

Свойства частично упорядоченных множеств, задаваемых перестановками

Д. В. Ефремов

1. Основные понятия и формулировки результатов

Введем бинарное отношение доминирования между точками квадрата $[0, 1]^2$. Если $a = (a^1, a^2), b = (b^1, b^2) \in [0, 1]^2$, то скажем, что $a \prec b$, если $a^1 < b^1$ и $a^2 < b^2$, то есть точка b покоординатно превосходит точку a . Определим понятие *слоя* на конечном множестве $V \subset [0, 1]^2$, используя введенное отношение \prec . Назовем первым слоем V следующее множество

$$V_1 = \{y \in V : \nexists y' \in V, y' \prec y\} -$$

подмножество V , состоящее из его минимальных (не превосходящих никакую другую точку этого множества в смысле отношения \prec) точек. Аналогично, определим i -й слой множества V :

$$V_i = \left\{ y \in \left(V \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right) : \nexists y' \in \left(V \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right), y' \prec y \right\},$$

который по сути является первым слоем множества $V \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} V_k$, состоящего из точек, не содержащихся в предыдущих слоях.

Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$ — n -перестановка. В качестве V возьмем множество $I(\pi) = \left\{ \left(\frac{k}{n}, \frac{i_k}{n} \right), k = \overline{1, n} \right\}$ и рассмотрим на нем введенное выше отношение частичного порядка. Перестановку π назовем

k -слойной, если соответствующее ей множество $I(\pi)$ состоит в точности из k слоев. Далее, если это не будет вызывать недоразумений, мы будем говорить не о точках множества $I(\pi)$, а о точках перестановки π .

Определим R_n^k как количество k -слойных n -перестановок. А среднюю по всем перестановкам мощность k -ого слоя n -перестановки при условии равномерности всех перестановок обозначим за $S_k(n)$.

Теорема 1. Для чисел R_n^k справедливы формулы

$$\begin{aligned} R_n^n &= 1, \quad n \geq 1; \\ R_n^{n-1} &= n(n-2) + 1, \quad n \geq 2; \\ R_n^{n-2} &= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3) + 1, \quad n \geq 3; \\ R_n^{n-3} &= \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)((n-1)(n-3)(n-5) + 4) + 1, \quad n \geq 5. \end{aligned}$$

Теорема 2. Для чисел R_n^k справедливо равенство

$$R_n^k = \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N, \\ n_i > 0}} \frac{(n!)^2}{k!} \left(\frac{\Delta(n_1, n_2, \dots, n_k)}{n_1!n_2! \dots n_k!} \right)^2, \quad (1)$$

где $N = n + \frac{k(k-1)}{2}$, а $\Delta(n_1, n_2, \dots, n_k)$ — определитель Вандермонда.

Теорема 3. При любом n и $k < n$ верно неравенство

$$R_n^k < \left(\frac{n}{n + \frac{k(k-1)}{2}} \right)^{2n} \frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!} k^{2n}. \quad (2)$$

В работе [1] приводится следующий результат: средняя мощность первого слоя n -перестановки $S_1(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ и $S_1(n) \sim \ln n$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Для средней мощности второго слоя n -перестановки, при условии равномерности всех n -перестановок, справедлива формула

$$S_2(n) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1}{t!},$$

асимптотическое поведение которой описывается как

$$S_2(n) \sim (e - 1) \ln n, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема 5. При любом n и k , $k < n$ и равновероятности всех перестановок верно следующее соотношение

$$S_k(n) = \sum_{t=k}^n \frac{1}{t} \sum_{m=k-1}^{t-1} \frac{R_m^{k-1}}{m!}. \quad (3)$$

С использованием этой формулы, получена следующая верхняя оценка, наглядно характеризующая поведение $S_k(n)$ с ростом n :

Следствие 1. При любом n и k , $k < n$ и равновероятности всех перестановок верна оценка

$$S_k(n) \leq \frac{(2e)^{k(k-1)} e^{k^2}}{k!} \ln n.$$

Часть приведенных результатов была анонсирована в [2].

Автор выражает благодарность Э.Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. О количестве k -слойных n -перестановок

В начале данного раздела рассмотрим несколько частных случаев, а именно выведем формулу для R_n^k при условии определенной зависимости между n и k .

Лемма 1. Пусть дана n -перестановка $\pi \in S_n$, являющаяся $(n-t)$ -слойной. Тогда среди точек множества $A = \{(l, m) : l + m \leq t + 2; l, m \in \mathbb{Z}\}$ есть хотя бы одна точка из $I_1(\pi)$.

Доказательство. Так как π — $(n-k)$ -слойная перестановка, то в $I(\pi)$ есть цепочка из $(n-k)$ упорядоченных точек, а значит при выбрасывании из π некоторых k точек получится $\tilde{\pi} = id \in S_{n-k}$. Предположим, что $A \cap I_1(\pi) = \emptyset$. Поскольку в $I(\tilde{\pi})$ в силу тождественности $\tilde{\pi}$ будет содержаться точка $(1, 1)$, то предположение означает,

что множество A полностью покрывается теми k строками и k столбцами, которые содержат выбрасываемые точки. Если пронумеровать эти строки и столбцы по номеру точки, на них лежащей, то становится ясно, что с множеством A может пересекаться либо i -ая строка либо i -ый столбец. Значит сумма строк и столбцов, пересекающихся с A не превосходит k . Так как множество A содержит в себе точки из $k+1$ строки (столбца), то оно не покрывается k строками, более того: s строк оставляют не покрытыми ровно $k+1-s$ строк, которые, в свою очередь, не могут быть покрытыми $k-s$ столбцами. Получили противоречие, означающее, что $A \cap I_1(\pi) \neq \emptyset$. Лемма доказана.

Эта лемма позволяет нам ограничить множеством A перебор возможных расположений точки из $I_1(\pi)$ среди всех точек $I(\pi)$, где $\pi \in S_n$ — заданная $(n-t)$ -слойная перестановка, что упрощает получение рекуррентных соотношений для R_n^{n-t} , более того, из нее следует, что точка из $A \cap I_1(\pi)$ является началом длиннейшей цепочки из упорядоченных точек.

Доказательство теоремы 1

Будем проводить доказательство через получение рекуррентных соотношений на интересующие нас величины, классифицируя все перестановки по виду точек их первого слоя.

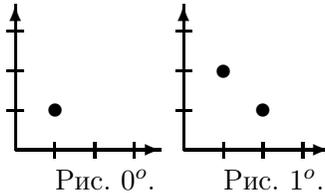


Рис. 0°.

Рис. 1°.

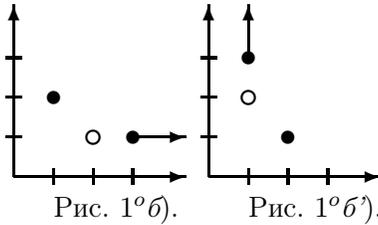
0°. Для чисел R_n^{n-k} , $k \geq 0$ получаем, что множество $A \supset (1, 1)$, значит $(n-k)$ -слойных перестановок $\pi \in S_n$, содержащих эту точку, есть ровно R_{n-1}^{n-k-1} , так как на оставшейся $(n-1)$ точке должен образоваться ровно $(n-k-1)$ слой (еще один слой $((n-k)$ -ый) дает точка $(1, 1)$, являющаяся единственной минимальной).

При $k = 0$ имеем:

$$R_n^n = R_{n-1}^{n-1} = \dots = R_1^1 = 1.$$

1^o. Для $k \geq 1$ получается, что $A \supset \{(l, m) : l + m = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Таким образом, из леммы следует, что при $k \geq 1$ в любой $(n - k)$ -слойной перестановке π , не соответствующей случаю 0^o, хотя бы одна из этих точек является минимальной.

1^oa) Если π удовлетворяет случаю 1^oa), то таких перестановок получается ровно R_{n-2}^{n-k-1} , так как эти две точки образуют 1 слой, а оставшиеся $(n - 2)$ точек должны образовать $(n - k - 1)$ слой.



1^oб). Обе изображенные на рис. 1б точки лежат в первом слое (и только они). Число $\pi^{-1}(1)$ может принимать $(n - 2)$ значения (от 3 до n), а оставшиеся $(n - 2)$ точки должны образовать $(n - k - 1)$ слой. Так как случаи 1^oб) и 1^oб') симметричны друг другу, то получаем, что количество таких перестановок : $2(n - 2)R_{n-2}^{n-k-1}$.

При $k = 1$:

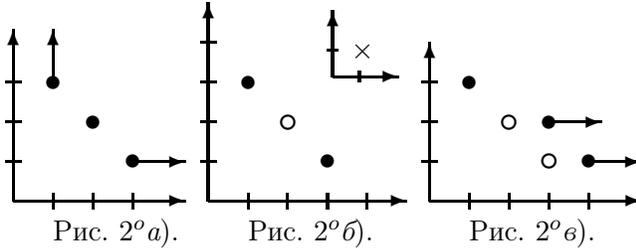
$$R_n^{n-1} = \underbrace{R_{n-1}^{n-2}}_{0^o} + \underbrace{(2n - 3)R_{n-2}^{n-2}}_{1^o a, б, б')} = R_{n-1}^{n-2} + (2n - 3).$$

$$R_n^{n-1} = \sum_{t=3}^n (R_t^{t-1} - R_{t-1}^{t-2}) + R_2^1 = \sum_{t=3}^n (2t - 3) + 1 = (n - 1)^2.$$

Здесь и далее суммирование многочленов производится их разложением в сумму многочленов вида $(t + k)!/t! = (t + k)_k = C_{t+k}^k k!$ и использованием доказываемого, например, по индукции тождества:

$$\sum_{t=0}^n C_{k+t}^k = C_{k+1+n}^{k+1}. \tag{*}$$

2^o. Для $k \geq 2$, если перестановка π не описывается случаями 0^o и 1^o, то рассмотрим подмножество $A \supset \{(l, m) : l + m = 4\}$.



2° а). Поскольку точка (2, 2) в любом случае, очевидно, будет той минимальной, с которой начинается основная (n - k)-цепочка упорядоченных точек, то точки (π⁻¹(1), 1) и (1, π(1)) на количество слоев в данном случае влиять не могут, а значит получаем: (n - 2)²R_{n-3}^{n-k-1}.

2° б). На оставшихся (n - 2)-х точках необходимо получить (n - k - 1) слой, но так, чтобы данный случай отличался от случая 2° а), то есть π̃⁻¹(1) ≠ 1, а следовательно имеем: R_{n-2}^{n-k-1} - R_{n-3}^{n-k-2}.

2° в). При k = 2 из леммы следует, что точка (1, 3) — единственная возможная начальная точка длиннейшей цепочки упорядоченных элементов, а значит точки (π⁻¹(1), 1) и (π⁻¹(2), 2) на количество слоев в данном не симметричном случае влиять не могут, таким образом, получаем 2(n - 3)²R_{n-3}ⁿ⁻³ (при k > 2 эта формула не верна).

Пусть k = 2:

$$\begin{aligned}
 R_n^{n-2} &= \underbrace{R_{n-1}^{n-3}}_{0^\circ} + \underbrace{(2n-3)R_{n-2}^{n-3}}_{1^\circ \text{ а, б)}} + \underbrace{(n-2)^2 R_{n-3}^{n-3}}_{2^\circ \text{ а)}} \\
 &\quad + \underbrace{R_{n-2}^{n-3} - R_{n-3}^{n-4}}_{2^\circ \text{ б)}} + \underbrace{2(n-3)^2 R_{n-3}^{n-3}}_{2^\circ \text{ в)}}. \\
 R_n^{n-2} - R_{n-1}^{n-3} &= 2(n-1)(n-2)(n-3) \\
 R_n^{n-2} &= \sum_{t=4}^n (R_t^{t-2} - R_{t-1}^{t-3}) + R_3^1 = \sum_{t=4}^n 2(t-1)(t-2)(t-3) + 1. \\
 R_n^{n-2} &= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3) + 1.
 \end{aligned}$$

3° а). Поскольку точки (2,3) и (3,2) в любом случае будут теми минимальными, с которых начинается длиннейшая (n - k)-цепочка

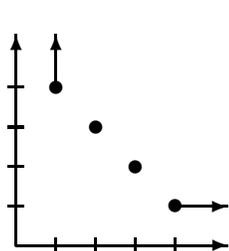


Рис. 3^{0 a}).

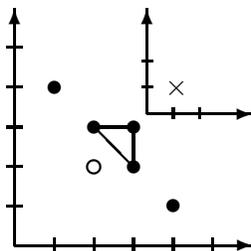


Рис. 3^{0 б}).

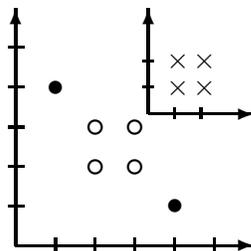


Рис. 3^{0 в}).

упорядоченных элементов, то точки $(1, \pi(1))$ и $(\pi^{-1}(1), 1)$ на количество слоев не влияют, а значит получаем:

$$(n - 3)^2 R_{n-4}^{n-4}.$$

3^{0 б}). Здесь, на рис. 3б, треугольник означает фактическое наличие лишь одной из своих вершин, то есть рассматриваются сразу три возможности:

$$3(R_{n-3}^{n-4} - R_{n-4}^{n-5})$$

(R_{n-4}^{n-5} исключает совпадение, например, с 3^{0 а}).

3^{0 в}). Здесь все нежелательные конфигурации описываются случаями 0⁰, 1^{0 а, б} и 2^{0 а} с той только разницей, что вместо n следует брать $(n - 2)$.

$$R_{n-2}^{n-4} - \underbrace{R_{n-3}^{n-5}}_{0^0} - \underbrace{R_{n-4}^{n-5}}_{1^0 a)} - \underbrace{2(n - 4)R_{n-4}^{n-5}}_{1^0 б)} - \underbrace{(n - 4)^2 R_{n-5}^{n-5}}_{2^0 a)}$$

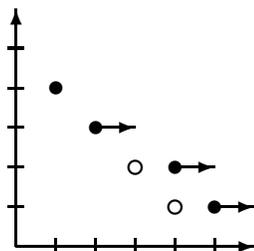


Рис. 3^{0 г}).

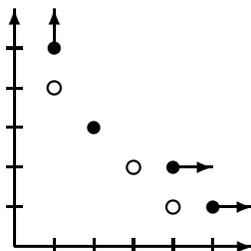


Рис. 3^{0 д}).

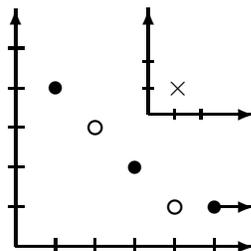


Рис. 3^{0 е}).

3^oг). Хотя бы одна из точек (1, 4) и (π⁻¹(3), 3) обязательно будет началом длиннейшей цепочки, потому что по лемме никакие другие точки лежать в ее начале не могут. В этом несимметричном случае точки (π⁻¹(1), 1) и (π⁻¹(2), 2) могут принимать по (n - 4) значения, а (π⁻¹(3), 3) — оставшиеся (n - 3): 2(n - 3)(n - 4)²R_{n-4}ⁿ⁻⁴.

3^oд). В этом несимметричном случае лишь точка (2, 3) может быть началом длиннейшей цепочки, а точки (1, π(1)), (π⁻¹(2), 2) и (π⁻¹(1), 1) могут, соответственно, принимать любые допустимые значения: 2(n - 4)³R_{n-4}ⁿ⁻⁴.

3^oе). По лемме точка (π⁻¹(1), 1) началом основной цепочки не является, а значит (π⁻¹(1), 1) может принимать любое из (n - 4) допустимых значений. Более того, следует исключить возможность совпадения этого случая со случаем 3^oа) и учесть его несимметричность: 2(n - 4)(R_{n-3}ⁿ⁻⁴ - R_{n-4}ⁿ⁻⁵).

И, наконец, аналог случая 2^oв) для k = 3, который уже не требует объяснений:

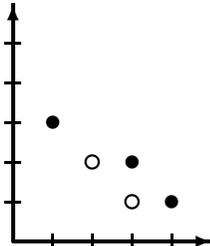


Рис. 3^oж).

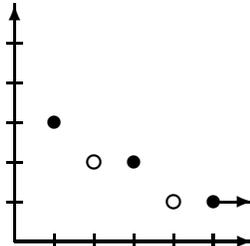


Рис. 3^oз).

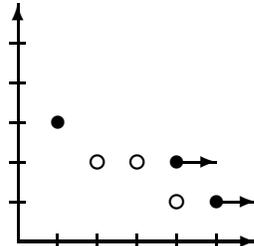


Рис. 3^oи).

$$2R_{n-3}^{n-4}. \tag{3^o ж)}$$

$$2(n - 4)R_{n-3}^{n-4}. \tag{3^o з)}$$

$$2(n - 4)^2 R_{n-3}^{n-4}. \tag{3^o и)}$$

$$3^o к) \quad 2(R_{n-2}^{n-4} - \underbrace{R_{n-3}^{n-5}}_{0^o} - \underbrace{(n - 3)R_{n-4}^{n-5}}_{1^o а, б \text{ (без б')}}).$$

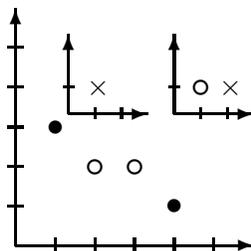


Рис. 3^ок).

Итого, при $k = 3$, имеем:

$$\begin{aligned}
 R_n^{n-3} = & \underbrace{R_{n-1}^{n-4}}_{0^{\circ}} + \underbrace{(2n-3)R_{n-2}^{n-4}}_{1^{\circ} a, б)} + \underbrace{(n-2)^2 R_{n-3}^{n-4}}_{2^{\circ} a)} + \\
 & + \underbrace{R_{n-2}^{n-4} - R_{n-3}^{n-5}}_{2^{\circ} б)} + \underbrace{(n-3)^2 R_{n-4}^{n-4}}_{3^{\circ} a)} + \underbrace{3(R_{n-3}^{n-4} - R_{n-4}^{n-5})}_{3^{\circ} б)} + \\
 & + \underbrace{R_{n-2}^{n-4} - R_{n-3}^{n-5} - (2n-7)R_{n-4}^{n-5} - (n-4)^2 R_{n-5}^{n-5}}_{3^{\circ} в)} + \\
 & + \underbrace{2(n-4)^2(n-3)R_{n-4}^{n-4}}_{3^{\circ} г)} + \underbrace{2(n-4)^3 R_{n-4}^{n-4}}_{3^{\circ} д)} + \\
 & + \underbrace{2(n-4)(R_{n-3}^{n-4} - R_{n-4}^{n-5})}_{3^{\circ} e)} + \underbrace{2R_{n-3}^{n-4}}_{3^{\circ} ж)} + \underbrace{2(n-4)R_{n-3}^{n-4}}_{3^{\circ} з)} + \\
 & + \underbrace{2(n-4)^2 R_{n-3}^{n-4}}_{3^{\circ} u)} + \underbrace{2(R_{n-2}^{n-4} - R_{n-3}^{n-5} - (n-3)R_{n-4}^{n-5})}_{3^{\circ} к)}.
 \end{aligned}$$

После раскрытия всех уже известных формул и необходимых преобразований получаем:

$$R_n^{n-3} - R_{n-1}^{n-4} = \frac{1}{2}(2n^5 - 25n^4 + 116n^3 - 247n^2 + 242n - 88).$$

$$R_n^{n-3} = \sum_{k=5}^n (R_k^{k-3} - R_{k-1}^{k-4}) + R_4^1.$$

$$R_n^{n-3} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)((n-1)(n-3)(n-5) + 4) + 1.$$

Указанные в формулировке теоремы нижние пределы для n у каждой формулы возникают при выводе рекуррентных соотношений, например, R_n^{n-1} выражается через R_{n-1}^{n-2} и R_{n-2}^{n-2} , которые имеют смысл, самое меньшее, при $n = 3$, однако и при $n = 2$ формула для R_n^{n-1} оказывается верной. Теорема 1 доказана.

Теперь перейдем к рассмотрению общего случая, когда между n и k отсутствует какая бы то ни было связь, то есть R_n^k рассматривается как функция, существенно зависящая от двух аргументов.

Доказательство Теоремы 2

Принимая во внимание описанное, например, в [3] соответствие между n -перестановками и упорядоченными парами табло Янга, где каждая пара состоит из двух табло одинаковой формы по n ячеек в каждом, заметим, что в левой части (1) стоит число всех n -перестановок, количество слоев у которых равно k . В терминах табло Янга это означает, что оба табло (имеющие, как уже было упомянуто, одинаковую форму) состоят из k строк. Если обозначить числами m_1, m_2, \dots, m_k длины 1-ой, 2-ой, ..., k -ой строк табло заданной формы соответственно, где $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k > 0$, то правая часть (1) должна равняться сумме по всем таким допустимым наборам m_1, m_2, \dots, m_k количество пар табло, имеющих форму, задаваемую этим набором. Используя формулу Мак-Магона [3]:

$$f(m_1, m_2, \dots, m_k) = n! \frac{\Delta(m_1 + k - 1, m_2 + k - 2, \dots, m_k)}{(m_1 + k - 1)!(m_2 + k - 2)! \dots (m_k)!},$$

выражающую количество различных табло заданной формы, получаем:

$$R_n^k = \sum_{\substack{m_1 + m_2 + \dots + m_k = n, \\ m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k > 0}} \left(n! \frac{\Delta(m_1 + k - 1, m_2 + k - 2, \dots, m_k)}{(m_1 + k - 1)!(m_2 + k - 2)! \dots (m_k)!} \right)^2.$$

Здесь условие суммирования означает перебор всех возможных форм табло из n ячеек и k строк, а квадрат в каждом слагаемом возникает, так как мы рассматриваем сразу два табло заданной конфигурации.

Обозначим $n_i = m_i + k - i$ и получим:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \dots + n_k &= m_1 + k - 1 + m_2 + k - 2 + \dots + m_k = \\ &= m_1 + m_2 + \dots + m_k + (k - 1) + (k - 2) + \dots + 1 = \\ &= n + \frac{k(k - 1)}{2} =: N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n^k &= \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N, \\ n_1>n_2>\dots>n_k>0}} \left(n! \frac{\Delta(n_1, n_2, \dots, n_k)}{n_1!n_2!\dots n_k!} \right)^2 = \\ &= \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N, \\ n_i>0}} \frac{(n!)^2}{k!} \left(\frac{\Delta(n_1, n_2, \dots, n_k)}{n_1!n_2!\dots n_k!} \right)^2. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, ибо

а) при наличии в наборе n_1, n_2, \dots, n_k хотя бы двух равных чисел определитель Вандермонда зануляется;

б) условие убывания чисел в наборе n_1, n_2, \dots, n_k можно снять, учитывая, что квадрат определителя Вандермонда — симметричная функция, а упорядочить такой набор можно $k!$ способами (то есть без условия убывания сумма увеличивается ровно в $k!$ раз). Теорема 2 доказана.

Для того, чтобы нагляднее представить характер зависимости данной величины от своих аргументов, докажем теорему 3, дающую нам верхнюю оценку для чисел R_n^k .

Лемма 2. Пусть n_1, n_2, \dots, n_k — упорядоченный по возрастанию набор различных натуральных чисел, сумма которых равна N , тогда справедливо неравенство:

$$\Delta^2(n_1, n_2, \dots, n_k) < \left(\frac{2N}{k} \right)^{k(k-1)}. \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим сумму положительных по условию леммы слагаемых:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq i > j \geq 1} (n_i - n_j) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{i-1} (n_i - n_j) \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{i-1} n_i = \\ &= \sum_{i=1}^k (i-1)n_i < \sum_{i=1}^k (k-1)n_i = (k-1)N. \end{aligned}$$

Теперь используем эту оценку, подставив ее в неравенство о среднем геометрическом и среднем арифметическом:

$$\frac{k(k-1)}{2} \sqrt{\Delta(n_1, n_2, \dots, n_k)} \leq \frac{2}{k(k-1)} \sum_{k \geq i > j \geq 1} (n_i - n_j) < \frac{2N}{k}.$$

Возведя обе части полученного неравенства в степень $k(k-1)$, получим доказываемое неравенство. Лемма доказана.

Используя доказанную выше Лемму 2, приступим к доказательству верхней оценки для чисел R_n^k .

Доказательство Теоремы 3

Из определения полиномиальных коэффициентов следует, что

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N \\ n_i \geq 0}} \left(\frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \right) = k^N,$$

поэтому справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N \\ n_i > 0}} \left(\frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \right)^2 &\leq \\ &\leq \left(\sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N \\ n_i \geq 0}} \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \right)^2 \leq k^{2N}. \quad (5) \end{aligned}$$

Оценим величину $\left(\frac{n!}{N!}\right) (N)^{k(k-1)/2}$:

$$\left(\frac{n!}{N!}\right) (N)^{k(k-1)/2} = \prod_{t=1}^{T:=k(k-1)/2} \left(\frac{n+T}{n+t}\right) <$$

(сделаем замену $n' = n + T$, $t' = T - t = \overline{0, T}$)

$$< \prod_{t'=0}^T \left(\frac{n'}{n'-t'}\right) = \exp \left[\sum_{t'=0}^T \ln \frac{n'}{n'-t'} \right] =: \exp A.$$

$$A < \int_0^T \ln \frac{n'}{n'-t'} dt = (T - n') \ln \frac{n'}{n'-T} + T.$$

После обратной замены получим:

$$\exp A < \left(\frac{n+T}{n}\right)^{-n} e^T \rightarrow 1.$$

Значит $\left(\frac{n!}{N!}\right)^2 (N)^{k(k-1)} < \left(\frac{n}{n+k(k-1)/2}\right)^{2n} e^{k(k-1)} < e^{k(k-1)}$.

Используя последнее неравенство, а также соотношения (1) и (4), получим:

$$\begin{aligned} R_n^k &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N, \\ n_i>0}} \left(\frac{n!}{N!}\right)^2 \Delta^2(n_1, n_2, \dots, n_k) \left(\frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!}\right)^2 < \\ &< \frac{1}{k!} \left(\frac{n!}{N!}\right)^2 \left(\frac{2N}{k}\right)^{k(k-1)} \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N, \\ n_i>0}} \left(\frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!}\right)^2 < \\ &< \frac{1}{k!} \left(\frac{n!}{N!}\right)^2 \left(\frac{2N}{k}\right)^{k(k-1)} (k^2)^N < \\ &< \left(\frac{n}{n+k(k-1)/2}\right)^{2n} \frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!} (k^2)^n < \frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!} (k^2)^n. \end{aligned}$$

Тем самым теорема 3 доказана.

Заметим, что при фиксированном k ряд $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{R_n^k}{n!}$ — сходится, так как используя (2), получаем, что

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{R_n^k}{n!} < \frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(k^2)^n}{n!} < \frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!} e^{k^2}. \quad (6)$$

3. Оценки средней мощности слоев

В данном разделе приводится точная формула и ее верхняя оценка для функции $S_k(n)$, определяющей, как уже было упомянуто, среднюю мощность k -ого слоя n -перестановки.

В работе [1] приводится следующий результат: средняя мощность первого слоя n -перестановки $S_1(n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ и $S_1(n) \sim \ln n$ при $n \rightarrow \infty$.

3.1. Средняя мощность второго слоя

Перед тем, как приступить к выводу общей формулы, рассмотрим еще один частный случай ($k = 2$).

Доказательство Теоремы 4

Пусть некоторая точка (k, i_k) , $k \geq 1$ лежит во втором слое. Значит все точки, меньшие ее, должны лежать исключительно в одном, а значит первом, слое, то есть быть несравнимыми. Точки (j, i_j) и (k, i_k) несравнимы при $j < k$, только если $i_j > i_k$. Таким образом, набор точек, упорядоченный по первой координате в порядке возрастания, образует один слой, только если вторые координаты при этом упорядочены в порядке убывания. Подсчитаем количество k -перестановок, в которых точка (k, i_k) лежит во втором слое. Все точки, у которых вторая координата будет меньше i_k , а их ровно $i_k - 1$, могут быть выбраны из $k - 1$ точки ровно $C_{k-1}^{i_k-1}$ способами, а оставшиеся $k - i_k$ точек могут быть расставлены произвольным образом $(k - i_k)!$ способами. Итого получаем $(k - i_k)! C_{k-1}^{i_k-1} = \frac{(k-1)!}{(i_k-1)!}$ перестановок. Поскольку i_k в общем случае нам не известно, а количество точек, меньших k -ой

(то есть той, у которой первая координата равна k), не может превосходить $k - 1$, то количество k -перестановок, у которых k -ая точка лежит во втором слое, равно

$$\sum_{t=1}^{k-1} \frac{(k-1)!}{t!}.$$

Очевидно, что если мы рассматриваем принадлежность k -ой точки n -перестановки второму слою, то на количество интересующих нас перестановок не могут влиять те точки, у которых хотя бы одна координата больше k , поскольку такие точки просто не могут быть меньшими k -ой. Таким образом, приведенные выше рассуждения о k -ой точке k -перестановок справедливы и для k -ой точки n -перестановок, где $n \geq k$. Значит сумма вероятностей того, что k -ые точки, $k = \overline{2, n}$, лежат во втором слое равна

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \sum_{t=1}^{k-1} \frac{(k-1)!}{t!} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1}{t!},$$

а это и есть математическое ожидание такой случайной величины от перестановки как количество точек во втором слое, подсчитанное разложением на элементарные события: принадлежность k -ой точки, $k = \overline{2, n}$, второму слою. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Так как для функции $f(x) = e^x$ на всей действительной прямой справедливо разложение в ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$

$$e^x = \sum_{t=0}^n \frac{x^t}{t!} + r_n, \text{ где } r_n = \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{x^t}{t!},$$

то при $x = 1$, используя оценку

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} c^{n+1}, c \in (0, 1),$$

получим

$$e = \sum_{t=0}^n \frac{1}{t!} + \frac{e^c c^{n+1}}{(n+1)!} \leq \sum_{t=0}^n \frac{1}{t!} + \frac{e}{(n+1)!}.$$

Рассмотрим сумму $\sum_{t=1}^n \frac{1}{t}$:

$$1 + \int_1^n \frac{dx}{x+1} \leq \sum_{t=1}^n \frac{1}{t} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x};$$

$$1 + \ln(x+1)|_1^n = 1 - \ln 2 + \ln(n+1) \leq \sum_{t=1}^n \frac{1}{t} \leq 1 + \ln x|_1^n = 1 + \ln n,$$

$$\text{значит } \sum_{t=1}^n \frac{1}{t} \sim \ln n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Ясно, что

$$S_2(n) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1}{t!} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t!} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} (e-1).$$

Теперь оценим $S_2(n)$ снизу:

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} (e-1-r_k) = (e-1) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{r_k}{k}, \\ \sum_{k=2}^n \frac{r_k}{k} &\leq \sum_{k=2}^n \frac{e}{k(k+1)!} \leq \sum_{k=2}^n \frac{e}{k!} \leq e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e^2. \end{aligned}$$

Значит $S_2(n) \sim (e-1) \ln n$, так как ее оценки снизу и сверху являются асимптотически равными функциями. Утверждение доказано.

3.2. Оценки средней мощности слоев для произвольного k

Теперь, имея достаточное количество информации о числах R_n^k , перейдем к доказательству общей формулы для $S_k(n)$:

$$S_k(n) = \sum_{t=k}^n \frac{1}{t} \sum_{m=k-1}^{t-1} \frac{R_m^{k-1}}{m!},$$

а именно, докажем теорему 5.

Рассмотрим p_t^k — вероятность того, что t -ая точка $(t, \pi(t))$ n -перестановки лежит в k -м слое. Ясно, что для этого необходимо, чтобы $\pi(t) \geq k$. Обозначим $m := \pi(t)$. Также очевидно, что точки, у которых хотя бы одна координата превосходит t , не могут влиять и не влияют на то, в какой слой попадает t -ая точка, поэтому, без ограничения общности, рассматриваем t -перестановку. Поскольку у точек, меньших $(t, \pi(t))$, вторая координата не превосходит $\pi(t) - 1$ по определению нашего частичного порядка, то именно эти $\pi(t) - 1$ точек должны образовывать ровно $k - 1$ слой для того, чтобы точка $(t, \pi(t))$ лежала точно в k -м слое. Количество таких «образований» есть R_m^{k-1} , где $m = \overline{k-1, t-1}$. Более того, для этих точек надо выбрать значения первых координат, что можно сделать C_{t-1}^m способами. Оставшиеся $t - (m + 1)$ точки с большими чем $\pi(t)$, а значит уже определившимися по построению, первыми координатами могут располагаться произвольным образом друг относительно друга, что дает $(t - m - 1)!$ возможностей. Если при этом вспомнить, что всего t -перестановок существует ровно $t!$ штук, то получим:

$$p_t^k = \sum_{m=k-1}^{t-1} \frac{R_m^{k-1} C_{t-1}^m (t - m - 1)!}{t!} = \frac{1}{t} \sum_{m=k-1}^{t-1} \frac{R_m^{k-1}}{m!}.$$

Введем случайную величину $\xi(\pi) := |I_k(\pi)|$, где $\pi \in S_n$, n — фиксировано, а все перестановки равновероятны. Тогда $E\xi = \sum_{\pi \in S_n} \frac{|I_k(\pi)|}{n!}$. Рассмотрим $(0,1)$ -матрицу $\|a_{ij}\|$ размера $n! \times n$ такую, что

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (j, \pi_i(j)) \in I_k(\pi_i),$$

i означает некоторую нумерацию перестановок. Тогда $E\xi$ — это не что иное как ортонормированная $(\frac{1}{n!})$ сумма всех единиц этой матрицы, сгруппированная по строкам. Если же перегруппировать эту сумму по столбцам, получим

$$E\xi = \sum_{t=1}^n P\{(t, \pi(t)) \in I_k(\pi)\} = \sum_{t=1}^n p_t^k = \sum_{t=k}^n p_t^k.$$

Последнее верно в силу того, что $p_t^k = 0$ при $t < k$. Таким образом получено, что

$$S_k(n) = \sum_{t=k}^n \frac{1}{t} \sum_{m=k-1}^{t-1} \frac{R_m^{k-1}}{m!},$$

то есть теорема 5 доказана.

Используя неравенство (6) для формулы (3), получаем верхнюю оценку

$$S_k(n) < \frac{(2e)^{k(k-1)} e^{k^2}}{k!} \sum_{t=k}^n \frac{1}{t} < \frac{(2e)^{k(k-1)} e^{k^2}}{k!} \ln n,$$

что доказывает следствие из Теоремы 5.

Список литературы

- [1] Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б. Теория хранения и поиска информации. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
- [2] Ефремов Д. В. О некоторых свойствах частично упорядоченных множеств, задаваемых перестановками // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIII Международной конференции (Казань, 27–31 мая 2002 г.) Часть I. — М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 2002. — С. 62.
- [3] Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Том 3: Сортировка и поиск. — М.: Мир, 1987.