

Классификация размытых изображений и оценка параметров системы регистрации методами морфологического анализа

А. И. Чуличков, И. В. Морозова

Предлагается морфологический метод классификации объектов по их размытым изображениям, искаженным шумом с неизвестной дисперсией, а также метод оценивания параметров системы регистрации изображений. Методы основаны на математической модели линейной измерительной системы регистрации изображений. Вводится понятие формы изображения как максимального инварианта преобразований его яркости, моделирующих влияние изменяющихся условий регистрации.

Введение

Хорошо известно, что изображения одной и той же сцены, отвечающие различным условиям освещения и (или) измененным оптическим свойствам объектов, могут различаться радикально. Это обстоятельство порождает значительные трудности в прикладных задачах анализа и интерпретации изображений реальных сцен, в которых решение не должно зависеть от условий регистрации изображений. Речь идет, например, о задачах выделения неизвестного объекта на фоне известной местности, узнавания известного объекта на произвольном фоне, классификации объектов по их изображениям, полученным при неконтролируемых условиях регистрации, о задаче совмещения изображений одной и той же сцены, полученных в различных спектральных диапазонах и т. д. Для решения перечис-

ленных задач были разработаны методы морфологического анализа изображений, оказавшиеся достаточно эффективными [1–4].

Основную идею этих методов поясним на следующем примере. Рассмотрим изображение некоторой сцены, сформированное с помощью видеокамеры в видимом диапазоне спектра при освещении сцены пространственно однородным световым потоком так, что области изображения, имеющие одинаковую яркость, сформированы поверхностями объекта, обладающими одинаковыми геометрическими и оптическими свойствами. Тем самым, это изображение несет достаточно подробную информацию о геометрической форме объектов сцены. Предположим, что эти свойства сохраняются, если изменить условия освещения (сохраняя его однородность), диапазон и природу регистрируемого излучения. Тогда и на любом другом изображении данной сцены, полученном тем или иным способом, соответствующие области поля зрения будут также обладать одинаковой яркостью. В этой ситуации изменение условий освещения или конструкции устройства формирования изображения может моделироваться путем всевозможных преобразований яркости исходного видеоизображения. Максимальный инвариант такого класса преобразований определит все то, что относится к данной сцене и не зависит от условий формирования изображений — его можно назвать формой. Поскольку этот инвариант определяет полностью геометрическую форму сцены, его называют формой *изображения* сцены. Отличия формы одного изображения сцены от формы другого характеризуют свойства сцены, не связанные с условиями регистрации, и могут отражать изменения в содержании изображаемого — например, наличие новых объектов или отсутствие прежних.

Понятие формы изображения объекта или сцены, таким образом, основано на достаточно представительной физико-математической модели процессов формирования сигналов. В терминах формы решаются задачи узнавания объекта или сцены, задачи классификации сцен по их изображениям, зарегистрированным при неконтролируемых и неизвестных условиях [1–4].

Часто на практике изображения сцен регистрируются системой, обладающей недостаточно высоким разрешением. Сделать разрешающую способность системы сколь угодно высокой не позволяют тех-

нологические и физические запреты, в частности, дифракционные. Ситуация с недостаточным разрешением характерна, например, для изображений, полученных регистрацией радиоизлучения, так как его длина волны существенно больше длины волны видимого спектра. Низкое разрешение может существенно затруднить узнавание сцены по ее изображению, особенно если точная математическая модель системы, формирующей изображение, неизвестна.

Данная работа посвящена распространению подходов морфологического анализа на ситуации, когда предъявленные изображения являются изображениями сцен, искаженными размывающим линейным преобразованием с неизвестным параметром размытия и шумом неизвестной дисперсии. Решена задача узнавания и классификации изображений по форме, а также задача оценивания параметра размытия. Показано, что методы морфологического анализа в предположении о гауссовом распределении шума эквивалентны оптимальным методам проверки статистических гипотез и методам теории принятия решений в теоретико-возможностной постановке.

1. Основные подходы морфологического анализа изображений

Прежде, чем перейти к морфологическому анализу размытых изображений, поясним, в чем состоит используемый подход при анализе изображений с достаточно высоким разрешением.

1.1. Форма изображения

Основная идея морфологического подхода состоит в математическом исследовании модели формирования изображений с целью поиска симметрий, выражающихся в инвариантности задачи к тем или иным преобразованиям зарегистрированного изображения и параметров модели. Форма изображения определяется как максимальный инвариант таких преобразований [1].

Таким образом, центральное понятие морфологического анализа — форма изображения — тесно связана с моделью регистрации

изображения объекта или сцены. Например, пусть черно-белое (полутоновое) изображение получено от объекта, поверхность которого состоит из участков оптически однородных плоскостей, освещаемых однородным световым потоком. Тогда каждый участок такой плоскости на изображении объекта будет иметь однородную яркость; его изображение можно рассматривать как функцию $f(\cdot)$, заданную на поле зрения $X \subset \mathcal{R}_2$, принимающую числовые значения и представляемую в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_i(x), \quad x \in X; \quad (1)$$

здесь

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i \\ 0, & x \notin A_i \end{cases} \quad (2)$$

индикаторная функция множества A_i поля зрения X , все точки которого имеют одинаковую яркость c_i , $i = 1, \dots, N$. Множества одинаковой яркости A_i попарно не пересекаются и в сумме составляют все поле зрения X : $A_i \cup A_j = \emptyset$, $i, j = 1, \dots, N$, $\bigcup_{i=1}^N A_i = X$; они изображают участки сцены, обладающие однородными оптическими свойствами. Все множество изображений, заданных на поле зрения X и принимающих числовые значения, зададим как множество квадратично интегрируемых на X функций $\mathcal{L}_2(X)$. Если под изменением условий регистрации понимать вариации светового потока излучения, освещающего сцену, то эти изменения сказываются на значениях яркости $c_1 \dots, c_N$, но разбиение X на области A_1, \dots, A_N остается неизменным. Таким образом, преобразования, не меняющие содержание изображения и позволяющие узнавать объект при любых разрешенных условиях, состоят во всевозможных преобразованиях яркости участков A_1, \dots, A_N поля зрения X . Максимальным инвариантом таких преобразований является проектор в $\mathcal{L}_2(X)$ на N -мерное подпространство, натянутое на векторы $\chi_i \in \mathcal{L}_2(X)$, определенные в (2). Этот проектор и назовем формой изображения объекта.

В морфологическом анализе цветных изображений в качестве модели изображения используется векторнозначная функция, заданная на поле зрения; ее значение в каждой точке поля зрения определяется

спектральными характеристиками объекта и спектральным составом освещения [5]. Форма цветного изображения определяется в зависимости от решаемой задачи как инвариант преобразований яркости, цвета или яркости и цвета исходного изображения [5].

1.2. Сравнение изображений по форме

Заметим, что в рамках описанной выше модели изменение изображения объекта вследствие изменений условия наблюдения можно описать преобразованием $F(\cdot)$, действующим на яркость предъявленного изображения $f(\cdot)$:

$$g(x) = F(f(x)) = \sum_{i=1}^N F(c_i)\chi_i(x), \quad x \in X.$$

Здесь $g(\cdot)$ — изображение объекта, полученное из изображения $f(\cdot)$ вследствие изменения условий наблюдения. Действительно, в результате таких преобразований все точки поля зрения изображения $f(\cdot)$, имеющие одну и ту же яркость c , на изображении g также будут иметь одинаковую яркость $F(c)$, возможно, отличную от c . Однако может случиться так, что две или более области различной яркости изображения $f(\cdot)$ на изображении $g(\cdot)$ будут иметь одну и ту же яркость. В рассматриваемом примере это произойдет, если $F(c_i) = F(c_j)$ при некоторых i и j , $i \neq j$ — в этом случае множества A_i и A_j на изображении $f(\cdot)$ окажутся «склеенными» на изображении $g(\cdot)$. Так как геометрическая форма областей одинаковой яркости изображений при «склеивании» множеств упрощается, можно считать, что изображение $g(\cdot)$ по форме не сложнее, чем $f(\cdot)$.

Опишем эти предложения формально. Рассмотрим класс \mathcal{F} всех (борелевских) функций, определенных на действительной прямой и принимающих числовые значения. Если $F(\cdot) \in \mathcal{F}$, то изображение $F(f(\cdot))$, $f \in \mathcal{L}_2(X)$, можно интерпретировать как изображение, полученное от той же сцены, что и f , но при некоторых измененных условиях регистрации.

Определения. Пусть \mathcal{F} — класс функций, определенных и принимающих значения на действительной прямой, \mathcal{F}_f — подкласс \mathcal{F} , выделенный условием

$$\mathcal{F}_f = \{F(\cdot) \in \mathcal{F}, F(f(\cdot)) \in \mathcal{L}_2(X) \forall f(\cdot) \in \mathcal{L}_2(X)\}.$$

Формой изображения $f(\cdot) \in \mathcal{L}_2(X)$ назовем множество

$$\tilde{V}_f = \{F(f(\cdot)), F(\cdot) \in \mathcal{F}_f\}.$$

Будем говорить, что форма изображения f' не сложнее, чем форма f , и писать $f' \preceq f$, если $f' \in \tilde{V}_f$. Изображения f' и f назовем эквивалентными по форме, если $f' \preceq f$ и $f \preceq f'$. Факт эквивалентности изображений будем отмечать как $f' \sim f$. Изображения f' и f назовем совпадающими по форме, если $\tilde{V}_f = \tilde{V}_{f'}$, в этом случае будем писать $f \equiv f'$.

Согласно этим определениям, форма \tilde{V}_f изображения f состоит из изображений $f' \in \mathcal{L}_2(X)$, для которых выполнено $f' \preceq f$, следовательно, все изображения из \tilde{V}_f сравнимы по форме с f , но не обязательно сравнимы по форме между собой. Что касается других свойств множества \mathcal{F}_f , определяющего модель формирования яркости изображений, то в большинстве случаев его можно считать выпуклым. При этом выпуклым будет и \tilde{V}_f , поскольку, если $f_1 \preceq f$ и $f_2 \preceq f$, то и $af_1 + bf_2 \preceq f$ для любых $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$.

Далее множество \mathcal{F}_f предполагается выпуклым, а \tilde{V}_f — замкнутым в $L_2^\mu(X)$. Выпуклость и замкнутость \tilde{V}_f гарантирует существование оператора P_f проецирования на \tilde{V}_f , который определяется решением следующей задачи наилучшего приближения в $\mathcal{L}_2^\mu(X)$: для любого $g \in \mathcal{L}_2^\mu(X)$

$$\|P_f g - g\|^2 = \inf \left\{ \|f' - g\|^2 \mid f' \in \tilde{V}_f \right\}.$$

Поскольку $P_f g \in \tilde{V}_f$, изображение $P_f g$ является наилучшим приближением изображения g изображениями, форма которых не сложнее, чем форма f ; соответственно, изображение $g - P_f g$ представляет все то, что отличает g по форме от f . Поскольку \tilde{V}_f замкнуто, то $\tilde{V}_f = \{g \in \mathcal{L}_2^\mu(X) : P_f g = g\}$, то есть оператор P_f вполне определяет форму V_f , и его также можно назвать формой изображения f . Заметим, что отношение « \equiv » транзитивно: если $f'' \equiv f'$ и $f' \equiv f$, то $f'' \equiv f$. Что касается отношений « \preceq » и « \sim », то для них свойство

транзитивности в общем случае не выполняется. Оно будет выполняться, если множество \mathcal{F}_f наделить свойствами полугруппы относительно естественной операции композиции функций, а именно, если из включений $F(\cdot) \in \mathcal{F}_f$, $F'(\cdot) \in \mathcal{F}_f$ будет следовать включение $F(F'(\cdot)) \in \mathcal{F}_f$. В этом случае « \equiv » и « \sim » означают одно и то же.

1.3. Узнавание объекта по его изображению и выделение отличий по форме

Пусть дано изображение f некоторого объекта и построена его форма V_f в виде проектора P_f . Задача узнавания объекта по предъявленному изображению g в терминах его формы сводится к проверке равенства $P_f g = g$: если оно выполнено, то можно подобрать условия регистрации, при которых объект породит изображение g , если же нет, то в рамках принятой модели нет никаких оснований узнать в изображении g заданный объект. В этом случае можно определить, чем отличаются по форме изображения f и g : это дается изображением «невязки» $q = g - P_f g$. Величина невязки дает представление о похожести формы предъявленного изображения g на форму изображения f .

1.4. Задача классификации объектов по их изображениям

Пусть дано изображение некоторого объекта и его требуется отнести к одному из заданных классов изображений — форм V_{f_m} , $m = 1, \dots, M$.

В простейшем случае задача классификации ставится как задача поиска минимального расстояния от предъявленного изображения g до множеств V_{f_m} , $m = 1, \dots, M$. Изображение относится к классу V_f , если

$$\|\xi - P_f \xi\|^2 \leq \|\xi - P_{f_m} \xi\|^2, \quad m = 1, \dots, M. \quad (3)$$

Если последнее неравенство выполнено для нескольких классов, то для окончательного принятия решения об однозначной классификации требуются дополнительные сведения.

2. Математическая модель формирования изображения

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой наблюдению доступно изображение, сформированное системой с недостаточной разрешающей способностью. Модель наблюдаемого изображения зададим соотношением

$$\xi = A(\lambda)f + \nu. \quad (4)$$

Здесь изображение ξ задано в конечном числе узлов сетки на поле зрения X ; оно полностью определяется значениями n яркостей в узлах и рассматривается как элемент евклидова пространства \mathcal{R}_n размерности $\dim \mathcal{R}_n = n$. Будем интерпретировать ξ как искаженный шумом ν результат измерения выходного изображения $A(\lambda)f$ линейной системы регистрации. Входное изображение f системы $A(\lambda)$ рассматривается как такое распределение яркости на всем поле зрения X , которое было бы получено от исследуемой сцены с помощью идеальной неразмывающей системы. Будем считать, что f является элементом евклидова пространства $\mathcal{R} = \mathcal{L}_2(X)$, а модель системы регистрации задана в виде линейного ограниченного оператора $A(\lambda) \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n)$, зависящего от неизвестного параметра $\lambda \in \Lambda$. Предполагается, что освещение однородно, объекты сцены достаточно протяженны, а их поверхности оптически однородны, так, что изображение $f(\cdot)$ имеет вид (1). О погрешности $\nu \in \mathcal{R}_n$ будем полагать, что это случайное изображение с нулевым математическим ожиданием $\mathbf{E}\nu = 0$ и корреляционным оператором $\sigma^2 I$, где параметр $0 < \sigma^2 < \infty$ априори неизвестен.

3. Форма размытого изображения

Согласно изложенному выше морфологическому подходу форма изображения определяется, исходя из симметрии задачи. Для поиска симметрии обратимся сначала к ряду вспомогательных задач, после чего дадим общее определение понятия формы изображения.

Задача узнавания сцены по ее размытому и зашумленному изображению при заданном параметре λ_0

Эта задача формулируется как проверка гипотезы о том, что предъявленное изображение $\xi \in \mathcal{R}_n$ является результатом регистрации изображения $f \in \mathcal{R}$ вида (1) с помощью регистрирующей системы, модель которой описывается линейным оператором $A(\lambda_0) \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n)$, где параметр $\lambda_0 \in \Lambda$ задан; шум $\nu \in \mathcal{R}_n$ обладает нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором $\sigma^2 I \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$. Здесь $I \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$ — единичный (тождественный) оператор, шум с таким корреляционным оператором называется белым. Альтернативной является ситуация, когда входное изображение не представимо в виде (1) и(или) параметр λ , определяющий модель измерительной системы, не совпадает с λ_0 . При этом, однако, будем считать, что множество \mathbf{F} возможных сигналов $f \in \mathbf{F} \subset \mathcal{R}$ и множество параметров Λ таковы, что возможные выходные сигналы $A(\lambda)f$ обязательно принадлежат некоторому подпространству $\mathcal{R}_s \subset \mathcal{R}_n$, не совпадающему со всем \mathcal{R}_n .

Такая ситуация возникает, например, в следующей задаче. Пусть требуется узнать изображение некоторого знака на ровном фоне дискретного поля зрения среди заданного набора изображений знаков, действие оператора $A(\lambda)$ при всех $\lambda \in \Lambda$ сводится к размытию изображений знаков, не выходящему за некоторую область $\Omega \subset X$ поля зрения X , состоящую из точек, достаточно близких к области, занимаемой знаками на неразмытом изображении. Тогда \mathcal{R}_s можно задать как пространство изображений вида $\{g(x)\chi_\Omega(x) + \text{const}, x \in X, g(\cdot) \in \mathcal{R}_n\} \subset \mathcal{R}_n$; здесь $\chi_\Omega(\cdot)$ — индикаторная функция множества Ω .

Формально \mathcal{R}_s может быть задано как минимальное линейное подпространство, содержащее объединение $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{f \in \mathbf{F}} A(\lambda)f \subset \mathcal{R}_s \neq \mathcal{R}_n$.

Проектор в \mathcal{R}_n на \mathcal{R}_s обозначим P_0 .

Следуя методике морфологического анализа, запишем преобразования изображения ξ , к которым инвариантны как гипотеза, так и альтернатива, и определим максимальный инвариант (форму) этих преобразований. В терминах этого инварианта и поставим задачу узнавания.

Пусть предъявленное изображение получено от изображения (1) с помощью регистрирующей системы $A(\lambda_0) \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n)$ с заданным параметром $\lambda_0 \in \Lambda$; шум $\nu \in \mathcal{R}_n$ на предъявленном изображении обладает нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором $\sigma^2 I \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$, тогда измерение (4) можно записать в виде

$$\xi = A(\lambda_0)f + \nu = A(\lambda_0) \sum_{i=1}^N c_i \chi_i + \nu \equiv B(\lambda_0)c + \nu, \quad (5)$$

где $c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{R}_N$, — вектор из координатного пространства \mathcal{R}_N размерности N , координаты этого вектора задают яркости соответствующих множеств A_i , $i = 1, \dots, N$ в (1), а оператор $B(\lambda) \in (\mathcal{R}_N \rightarrow \mathcal{R}_n)$ определен для любого $c \in \mathcal{R}_N$ и $\lambda \in \Lambda$ равенством

$$B(\lambda)c = \sum_{i=1}^N c_i A(\lambda)\chi_i. \quad (6)$$

Таким образом, при верной гипотезе, математическое ожидание предъявленного изображения ξ принадлежит пространству значений $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$ оператора $B(\lambda_0) \in (\mathcal{R}_N \rightarrow \mathcal{R}_n)$: $\mathcal{R}(B) = \{z \in \mathcal{R}_n : z = By, y \in \mathcal{R}_N\}$.

Теперь гипотезу можно переформулировать следующим образом: она состоит в том, что изображение ξ есть сумма «полезного сигнала» из пространства $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$, и шума ν с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $\sigma^2 I$ с неизвестным параметром $\sigma^2 > 0$. Альтернатива состоит в том, что «полезный сигнал» не принадлежит $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$, но лежит в подпространстве $\mathcal{R}_s \subset \mathcal{R}_n$, $\mathcal{R}_s \neq \mathcal{R}_n$.

Изменения условий регистрации изображения f , не изменяющие сформулированные гипотезу и альтернативу, моделируются произвольным изменением яркостей c_j изображения f , а также изменением амплитуды шума ν (так как его дисперсия априори неизвестна). Кроме того, гипотеза и альтернатива не изменятся и при любом ортогональном преобразовании, оставляющем инвариантными подпространства $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$ и \mathcal{R}_s . Эти преобразования составляют группу $G_0 \in \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n$, определенную следующими соотношениями:

$$\gamma\varphi = kU_0(\varphi + \psi_0), \quad \varphi \in \mathcal{R}_n, \quad \gamma = \gamma(\psi_0, k, U_0) \in G_0, \quad (7)$$

где $\psi_0 \in \mathcal{R}(B(\lambda_0)) \subset \mathcal{R}_n$ — изображение вида (6) при $\lambda = \lambda_0$, $k > 0$ — константа, а оператор $U_0 \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$ задает ортогональное преобразование, оставляющее инвариантными подпространство $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$ и подпространство \mathcal{R}_s .

Лемма 1. *Максимальным инвариантом группы преобразований G_0 , определенной в (7), является функция*

$$j(\varphi) = \frac{\|P_0(I - P_{B(\lambda_0)})\varphi\|^2}{\|(I - P_0)\varphi\|^2}, \quad \varphi \in \mathcal{R}_n, \quad (8)$$

где $P_{B(\lambda_0)}$ — проектор в \mathcal{R}_n на подпространство $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$ значений оператора $B(\lambda_0)$. Значение $j(\xi)$ определено с вероятностью единица.

Доказательство. Покажем, что для любого $\gamma \in G_0$ и для любого $\varphi \in \mathcal{R}_n$ выполнено $j(\gamma\varphi) = j(\varphi)$. Действительно, в силу свойств нормы и ортогонального оператора U , перестановочного с проекторами P_0 и $P_{B(\lambda_0)}$, имеем:

$$j(\gamma\varphi) = \frac{\|P_0(I - P_{B(\lambda_0)})kU_0(\varphi + \psi_0)\|^2}{\|(I - P_0)kU_0(\varphi + \psi_0)\|^2} = \frac{k^2\|U_0P_0(I - P_{B(\lambda_0)})\varphi\|^2}{k^2\|U_0(I - P_0)\varphi\|^2} = j(\varphi).$$

Покажем теперь, что если $j(\varphi_1) = j(\varphi_2)$, то $\varphi_1 = \gamma\varphi_2$ для некоторого $\gamma \in G_0$. В самом деле, равенство $j(\varphi_1) = j(\varphi_2) \neq 0$ эквивалентно равенству

$$\frac{\|P_0(I - P_{B(\lambda_0)})\varphi_1\|^2}{\|P_0(I - P_{B(\lambda_0)})\varphi_2\|^2} = \frac{\|(I - P_0)\varphi_1\|^2}{\|(I - P_0)\varphi_2\|^2} = k^2,$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned} \|P_0(I - P_{B(\lambda_0)})\varphi_1\|^2 &= \|P_0(I - P_{B(\lambda_0)})k\varphi_2\|^2, \\ \|(I - P_0)\varphi_1\|^2 &= \|(I - P_0)k\varphi_2\|^2, \quad k > 0. \end{aligned}$$

Из равенства норм проекций $P_0(I - P_{B(\lambda_0)})\varphi_1$ и $P_0(I - P_{B(\lambda_0)})k\varphi_2$ элементов $\varphi_1 \in \mathcal{R}_n$ и $k\varphi_2 \in \mathcal{R}_n$ на одно и то же подпространство

$\mathcal{R}(P_0(I - P_{B(\lambda_0)})) \subset \mathcal{R}_n$ следует, что найдется линейный оператор $U_1 \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$, осуществляющий ортогональное преобразование подпространства $\mathcal{R}(P_0(I - P_{B(\lambda_0)}))$ и действующий как тождественный оператор в ортогональном к $\mathcal{R}(P_0(I - P_{B(\lambda_0)}))$ подпространстве, такой, что

$$P_0(I - P_{B(\lambda_0)})\varphi_1 = U_1 P_0(I - P_{B(\lambda_0)})k\varphi_2.$$

Аналогично, из равенства норм проекций $(I - P_0)\varphi_1$ и $(I - P_0)k\varphi_2$ следует, что найдется линейный оператор $U_2 \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$, осуществляющий ортогональное преобразование подпространства $\mathcal{R}(I - P_0)$ и действующий как тождественный оператор в ортогональном к $\mathcal{R}(I - P_0)$ подпространстве, такой, что

$$(I - P_0)\varphi_1 = U_2(I - P_0)k\varphi_2.$$

Обозначим U_3 ортогональное преобразование $\mathcal{R}(B(\lambda_0)) \subset \mathcal{R}_n$, не изменяющее ортогональное дополнение к $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$. В силу ортогональности пространств $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$, $\mathcal{R}(P_0(I - P_{B(\lambda_0)}))$ и $\mathcal{R}(I - P_0)$, составляющих в сумме все пространство \mathcal{R}_n , для элементов $\varphi_1 \in \mathcal{R}_n$ и $k\varphi_2 \in \mathcal{R}_n$ и для ортогонального преобразования $U_0 = U_1 + U_2 + U_3$ выполнены равенства

$$\varphi_1 = kU_0\varphi_2 + \hat{\psi}_0 = kU_0(\varphi_2 + \psi_0),$$

где $\hat{\psi}_0 = U_3\psi_0$, $\hat{\psi}_0, \psi_0 \in \mathcal{R}(B(\lambda_0))$, а ортогональное преобразование $U_0 \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$ оставляет инвариантными подпространства $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$, $\mathcal{R}(P_0(I - P_{B(\lambda_0)}))$ и $\mathcal{R}(I - P_0)$, а значит, и \mathcal{R}_s .

Если же $j(\varphi_1) = j(\varphi_2) = 0$, то $P_0(I - P_{B(\lambda_0)})(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, следовательно,

$$P_0\varphi_1 = P_0\varphi_2 + \psi_0, \quad \psi_0 \in \mathcal{R}(B(\lambda_0)). \quad (9)$$

Кроме того, $(I - P_0)\varphi_1 \neq 0$, $(I - P_0)\varphi_2 \neq 0$, а значит, $(I - P_0)\varphi_1 = kU_0\varphi_2$, $k > 0$. Объединяя это соотношение с (9), получим, что и в этом случае $\varphi_1 = kU_0(\varphi_2 + \psi_0)$, $\psi_0 \in \mathcal{R}(B(\lambda_0))$.

Так как ξ , согласно принятой модели, является случайным элементом пространства \mathcal{R}_n с невырожденным корреляционным оператором, то с вероятностью единица его проекция на ортогональное дополнение к \mathcal{R}_s отлична от нуля. Лемма доказана.

Утверждение леммы 1 позволяет ввести следующее определение.

Определение. Функцию $j(\cdot)$, определенную соотношением (8), заданную на \mathcal{R}_n и принимающую числовые значения, назовем формой изображения вида (1), наблюдаемого с помощью системы регистрации $A(\lambda_0)$ в условиях некоррелированных шумов неизвестной дисперсии.

Морфологический подход к решению задачи узнавания сцены по его размытому и зашумленному изображению основан на следующих рассуждениях. Значение знаменателя $\|(I - P_0)x\|^2$ инварианта $j(\cdot)$ как при верной гипотезе (предъявлено изображение сцены), так и при верной альтернативе (предъявленное изображение нельзя получить от заданной сцены ни при каких условиях наблюдения из заданного класса) определяется величиной проекции случайного вектора $\nu \in \mathcal{R}_n$ на ортогональное в \mathcal{R}_n дополнение к пространству \mathcal{R}_s . Числитель же $\|P_0(I - P_{B(\lambda_0)}) \cdot \|^2$ при верной гипотезе определяется только проекцией шума на подпространство, ортогональное к $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$, но лежащее в \mathcal{R}_s . Если же верна альтернатива, то к шумовой составляющей добавится еще и составляющая сигнала $A(\lambda)f \notin \mathcal{R}(B(\lambda_0))$. Таким образом, меньшие значения $j(\xi)$ свидетельствуют, скорее, в пользу гипотезы, чем в пользу альтернативы. Таким образом, алгоритм морфологического узнавания сцены f по ее зашумленному размытому изображению, состоит в следующем:

если

$$j(\xi) \leq \varepsilon, \quad (10)$$

то считается, что на предъявленном изображении запечатлена заданная сцена. На практике значение порога ε вбирается адаптивно.

Задача классификации размытых и зашумленных изображений

Пусть теперь задан набор из K сцен, идеальные изображения которых отличаются разбиениями поля зрения X на множества $A_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, K$, и предъявляется изображение одной из этих сцен, сформированное согласно схеме (4). О параметре системы регистрации λ известно лишь, что $\lambda \in \Lambda$. Пусть каждому фиксиро-

ванному параметру $\lambda \in \Lambda$ и каждому разбиению $\{A_i^{(k)}\}$, $k = 1, \dots, K$, сопоставлен инвариант

$$j(x; k, \lambda) = \frac{\|P_0(I - P_{B^{(k)}(\lambda)})x\|^2}{\|(I - P_0)x\|^2}, \quad x \in \mathcal{R}_n; \quad (11)$$

здесь $P_{B^{(k)}(\lambda)}$ — проектор на пространство значений оператора $B^{(k)}(\lambda) \in (\mathcal{R}_N \rightarrow \mathcal{R}_n)$, определенного для каждого $c \in \mathcal{R}_N$ соотношением

$$B^{(k)}(\lambda)c = \sum_{i=1}^N c_i A(\lambda) \chi_i^{(k)}, \quad (12)$$

где $\chi_i^{(k)}$ — характеристическая функция множества $A_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, K$. Как показано в предыдущем пункте, чем меньше значение инварианта $j(x; k, \lambda)$, тем более правдоподобна гипотеза о том, что изображение ξ порождено сценой с номером k и сформировано системой, описываемой параметром λ . Отсюда следует морфологическое правило классификации: изображение ξ относится к сцене с номером k_0 , если для всех $k = 1, \dots, K$, выполнено

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} j(\xi; k_0, \lambda) \leq \inf_{\lambda \in \Lambda} j(\xi; k, \lambda). \quad (13)$$

Если равенство в (13) выполнено не для единственного индекса, то выбор среди всех тех k_0 , для которых в (13) выполняется равенство, так же, как для случая (3), производится на основе дополнительных данных.

Морфологическое оценивание параметра λ

Если точная нижняя грань в (3) достигается на значении $\{\lambda_0, k_0\}$ параметров $\lambda \in \Lambda$, $k = \{1, \dots, K\}$, то благодаря рассмотренным выше свойствам формы $j(\cdot)$, значение λ_0 можно принять за оценку параметра измерительной системы:

$$j(\xi; k_0, \lambda) \leq \inf_{\lambda \in \Lambda, k \in \{1, \dots, K\}} j(\xi; k, \lambda). \quad (14)$$

Для исследования свойств решения задач узнавания, классификации и оценивания параметра λ следует несколько уточнить стохастическую модель шума, что и сделано в следующих разделах.

4. Наиболее мощный инвариантный критерий проверки гипотезы о форме изображения

Пусть далее, в дополнение к модели измерения, описанной в предыдущем пункте, известно, что вектор измерительной погрешности $\nu \in \mathcal{R}_n$ контролируется нормальным распределением $\mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$, где $\sigma^2 > 0$ — неизвестный параметр. Тогда задача узнавания сцены по ее изображению при известном параметре λ_0 может быть сформулирована как задача проверки статистической гипотезы [6,7] о параметре распределения вектора $\xi \in \mathcal{R}_n$

$$\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2 I), \quad a \in \mathcal{R}(B(\lambda_0)), \quad \sigma^2 > 0, \quad (15)$$

против альтернативы

$$\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2 I), \quad a \in \mathcal{R}^\perp(B(\lambda_0)) \cap \mathcal{R}_s, \quad \sigma^2 > 0. \quad (16)$$

Пусть $\overline{G_0}$ — группа преобразований пространства $\Theta = \Theta_H \cap \Theta_K$, в котором принимает значение параметр θ распределения случайного элемента $\xi \in \mathcal{R}_n$, G_0 — группа преобразований выборочного пространства \mathcal{R}_n . Задача проверки гипотезы $H = \{\theta \in \Theta_H\}$ о значении параметра θ случайного элемента ξ против альтернативы $K = \{\theta \in \Theta_K\}$ является $(\overline{G_0}, G_0)$ -инвариантной, если выполнены следующие два условия.

- 1) Семейство распределений $\mathcal{P}_\theta(\cdot)$ является инвариантным относительно групп преобразований G_0 и $\overline{G_0}$, то есть для любого борелевского множества $B \in \mathcal{R}_n$ выполнено равенство

$$\mathcal{P}_\theta(\gamma\xi \in B) = \mathcal{P}_{\overline{\gamma}\theta}(\xi \in B)$$

для $\gamma \in G_0$, $\overline{\gamma} \in \overline{G_0}$.

- 2) Множества Θ_H и Θ_K являются инвариантными относительно $\overline{G_0}$, то есть если $\theta \in \Theta_H$, то и $\overline{\gamma}\theta \in \Theta_H$ для любого $\overline{\gamma} \in \overline{G_0}$, а если $\theta \in \Theta_K$, то и $\overline{\gamma}\theta \in \Theta_K$ для любого $\overline{\gamma} \in \overline{G_0}$.

В рассматриваемом случае параметром θ нормального распределения вектора $\xi \in \mathcal{R}_n$ является пара $\{\mathbf{E}\xi, \sigma\}$. Каждому преобразованию $\gamma = (\psi_0, k, U_0) \in G_0$ случайного вектора $\xi \in \mathcal{R}_n$, определенному в (7), сопоставим преобразование параметра его распределения, определенное для каждого $\theta = \{a, \sigma\}$ соотношением

$$\bar{\gamma}(a, \sigma) = (k^{-1}U_0^*(a - U_0\psi_0), \sigma/k). \quad (17)$$

Множество преобразований вида (17), образующееся, когда γ пробегает все значения из G_0 , составляет группу преобразований \bar{G}_0 пространства параметров Θ .

Теорема 1. *Задача проверки гипотезы (15) против альтернативы (16) (\bar{G}_0, G_0) -инвариантна, где группа G_0 определена соотношением (7), а группа \bar{G}_0 — соотношением (17). Наиболее мощный инвариантный критерий уровня α дается критическим множеством S_α с характеристической функцией*

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & j(x) > C, \\ 0, & j(x) \leq C, \end{cases} \quad (18)$$

где константа C определена равенством $\Phi((Ct_2)/t_1) = \alpha$, $\Phi_{(m_1, m_2)}(\cdot)$ — функция распределения Снедекора-Фишера с (m_1, m_2) степенями свободы, t_1 — размерность пространства $\mathcal{R}_s \cap \mathcal{R}^\perp(B(\lambda_0))$, t_2 — размерность пространства \mathcal{R}_s^\perp , функция $j(\cdot)$ определена в (8).

Доказательство. Покажем сначала инвариантность нормального распределения. Действительно, при $\gamma = (\psi_0, k, U_0) \in G_0$ выполнено

$$\begin{aligned} P_\theta\{\gamma\xi \in B\} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma} \int_{x \in B} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|kU_0(x + \psi_0) - a\|^2} d(kU_0x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma/k} \int_{x \in B} e^{-\frac{1}{2(\sigma/k)^2} \|x - k^{-1}U_0^{-1}(a - U_0\psi_0)\|^2} dx = P_{\bar{\gamma}\theta}\{\xi \in B\}, \end{aligned}$$

где преобразование $\bar{\gamma} = (U_0\psi_0, k^{-1}, U_0^*; k^{-1}) \in \overline{G_0}$, соответствующее преобразованию $\gamma = (\psi_0, k, U_0) \in G_0$, для любого $\gamma \in \Theta$ определяется соотношением (17), где $k^{-1} > 0$, $U_0\psi_0 \in \mathcal{R}(B(\lambda_0))$, а $U_0 \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$ — ортогональный оператор, оставляющий инвариантными пространство \mathcal{R}_S и $\mathcal{R}(B(\lambda_0))$. Следовательно, семейство распределений $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I)$ ($G_0, \overline{G_0}$)-инвариантно.

Области Θ_H и $\Theta_K \overline{G_0}$ -инвариантны в силу определения группы преобразований $\overline{G_0}$. Проверка гипотезы, обладающей указанной симметрией, осуществляется в терминах максимального инварианта группы G_0 , которым, как указано в лемме 1, является функция, определенная в (8):

$$j(\cdot) = \frac{\|P_0(I - P_{B(\lambda_0)}) \cdot\|^2}{\|(I - P_0) \cdot\|^2}.$$

При верной гипотезе дробь $\eta(\xi) = (m_2/m_1) j(\xi)$ имеет распределение Снедекора-Фишера с (m_1, m_2) степенями свободы, где m_1 — размерность пространства $\mathcal{R}_S \cap \mathcal{R}^\perp(B(\lambda_0))$, а m_2 — размерность пространства \mathcal{R}_S^\perp . В случае же верной альтернативы распределение $\eta(\xi)$ является нецентральным, и таким образом, задача сводится к проверке гипотезы о равенстве нулю параметра нецентральности распределения Снедекора-Фишера. Как известно [6, 7], в такой задаче существует равномерно наиболее мощный критерий, который определяется критической областью с характеристической функцией (18). Теорема доказана.

Таким образом, предположение о классе распределений случайной погрешности наблюдения изображения позволяет сформулировать оптимальное решающее правило решения задачи узнавания заданной сцены по его размытому зашумленному изображению, совпадающее с морфологическим правилом решения (10). Заметим, что морфологическое правило сформулировано без предположения о нормальности распределения погрешности.

5. Оценивание параметра λ как минимизация необходимости ошибки

Дальнейшее исследование решения задачи классификации проведем, основываясь на формализме теории возможностей [8]. Основная идея этого пункта состоит в том, что всякое измерение индуцирует на множестве параметров меру возможности и дуальную к ней меру необходимости. Воспользовавшись ими, можно поставить задачу оценивания или принятия решения как задачу минимизации возможности и (или) необходимости ошибки.

Построим указанные меры, следуя работе [8], для чего проведем несколько формальных построений. Пусть $\xi \in \mathcal{R}_n$ — случайный вектор, контролируемый распределением вероятностей $P_\theta(\cdot)$, зависящим от параметра $\theta \in \Theta$, $Z \in \Theta \otimes \Theta$ — симметричное антирефлексивное отношение, задающее взаимоднозначное отображение $\Theta \rightarrow \Theta$, то есть если $(\theta_0, \theta_1) \in Z$, то $\theta_0 \neq \theta_1$ и $(\theta_1, \theta_0) \in Z$, причем отношение Z определяет функции $\theta_1 = \theta_1(\theta_0)$, $\theta_0 \in \Theta$ и $\theta_0 = \theta_0(\theta_1)$, $\theta_1 \in \Theta$. Для семейства статистических задач проверки гипотез рассмотрим семейство пар «гипотеза — альтернатива» $(\theta_0, \theta_1) \in Z$ и для каждого $\alpha \in [0, 1]$ в $\mathcal{R}_n \otimes \Theta$ определим дискриминантное множество

$$D_\alpha = \bigcup_{(\theta_0, \theta_1) \in Z} \Phi(\theta_0, \theta_1, \alpha) \otimes \{\theta_0\} = \\ = \{(\xi, \theta_0) \in \mathcal{R}_n \otimes \Theta, (\theta_0, \theta_1) \in Z : \xi \in \Phi(\theta_0, \theta_1, \alpha)\},$$

где $\Phi(\theta_0, \theta_1, \alpha)$ — область принятия гипотезы $\theta = \theta_0$ при альтернативе $\theta = \theta_1$ наиболее мощного критерия уровня α на основании наблюдения ξ . Для каждого $\xi \in \mathcal{R}_n$ определим подмножество

$$\Psi(\xi, \alpha) = \{\theta_0 \in \Theta : (\xi, \theta_0) \in D_\alpha\} \subset \Theta,$$

которое назовем оценивающим множеством уровня доверия α . При этом, очевидно, для любой реализации $\xi \in \mathcal{R}_n$ и для любых значений параметров $\theta_0 \in \Theta$, $(\theta_0, \theta_1) \in Z$, включение $\xi \in \Phi(\theta_0, \theta_1, \alpha)$, $\theta_0 \in \Psi(\xi, \alpha)$ и $(\xi, \theta_0) \in D_\alpha$ эквивалентны, а следовательно, для любых $(\theta_0, \theta_1) \in Z$, $\alpha \in [0, 1]$ и для произвольного $\theta \in \Theta$

$$P_\theta(\xi \in \Phi(\theta_0, \theta_1)) = P_\theta(\theta_0 \in \Psi(\xi, \alpha)),$$

и в частности, $P_{\theta_0}(\theta_0 \in \Psi(\xi, \alpha)) = \alpha$. Здесь множество $\Psi(\xi, \alpha)$ можно понимать как случайное, покрывающее и оценивающее истинное значение параметра $\theta_0 \in \Theta$ с вероятностью α . Заметим, что множество $\Psi(\xi, \alpha)$ выделяется среди других оценивающих множеств $\tilde{\Psi}(\xi, \alpha)$ уровня p тем, что для любых $(\theta_0, \theta_1) \in Z$ выполнено неравенство

$$P_{\theta_1}(\theta_0 \in \Psi(\xi, \alpha)) \leq P_{\theta_1}(\theta_0 \in \tilde{\Psi}(\xi, \alpha)),$$

что выражает свойство оптимальности оценивающего множества, так как если для некоторого $\theta_0 \in \Theta$ параметр распределения равен $\theta_1 = \theta_1(\theta_0)$, то вероятность включения $\theta_0 \in \Psi(\xi, \alpha)$, влекущего ошибочное принятие гипотезы, не превосходит вероятность включения $\theta_0 \in \tilde{\Psi}(\xi, \alpha)$ для любого оценивающего множества того же уровня α . Выполнено также условие несмещенности

$$P_{\theta_1}(\theta_0 \in \Psi(\xi, \alpha)) \leq \alpha.$$

Кроме того, для уровня $\alpha' \leq \alpha$ выполнено включение

$$\Psi(\xi, \alpha) \subseteq \Psi(\xi, \alpha').$$

Исходя из этих неравенств, представляется возможным заключить, что чем больше минимальное $\alpha \in [0, 1]$, при котором выполнено $\theta_0 \in \Psi(\xi, \alpha)$, тем меньше возможность того, что истинное значение θ параметра распределения принимает значение θ_0 . Иначе говоря, величина

$$\varphi^\xi(\theta_0) = 1 - \inf\{\alpha \mid \alpha \in [0, 1], \theta_0 \in \Psi(\xi, \alpha)\} \quad (19)$$

задает возможность равенства $\theta = \theta_0$, где $\theta \in \Theta$ — истинное значение параметра, то есть $\varphi^\xi(\theta_0)$, $\theta \in \Theta$ — распределение возможностей на множестве параметров, возникающее в результате наблюдения реализации ξ .

Рассмотрим теперь случай, соответствующий рассматриваемой проблеме классификации изображения и определения параметра $\lambda \in \Lambda$ регистрирующей системы, которая сводится к проблеме оценивания параметра $\theta = (k, \lambda)$, $k = 1, \dots, K$, $\lambda \in \Lambda$. Построим распределение возможностей на множестве $\Theta = \{\{1, \dots, K\} \otimes \Lambda\}$, и определим оценку параметра θ , исходя из принципа минимальной возможности ошибки [8].

Определим гипотезу H равенством $\theta = \theta_0$ и альтернативу $K = \{\Theta \setminus \theta_0\}$. Как было показано выше, область принятия гипотезы

$$\Psi(\xi, \alpha) = \{x \in \mathcal{R}_n, j(x; k_0, \lambda_0) \leq C\}$$

не зависит от частной альтернативы; здесь функция $j(\cdot; \cdot, \cdot)$ определена в (11), а константа C — в теореме 1.

Решение задачи классификации и оценивания параметра $\lambda \in \Lambda$ строится как решение задачи минимизации необходимости ошибки. Следуя [8], введем функцию возможности ошибки $l(\cdot, \cdot)$, определенную на $\Theta \otimes \Theta$, так что ее значение $l(\theta_d, \theta_n) \in [0, 1]$ задает возможность ошибиться, если в качестве оценки параметра $\theta \in \Theta$ выбирается значение θ_d , в то время как истинное значение параметра равно θ_n . Тогда величина

$$\mathcal{P}(\theta_d) = \sup_{\theta_n} \min\{\varphi^\xi(\theta_n), l(\theta_d, \theta_n)\}, \quad \theta_d \in \Theta,$$

определяет возможность ошибки при выборе оценки $\theta = \theta_d$. \mathcal{P} -оптимальной оценкой является оценка, минимизирующая $\mathcal{P}(\theta_d)$, $\theta_d \in \Theta$. Соответственно, величина

$$\mathcal{N}(\theta_d) = \inf_{\theta_n} \max\{1 - \varphi^\xi(\theta_n), l(\theta_d, \theta_n)\}, \quad \theta_d \in \Theta, \quad (20)$$

определяет необходимость ошибки, соответствующей выбору θ_d как оценки θ . \mathcal{N} -оптимальной оценкой является оценка, минимизирующая $\mathcal{N}(\theta_d)$, $\theta_d \in \Theta$.

Если, в частности, в (20) возможность ошибки $l(\cdot, \cdot)$ равна нулю только при $\theta_d = \theta_n$, а при нарушении этого равенства возможность ошибки больше нуля и произвольна, \mathcal{N} -оптимальная оценка определяется из вариационной задачи [8]

$$\theta_d = \arg \inf\{\varphi^\xi(\theta)\},$$

называемой оценкой максимальной возможности.

Теорема 2. Пусть изображение ξ сформировано согласно схеме (4), $\lambda \in \Lambda$, форма изображения f принадлежит одной из форм, заданных в соответствии с (12), $k = 1, \dots, K$, а погрешность измерения

имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором $\sigma^2 I$ с неизвестным параметром $\sigma^2 > 0$. Тогда оценка максимальной возможности параметра $\theta = (k, \lambda) \in \Theta$ совпадает с оценкой, полученной в (13), (14).

Доказательство. Запишем полученное выше распределение возможностей для нечеткого параметра θ в виде

$$\begin{aligned} \varphi^\xi(\theta_0) &= 1 - \inf \{ \alpha | 0 \leq \alpha \leq 1, \theta_0 \in \Psi(\xi, \alpha) \} = 1 - \inf \{ \alpha | \xi \in \Phi(\theta_0, \alpha) \} = \\ &= 1 - \inf \left\{ \int_{j(x; k, \lambda) \leq C} p_H(x) dx \mid j(\xi; k, \lambda) \leq C \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

где $p_H(\cdot)$ — плотность распределения ξ при верной гипотезе. Для уменьшения значения интеграла в (21) следовало бы уменьшать область интегрирования, уменьшая константу C . Однако в силу наложенных ограничений это можно делать только до тех пор, пока ξ принадлежит множеству $\Phi(\theta_0, \alpha)$. Следовательно, константу C следует выбрать равной $j(\xi; k, \lambda)$, так, чтобы значение ξ попало на границу критической области. Таким образом, искомое распределение возможностей на множестве параметров дается соотношением

$$\varphi^\xi(\theta_0) = 1 - \inf_{j(x; k, \lambda) \leq j(\xi; k, \lambda)} \int p_H(x) dx = \int_{j(x; k, \lambda) > j(\xi; k, \lambda)} p_H(x) dx,$$

и для нахождения максимума возможности $\varphi^\xi(\theta_0)$ выбором параметра θ_0 следует минимизировать значение $j(\xi; k, \lambda)$, что приводит к вариационным задачам (13) и (14). Теорема доказана.

Таким образом, оптимальные оценки параметров изображения сцены при известном классе распределения случайной погрешности эквивалентны оценкам, полученным морфологическим методом, не использующим для своего обоснования информации о распределении погрешности.

6. Вычислительный эксперимент

Проиллюстрируем эффективность морфологических методов на примере решения задачи узнавания знака 1 среди изображений знаков 0, 1, 7, 8, 9 по их размытым, зашумленным и сдвинутым по полю зрения изображениям, и задачи оценивания параметра сдвига изображения.

Все изображения знаков из перечисленного набора моделировались кусочно-постоянными функциями, состоящими из двух областей разбиения — фона и знака — с различными яркостями; предъявляемое изображение задавалось на прямоугольной сетке размера 79×79 узлов, область, содержащая изображение размытой точки, имела размер 5×5 узлов. Размытие осуществлялось в соответствии со следующей моделью:

$$g(x_{i,j}) = \int_{y \in X} a(x_{i,j} - y - \lambda) f(y) dy,$$

здесь $a(\cdot)$ — заданная функция размытия точки, $\lambda \in \Lambda$ — неизвестный параметр сдвига.



Рис. 1. Исходные изображения знаков.

На рис. 1 а–д, приведены исходные (неразмытые и незашумленные) изображения знаков, на рис. 1 е, — размытое изображение знака 1.



Рис. 2. Размытые и зашумленные изображения.

На рис. 2 а–в, приведены предъявляемые для анализа изображения знаков 1, 7 и 0, соответственно. В этой ситуации алгоритм безошибочно распознавал изображения «единицы» среди предъявляемых изображений.

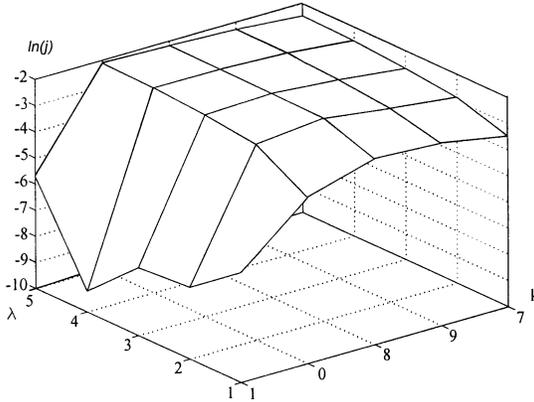


Рис. 3. Значение логарифма инварианта $j(\xi; k, \lambda)$ в зависимости от k и λ .

На рис. 3 в логарифмическом масштабе приведены значения инварианта $\ln(j(\xi; k, \lambda))$, которые он принимает на изображении ξ знака $k_0 = 1$ при значении сдвига $\lambda_0 = 4$, в зависимости от параметра сдвигов $\lambda_i = i$, $i = 1, \dots, 5$ и от «номера» знака k : порядок следования знаков слева направо: 1, 0, 8, 9, 7. Из рисунка видно, что минимум достигается при $k = k_0$, $\lambda = \lambda_0$.

7. Выводы

Предложены морфологические методы решения задач узнавания и классификации объектов по их зашумленным и размытым изображениям, а также морфологический метод оценивания параметров системы, формирующей изображения. В вычислительном эксперименте показана высокая помехозащищенность методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02–01–00579).

Список литературы

- [1] Пытьев Ю. П. Морфологический анализ изображений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 5. С. 1061–1064.
- [2] Пытьев Ю. П. Задачи морфологического анализа изображений // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из Космоса. М.: Наука, 1984.
- [3] Pyt'ev Yu. P. Morphological Image Analysis // Pattern Recognition and Image Analysis. 1993. V. 3, No 1. P. 19–28.
- [4] Пытьев Ю. П., Чуличков А. И. ЭВМ анализирует форму изображения. М.: Знание, 1988.
- [5] Pyt'ev Yu. P. The Morphology of Color (Multispectral) Images // Pattern Recognition and Image Analysis. 1997. V. 7, No 4. P. 467–473.
- [6] Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.
- [7] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.
- [8] Пытьев Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.