величины $\varkappa_n(k)$ рассмотрим систему векторов $B^k \subset V_n(k)$ с матрицей $\mathfrak{F}_{B^k}$, где

$$\mathfrak{F}_{B^k} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots\cdots & & 0 \\ \boxed{\widehat{\mathfrak{F}}^{2k}_{\min}} & & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\widehat{\mathfrak{F}}^{2k}_{\min}} & \\ \text{\Large 0} & & & \boxed{\widehat{\mathfrak{F}}^{r}_{\min}} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\widehat{\mathfrak{F}}^{2k}_{\min}$ получена из матрицы $\mathfrak{F}^{2k+1}_{\min}$ удалением первой (нулевой) строки, то есть в $2k$ строках матрицы $\widehat{\mathfrak{F}}^{2k}_{\min}$ записана последовательность чисел $1, \ldots, 2k$ в двоичной системе счисления. Следовательно, количество единиц в каждом столбце матрицы $\widehat{\mathcal{F}}^{2k}_{\min}$ не превосходит k. Число r, где $0 \leqslant r < 2k$, выбирается таким, чтобы число строк в матрице $\mathcal{F}_{B^k}$ было равным n, то есть r равно остатку от деления $n-1$ на $2k$. Если $r = 0$, то матрица $\widehat{\mathcal{F}}^{r}_{\min}$ отсутствует в представлении матрицы $\mathcal{F}_{B^k}$. Таким образом, $B^k \subset V_n(k)$. Нетрудно проверить, что система векторов B^k является базисом (проверяется аналогично тому, как это делалось в пункте 2 доказательства теоремы о спектре мощности базисов). Очевидно, что $\varkappa_n(k) \leqslant |B^k|$. Вычислим мощность базиса B^k.

Количество матриц $\widehat{\mathcal{F}}^{2k}_{\min}$, вошедших в представление матрицы $\mathcal{F}_{B^k}$, равно $\left\lfloor \frac{n-1}{2k} \right\rfloor$. Отсюда вычислим

$$r = 2k \cdot \left\{ \frac{n-1}{2k} \right\}.$$

Количество столбцов в матрице $\widehat{\mathcal{F}}^{2k}_{\min}$ равно

$$\lceil \log_2(2k+1) \rceil = \lceil \log_2(k+1) \rceil + 1.$$

Количество столбцов в матрице $\widehat{\mathcal{F}}^{r}_{\min}$ равно

$$\left\lceil \log_2 \left(2k \left\{ \frac{n-1}{2k} \right\} + 1 \right) \right\rceil.$$

Таким образом, мы вычислили $|B^k|$ и получили верхнюю оценку для величины $\varkappa_n(k)$:

$$\varkappa_n(k) \leqslant |B^k| = \Big(\lceil \log_2(k+1) \rceil + 1 \Big) \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2k} \right\rfloor + \left\lceil \log_2 \left(2k \left\{ \frac{n-1}{2k} \right\} + 1 \right) \right\rceil.$$

Данную оценку можно упростить, положив $r = 2k$. Тогда в представление матрицы $\mathcal{F}_{B^k}$ войдут только $\left\lceil \frac{n-1}{2k} \right\rceil$ матриц $\widehat{\mathcal{F}}^{2k}_{\min}$. Таким образом,

$$\varkappa_n(k) \leqslant \Big(\lceil \log_2(k+1) \rceil + 1 \Big) \cdot \left\lceil \frac{n-1}{2k} \right\rceil.$$

Лемма 2. *Пусть система векторов $A \cup \{f\}$ полна в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$, где $\|f\| < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Тогда существует вектор f', полученный из f заменой некоторого нуля на единицу, то есть $\|f'\| = \|f\| + 1$, такой, что система $A \cup \{f'\}$ является полной.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть при замене в векторе f любого нуля на единицу полученная система векторов $A \cup \{f'\}$ не полна, то есть в матрице $\mathcal{F}_{A\cup\{f'\}}$ есть две одинаковые строки. Очевидно, что совпасть могут только измененная строка с одной из тех, где в векторе-столбце f была единица. Так как $\|f\| < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то в векторе f количество нулей больше количества единиц. Таким образом, найдутся две строки с нулями в векторе-столбце f такие, что при замене этих нулей на единицы данные строки совпадут с одной и той же строкой, в которой в векторе-столбце f была единица. Следовательно, изначально эти строки совпадали, то есть система векторов $A \cup \{f\}$ была не полна. Получили противоречие.

Используя данную лемму, нетрудно показать, что для любого натурального $k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ существует полная в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ система векторов и, следовательно, существует базис в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$, принадлежащие множеству $\overline{V}_n(k) = V_n(k) \setminus V_n(k-1)$. Для этого возьмем произвольную полную систему из векторов множества $V_n(k)$ и, по лемме, норму каждого вектора этой системы увеличим до k, сохранив при этом полноту системы. В свою очередь легко видеть, что для любого $k > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ также существует базис в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ из множества $\overline{V}_n(k)$, который может быть получен отрицанием всех векторов некоторого базиса, принадлежащего множеству $\overline{V}_n(n-k)$.

Обозначим через $\widehat{\varkappa}_n(k)$, где $k = 1, \ldots, n-1$, минимальную мощность базисов, принадлежащих множеству $\overline{V}_n(k)$. Очевидно, что $\widehat{\varkappa}_n(k) = \widehat{\varkappa}_n(n-k)$.

Утверждение 1. *Пусть $k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, тогда $\widehat{\varkappa}_n(k) = \varkappa_n(k)$.*

Доказательство. Очевидно, что $\widehat{\varkappa}_n(k) \geqslant \varkappa_n(k)$ в силу того, что $\overline{V}_n(k) \subset V_n(k)$. Нетрудно понять, что верно и обратное неравенство. Действительно, по предыдущей лемме, существует полная в $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ система векторов мощности $\varkappa_n(k)$, принадлежащая множеству $\overline{V}_n(k)$, которая может быть построена из некоторого базиса минимальной мощности, принадлежащего множеству $V_n(k)$. То есть $\widehat{\varkappa}_n(k) \leqslant \varkappa_n(k)$. Таким образом, утверждение доказано.

3. Подалгебры. Системы образующих

Далее будем рассматривать свойства подалгебр алгебры $\langle E_2^n, \Omega\rangle$, то есть подмножеств $M \subset E_2^n$ таких, что $[M]_\Omega = M$. Системой образующих подалгебры $\langle M, \Omega\rangle$ называется любое множество векторов $C \subseteq M$ такое, что $[C]_\Omega = M$. Очевидно, что $\omega(C) = \omega(M)$, так как операции Ω действуют покомпонентно, то есть разбиение строк на классы эквивалентности в матрицах $\mathcal{F}_C$ и $\mathcal{F}_M$ будет совпадать.

Опишем максимальные подалгебры через их вес. Напомним, что подалгебра $\langle M, \Omega\rangle \subsetneq \langle E_2^n, \Omega\rangle$ называется максимальной (предполной), если для любого вектора $f \in E_2^n \backslash M$ замыкание $[M \cup f]_\Omega = E_2^n$ (см. [2, 4]).

Теорема 3 (Критерий предполноты). *Подалгебра $\langle M, \Omega\rangle$ в алгебре $\langle E_2^n, \Omega\rangle$ является максимальной тогда и только тогда, когда $\omega(M) = n - 1$.*

Доказательство. *Необходимость.* Докажем от противного. Имеем, что подалгебра $\langle M, \Omega\rangle$ максимальна. Предположим, что $\omega(M) \neq n-1$, следовательно, $\omega(M) < n - 1$. Очевидно, что существует вектор $e_i \notin M$, в противном случае $M = E_2^n$. В силу соотношения (4) имеем, что $\omega(M \cup e_i) \leqslant n - 1$, то есть подалгебра $\langle M, \Omega\rangle$ не является максимальной. Получили противоречие.

Достаточность. Имеем, что $\omega(M) = n - 1$, следовательно, в матрице $\mathcal{F}_M$ существуют ровно две одинаковые строки. Пусть это строки с номерами i и j. В силу соотношения (1) векторы $\big(\{e_1, \dots, e_n\}\backslash\{e_i, e_j\}\big) \cup \{e_i \widehat{\vee} e_j\} \subset M$, то есть множество M содержит все векторы, у которых совпадают i-ая и j-ая компоненты. Рассмотрим произвольный вектор $f \in E_2^n \backslash M$. Так как $f \notin M$, следовательно, $f^i \neq f^j$. Таким образом, в матрице $\mathcal{F}_{M \cup f}$ все строки различны, то есть $[M \cup f]_\Omega = E_2^n$. Следовательно, $\langle M, \Omega\rangle$ является максимальной подалгеброй. Теорема доказана.

Пусть $\langle M, \Omega\rangle$ — произвольная подалгебра в алгебре $\langle E_2^n, \Omega\rangle$.

Определение. Вектор $g \in M$ назовем нижним элементом подалгебры $\langle M, \Omega\rangle$, если $g \neq \mathbf{0}$ и для любого $f \in M$ либо $g \mathbin{\widehat{\&}} f = \mathbf{0}$, либо $g \mathbin{\widehat{\&}} f = g$.

Через $D_{\langle M,\Omega\rangle}$ обозначим множество всех нижних элементов подалгебры $\langle M,\Omega\rangle$. Нетрудно проверить, что $D_{\langle E_2^n,\Omega\rangle} = \{e_1,\ldots,e_n\}$. Следующее утверждение показывает, что нижние элементы существуют в любой подалгебре.

Утверждение 2. *Пусть $\langle M,\Omega\rangle \subseteq \langle E_2^n,\Omega\rangle$, тогда $\left|D_{\langle M,\Omega\rangle}\right| = \omega(M)$.*

Доказательство. Построим изоморфизм $\varphi : \langle M,\Omega\rangle \to \left\langle E_2^{\omega(M)},\Omega\right\rangle$. Для этого в матрице $\mathcal{F}_M$ занумеруем классы эквивалентности строк от 1 до $\omega(M)$ и зададим отображение $\varphi : f \mapsto h$, где каждое h^i равно значению представителя i-го класса эквивалентных строк в векторе-столбце f. Очевидно, что построенное отображение является изоморфизмом, «склеивающим» одинаковые строки в матрице $\mathcal{F}_M$. То есть при данном отображении множество нижних элементов алгебры $\langle M,\Omega\rangle$ перейдет во множество нижних элементов алгебры $\left\langle E_2^{\omega(M)},\Omega\right\rangle$. Таким образом, можно найти множество $D_{\langle M,\Omega\rangle}$:

$$D_{\langle M,\Omega\rangle} = \varphi^{-1}\left(D_{\langle E_2^{\omega(M)},\Omega\rangle}\right) = \left\{\varphi^{-1}(e_1),\ldots,\varphi^{-1}\left(e_{\omega(M)}\right)\right\}.$$

Следовательно, $\left|D_{\langle M,\Omega\rangle}\right| = \omega(M)$. Утверждение доказано.

Замечание. В доказательстве данного утверждения был построен «склеивающий» изоморфизм, с помощью которого можно более подробно описать подалгебры и их элементы. В частности, там же с помощью данного изоморфизма было найдено множество нижних элементов некоторой произвольной подалгебры. Аналогичным образом можно найти системы образующих и базисы в любой подалгебре. Также, используя «склеивающий» изоморфизм, нетрудно показать, что мощности всех подалгебр алгебры $\langle E_2^n,\Omega\rangle$ образуют множество чисел вида 2^t, где $t = 1,\ldots,n$.

Утверждение 3. *Множество векторов D является множеством нижних элементов некоторой подалгебры $\langle M,\Omega\rangle$ тогда и только тогда, когда $[D]_\Omega = M$ и $\mathbf{0} \notin D$, а также выполнены условия:*

1) $g_1 \mathbin{\widehat{\&}} g_2 = \mathbf{0}$ для любых $g_1, g_2 \in D$, $g_1 \neq g_2$;

2) $\widehat{\bigvee\limits_{g\in D}} g = \mathbf{1}$.

Доказательство. В силу существования «склеивающего» изоморфизма данное утверждение достаточно доказать для алгебры $\left\langle E_2^k, \Omega\right\rangle$, где k — произвольное натуральное число. Для алгебр такого вида необходимость очевидна. Докажем достаточность. В силу условий 1 и 2, в каждой строке матрицы $\mathcal{F}_D$ ровно одна единица. Так как $[D]_\Omega = E_2^k$, то есть в матрице $\mathcal{F}_D$ все строки различны, и $\mathbf{0} \notin D$, следовательно, в каждом столбце матрицы $\mathcal{F}_D$ также ровно одна единица, в противном случае, если в некотором столбце больше одной единицы, в матрице $\mathcal{F}_D$ найдутся одинаковые строки. Таким образом, $D = \{e_1, \ldots, e_k\}$. Утверждение доказано.

Замечание. Множество $D_{\langle M,\Omega\rangle}$ для подалгебры $\langle M, \Omega\rangle$ представляет собой аналог полных ортогональных систем в евклидовых пространствах. Полностью следуя этой аналогии, каждый вектор $f \in M$ может быть представлен следующим образом:

$$f = \widehat{\bigvee_{g_i \in D_{\langle M,\Omega\rangle}}} \left(\sigma_i \mathbin{\widehat{\&}} g_i\right),$$

где $\sigma_i = \mathbf{1}$, если $f \mathbin{\widehat{\&}} g_i = g_i$, и $\sigma_i = \mathbf{0}$, если $f \mathbin{\widehat{\&}} g_i = \mathbf{0}$. Учитывая данное представление, множество векторов $D_{\langle M,\Omega\rangle}$ можно назвать канонической системой образующих подалгебры $\langle M, \Omega\rangle$ (см. [3]).

Используя «склеивающий» изоморфизм, нетрудно получить обобщение доказанных выше теорем на случай произвольной подалгебры.

Теорема 4. *Система векторов $\{f_1, \ldots, f_p\} \subseteq M$ является системой образующих подалгебры $\langle M, \Omega\rangle$ тогда и только тогда, когда $\omega(f_1, \ldots, f_p) = \omega(M)$.*

Теорема 5. *Спектр мощности базисов в подалгебре $\langle M, \Omega\rangle$ равен всем целочисленным значениям на отрезке $\left[\, \lceil \log_2 \omega(M) \rceil \,, \omega(M) - 1 \,\right]$.*

Теорема 6. *Подалгебра $\langle M', \Omega\rangle$ в подалгебре $\langle M, \Omega\rangle$ является максимальной тогда и только тогда, когда $\omega(M') = \omega(M) - 1$.*

В заключение автор выражает свою признательность А. С. Строгалову, под руководством которого была выполнена эта работа, и А. Е. Панкратьеву за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

[2] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: Изд-во МГУ, 1982.

[3] Харин К. В. Об одной алгебре изображений // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 4.

[4] Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В., Гаврилов Г. П. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[5] Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: Научное изд-во ТВП, 2000.