

Сверхразрешение на основе конечномерной аппроксимации сигналов

А. И. Чуличков, И. В. Богданов, Д. М. Устинин

Предложен метод редукции результата измерения выходного сигнала датчика с недостаточно высоким разрешением к виду, свойственному измерению на идеальном измерительном приборе. Для редукции используется конечномерная аппроксимация измеряемых параметров исследуемого объекта, причем размерность и параметры аппроксимации выбираются на основе измерения выходного сигнала датчика согласованно с его разрешающей способностью и точностью измерения.

1. Введение

При анализе результатов измерительных экспериментов из-за недостаточной разрешающей способности регистрирующих систем довольно часто многие особенности сигналов, характеризующих исследуемый объект, оказываются смазанными и неразличимыми на фоне измерительных шумов. Увеличить разрешение путем технического совершенствования измерительных систем не удастся из-за фундаментальных запретов (дифракционных, термодинамических и т. п.) Действительно, например, из-за эффектов дифракции на изображениях принципиально незаметны детали с угловым размером менее чем λ/D , где λ — длина волны, а D — размер апертуры оптической системы. Однако, если известна математическая модель, в соответствии с которой формируется сигнал, и задан класс измеряемых сигналов, то увеличить разрешение можно с помощью методов теории измерительно-вычислительных систем [1–3]. Эта проблема реша-

ется путем математического преобразования (редукции) результата измерения к виду, какой он имел бы при использовании «идеальной» регистрирующей системы с разрешением, возможно, более высоким, чем позволяют дифракционные и другие ограничения [1].

Методы редукции основаны на анализе математической модели, связывающей результат измерения с параметрами изучаемого объекта. При этом, как известно, чем меньше априорная неопределенность значений параметров объекта, тем точнее оказывается результат редукции. В данной работе предполагается, что изучаемый объект с некоторой точностью характеризуется конечной линейной комбинацией сигналов. Эти сигналы, с одной стороны, принадлежат классу, выбираемому исследователем так, чтобы охарактеризовать наиболее важные с точки зрения решаемой задачи свойства объекта. Параметры этих сигналов и число слагаемых линейной комбинации уточняются на основании результата измерения: предположение о том, что сигнал от объекта может быть представлен в виде выбранной линейной комбинации, не должно противоречить результату измерения.

Поясним, как выбирается эта линейная комбинация. Например, в задачах спектроскопии есть участки спектра, в которых зависимость энергии излучения от длины волны представляет собой набор линий, положение и форма которых априори известны лишь с некоторой точностью. Так как реальный спектрометр обладает конечной разрешающей способностью, то часть информации о структуре линий теряется: близко расположенные линии сливаются в одну, искажаются их амплитуды и т. п. Если исследователь не знает точное количество и форму линий, то естественной представляется следующая стратегия: следует подобрать минимальное количество линий такой формы, чтобы расчетный отклик спектрометра на их комбинацию в наибольшей степени согласовывался бы с результатом измерения, и при этом условии их амплитуды оценивались бы максимально точно.

Аналогичная ситуация встречается при исследовании динамических систем с помощью измерителя ее параметров, обладающего конечным временным разрешением. В этом случае все время эволюции системы можно разбить на участки характерного движения: для перемещающейся цели, например, это интервалы равномерного прямолинейного движения, интервалы ускорений и т. п., однако как пара-

метры движения, так и времена различного типа движений должны выбираться на основании результатов наблюдений.

Еще один важный пример дают исследования достаточно протяженных объектов заданного размера по их изображениям: в этом случае идеальное изображение объекта можно представить набором участков постоянной яркости, передающих особенности светоотражающих поверхностей объектов [4, 5], но ни их расположение, ни яркости априори задать не удастся. В этой ситуации класс исследуемых сигналов составляют линейные комбинации характеристических функций разбиения поля зрения на множества с неизвестными границами. Форма этих множеств должна наилучшим образом согласовываться с предъявленным изображением, а яркость или цвет определяться наиболее точно.

Подчеркнем, что ни значение параметров векторов линейной комбинации, ни их число при подходе, предлагаемом в данной статье, априори неизвестны. В настоящей работе они выбираются на основе измерения выходного сигнала измерительного датчика. В процессе измерения входной сигнал искажается датчиком и шумом, и естественно, информация об объекте изучения частично теряется. Поэтому выбираемая модель входного сигнала, с одной стороны, может быть достаточно идеализированной, то есть отличаться от реального входного сигнала. С другой стороны, это отличие не должно быть заметно в выходном сигнале, маскируясь искажениями датчика и шума. В этом смысле будем говорить не о точной модели входного сигнала, а о ее аппроксимации, согласованной с результатом измерения.

На основе математической модели входного сигнала, в наибольшей степени согласующейся с результатом эксперимента, в работе решаются задачи наиболее точной редукции измеренного сигнала к заданному виду.

2. Математическая модель измерения

Будем считать, что сигнал f измеряется в эксперименте по схеме

$$\xi = Af + \nu. \quad (1)$$

Сигнал ξ интерпретируется как искаженный шумом ν результат измерения выходного сигнала Af линейной системы регистрации, на вход которой подан сигнал $f \in \mathcal{R}$, где \mathcal{R} — евклидово пространство. Обозначение A будем использовать как для самого регистрирующего прибора, так и для его математической модели, заданной в виде линейного ограниченного оператора $A \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n)$. О погрешности ν будем полагать, что этот случайный вектор имеет нулевое математическое ожидание $\mathbf{E}\nu = 0$ и известен его корреляционный оператор $\Sigma \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$, определенный для любого вектора $x \in \mathcal{R}_n$ равенством $\Sigma x = \mathbf{E}(x, \nu)\nu$; здесь (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в \mathcal{R}_n .

3. Постановка задачи редукции при конечномерной аппроксимации входного сигнала

3.1. Модель аппроксимации входного сигнала

Задача редукции измерения ξ , полученного по схеме (1), состоит в таком преобразовании вектора ξ , которое можно интерпретировать как сигнал, наиболее близкий к выходному сигналу некоторого прибора U , на вход которого подан тот же сигнал f , что и в эксперименте (1). На практике прибор, определяемый линейным оператором $U \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_m)$, действующим из \mathcal{R} в евклидово пространство \mathcal{R}_m , дает на выходе параметры исследуемого объекта, не искаженные взаимодействием с измерительным прибором¹ [1–3]; как частный случай, может рассматриваться и редукция к входному сигналу f в (1), при этом оператор U должен быть выбран единичным $I \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R})$.

В основе методов редукции лежит математическая модель реального прибора A , идеального прибора U , модель погрешности ν , описанные в предыдущем разделе, а также модель входного сигнала $f \in \mathcal{R}$. Будем считать, что сигнал f с некоторой точностью может быть задан линейной комбинацией

$$f^{(N)} = \sum_{i=1}^N c_i e_i(\lambda_i) \quad \lambda^{(N)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Lambda^{(N)}, \quad (2)$$

¹Если \mathcal{R} — бесконечномерное евклидово пространство, то в качестве U обычно выбирается оператор проецирования на конечномерное подпространство, [2].

где N — некоторое натуральное число, $(c_1, \dots, c_N) = c^{(N)} \in \mathcal{R}_N$ — N -мерный вектор коэффициентов линейной комбинации, аппроксимирующей входной сигнал $f \in \mathcal{R}$; векторы этой линейной комбинации $e_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, принадлежат заданному классу

$$\mathcal{L}^{(N)} = \left\{ \{e_1(\lambda_1), \dots, e_N(\lambda_N)\}, (\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)} \right\} \subset \mathcal{R},$$

значения параметров $\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}$ задают векторы разложения из выбранных классов. Здесь \mathcal{R}_N обозначает N -мерное векторное пространство, его элементами являются всевозможные наборы из N чисел.

Вектор $f^{(N)} \in \mathcal{R}$ аппроксимирует входной сигнал $f \in \mathcal{R}$, подаваемый на вход прибора A в эксперименте (1) с точностью, определяемой величиной

$$\varepsilon^{(N)} = f - f^{(N)} \in \mathcal{R}. \quad (3)$$

3.2. Задача редукации для случая конечномерной аппроксимации входного сигнала

При фиксированных N и $\lambda^{(N)}$ и произвольных $c^{(N)} \in \mathcal{R}_N$ класс сигналов, определяемых соотношением (2), представляет собой линейное подпространство в \mathcal{R} размерности не более N . Если считать, что входной сигнал f можно точно представить в виде (2) с заданными N и $\lambda^{(N)}$, то схема измерения (1) может быть переписана в виде

$$\xi = Af^{(N)} + \nu = \sum_{i=1}^N c_i Ae_i(\lambda_i) + \nu = B^{(N)}c^{(N)} + \nu,$$

$$c^{(N)} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{R}_N,$$

где линейный оператор $B^{(N)} \in (\mathcal{R}_N \rightarrow \mathcal{R}_n)$ для любого $c \in \mathcal{R}_N$ определяется соотношением

$$B^{(N)}c = \sum_{i=1}^N c_i Ae_i(\lambda_i), \quad c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{R}_N.$$

Выходной сигнал идеального прибора $U \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_m)$, на вход которого подан сигнал f , определенный в (2), запишется в виде

$$Uf^{(N)} = \sum_{i=1}^N c_i U e_i(\lambda_i) = W^{(N)}c, \quad c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{R}_N, \quad (4)$$

здесь $W^{(N)} \in (\mathcal{R}_N \rightarrow \mathcal{R}_m)$.

Теперь можно записать

$$\xi = B^{(N)}c + \nu, \quad (5)$$

и если заданы оператор $B^{(N)} \in (\mathcal{R}_N \rightarrow \mathcal{R}_n)$, ковариационный оператор $\Sigma \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$ шума ν , и $\mathbf{E}\nu = 0$, а вектор $c \in \mathcal{R}_N$ полагается априори неизвестным, то задача редукции сигнала $\xi \in \mathcal{R}_n$ к виду (4) эквивалентна стандартной задаче редукции измерения (5) для модели $[B^{(N)}, \Sigma]$, описанной в работах [1–3]. Эта задача состоит в преобразовании $R \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_N)$ сигнала ξ к виду

$$\begin{aligned} R\xi &= RB^{(N)}c + R\nu = W^{(N)}c + (RB^{(N)} - W^{(N)})c + R\nu = \\ &= Uf^{(N)} + (RA - U)f^{(N)} + R\nu, \end{aligned}$$

который можно интерпретировать как искомый сигнал $Uf^{(N)}$, искаженный «ложным сигналом» $(RA - U)f^{(N)} = (RB^{(N)} - W^{(N)})c$ и шумом $R\nu$.

Если сигнал $f^{(N)}$ априори неизвестен, то оценить величину «ложного сигнала» можно, если и только если выполнено равенство

$$RB^{(N)} = W^{(N)}, \quad (6)$$

при этом величина «ложного сигнала» равна нулю. Будем выбирать оператор редукции $R \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_N)$ из множества преобразований, удовлетворяющих равенству (6), минимизацией среднеквадратичной величины шума $R\nu$. Это предложение приводит к вариационной задаче

$$\mathbf{E}\|R_0\nu\|^2 = \inf \left\{ \mathbf{E}\|R\nu\|^2 \mid RB^{(N)} = W^{(N)} \right\}. \quad (7)$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (7) $W^{(N)}(I - (B^{(N)})^{-1}B^{(N)}) = 0$, ее решение

$$R_0 = W^{(N)} \left(\Sigma^{-1/2} B^{(N)} \right)^{-} \Sigma^{-1/2}$$

и оценка погрешности редукции

$$\mathbf{E} \left\| R_0 \xi - U f^{(N)} \right\|^2 = \mathbf{E} \| R_0 \nu \|^2 = \text{tr } R_0 \Sigma R_0^* \quad (8)$$

приведены в [1–3]. Здесь D^- означает оператор, псевдообратный к D , [2, 3].

3.3. О критерии аппроксимации входного сигнала

Замена сигнала f его аппроксимацией $f^{(N)}$ вида (2) приведет к тому, что к результату измерения в (5) добавится погрешность $A\varepsilon^{(N)}$, определяемая соотношением (3). Однако если эта погрешность незаметна на фоне шума ν , то на основании измерения (5) невозможно судить о том, отличается ли сигнал f от $f^{(N)}$. Критерием согласия гипотезы о модели формирования сигнала ξ в теории измерительно-вычислительных систем является надежность модели, понимаемая как минимальный уровень критерия, принимающего статистическую гипотезу о том, что ξ сформировано согласно выбранной модели, против заданной альтернативы, см. [1]. Развиваемый далее подход следует методу максимальной надежности, описанному, например, в работе [6].

3.4. Надежность аппроксимации входного сигнала

Пусть вектор $\xi \in \mathcal{R}_n$ сформирован в результате измерения сигнала $f^{(N)} = \sum_{i=1}^N c_i e_i(\lambda_i)$ с неизвестными значениями c_i , $i = 1, \dots, N$, число слагаемых N фиксировано, а погрешность ν контролируется нормальным распределением с нулевым математическим ожиданием и невырожденным корреляционным оператором $\Sigma \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$. Тогда предположение о том, что модель измерения верна, эквивалентно следующей статистической гипотезе:

случайный вектор ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, принадлежащим линейному подпространству $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Ae_1(\lambda_1), \dots, Ae_N(\lambda_N))$ в \mathcal{R}_n , составленного из всех линейных комбинаций векторов $Ae_1(\lambda_1), \dots, Ae_N(\lambda_N) \in \mathcal{R}_n$,

$$\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma), \quad a \in \mathcal{L}. \quad (9)$$

Альтернатива состоит в том, что математическое ожидание вектора ξ не принадлежит \mathcal{L} :

$$\xi \sim \mathcal{N}(b, \Sigma), \quad b \notin \mathcal{L}. \quad (10)$$

Как известно [1, 7, 8], в такой задаче существует равномерно наиболее мощный инвариантный критерий, надежность которого, то есть наименьший уровень, при котором гипотеза (9) отвергается в пользу альтернативы (10), равна

$$\alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)}) = 1 - F_k \left(\left\| (I - \Pi^{(N)}) \Sigma^{-1/2} \xi \right\|^2 \right), \quad (11)$$

где $(I - \Pi^{(N)})$ — ортогональный в \mathcal{R}_n проектор на ортогональное дополнение \mathcal{L}_s^\perp к линейному подпространству $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}(\Sigma^{-1/2} Ae_1(\lambda_1), \dots, \Sigma^{-1/2} Ae_N(\lambda_N))$, $F_k(\cdot)$ — функция распределения Пирсона (χ_k^2) с числом степеней свободы k , равным размерности подпространства \mathcal{L}_s^\perp .

3.5. Геометрическая интерпретация надежности модели аппроксимации

Назовем расстоянием в \mathcal{R}_n функцию $\rho(x, y) = \|\Sigma^{-1/2}(x - y)\|$, $x, y \in \mathcal{R}_n$. Тогда, согласно (11), надежность $\alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)})$ определяется расстоянием от вектора $\xi \in \mathcal{R}_n$ до N -мерного подпространства $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}_n$. Если сигнал f , измеряемый в эксперименте (1), в точности является сигналом вида (2), то расстояние

$$\rho(\xi, \mathcal{L}) = \inf_{x \in \mathcal{L}(e_1(\lambda_1), \dots, e_N(\lambda_N))} \rho(\xi, Ax) \quad (12)$$

от вектора ξ до подпространства \mathcal{L} равно длине разности между вектором $\xi \in \mathcal{R}_n$ и его проекцией на \mathcal{L} , определяется только проекцией

вектора шума ν на \mathcal{L}^\perp и контролируется распределением χ_k^2 с числом степеней свободы, равным $k = n - \dim \mathcal{L}$. Надежность $\alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)})$ в этом случае имеет равномерное на $[0, 1]$ распределение [1]. Если же f в (1) не является линейной комбинацией функций вида (2), расстояние $\rho(\xi, \mathcal{L})$ в (12) определится не только вектором шума, но и составляющей вектора f , не принадлежащей $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$. Его распределение в этом случае контролируется нецентральным распределением $\chi_{(\vartheta, k)}^2$ с k степенями свободы и параметром нецентральности, равным $\vartheta = \|(I - \Pi_{\lambda^{(N)}}) \Sigma^{-1/2} A f\|^2$, а распределение надежности $\alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)})$ концентрируется вблизи нуля, [1]. Величина надежности характеризует, таким образом, заметность отличия сигнала f от его аппроксимации вида (2) по результату измерения ξ в (1) на фоне шума ν .

3.6. Задача редукции для наиболее надежной модели аппроксимации входного сигнала заданной размерности

Пусть число слагаемых N в (2) задано. Выберем значение $\widehat{\lambda}^{(N)}$ параметров $\lambda^{(N)}$ так, чтобы надежность $\alpha^{(N)}(\xi, \widehat{\lambda}^{(N)})$ соответствующей гипотезы была максимальна:

$$\alpha^{(N)}(\xi, \widehat{\lambda}^{(N)}) = \sup_{\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}} \alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)}). \quad (13)$$

Заметим, что в результате минимизации (13), в соответствии с определением надежности (11) и ее геометрической интерпретацией выбирается подпространство входных сигналов $\widehat{\mathcal{L}}_f = \mathcal{L}(e_1(\widehat{\lambda}_1), \dots, e_N(\widehat{\lambda}_N)) \subset \mathcal{R}$, для которых соответствующее пространство наблюдаемых сигналов $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(Ae_1(\widehat{\lambda}_1), \dots, Ae_N(\widehat{\lambda}_N)) \subset \mathcal{R}_n$ наиболее близко к реализации случайного вектора $\xi \in \mathcal{R}_n$. Поэтому распределение надежности $\alpha^{(N)}(\xi, \widehat{\lambda}^{(N)})$, определенной в (13), при $f \in \mathcal{L}_f$ будет несколько отличаться от равномерного, однако по величине $\rho(\xi, \widehat{\mathcal{L}}) = \inf_{\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}} \rho(\xi, \mathcal{L})$ или зависящей от него величины надежности $\alpha^{(N)}(\xi, \widehat{\lambda}^{(N)})$ по-прежнему можно судить о заметности отличий сигнала f от его аппроксимации.

Воспользуемся полученной конечномерной моделью входного сигнала, найдем решение задачи редукции (7). Если $\widehat{R}^{(N)} \in \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_m$ — ее решение, то вектор $\widehat{R}^{(N)}\xi$ интерпретируется как оценка выходного сигнала Uf идеального прибора U , полученная в рамках модели $[\widehat{B}^{(N)}, \Sigma]$, наилучшая в следующем смысле:

- конечномерная аппроксимация входного сигнала вида $f^{(N)} \in \widehat{\mathcal{L}}_f$ с максимальной надежностью согласуется с результатом измерения (1);
- в предположении, что на вход прибора A поступает сигнал, имеющий вид $f \in \widehat{\mathcal{L}}_f$, вектор $\widehat{R}^{(N)}\xi$ является наиболее точной оценкой сигнала $Uf \in \mathcal{R}_m$.

Оценка $\widehat{R}^{(N)}\xi$ сопровождается погрешностью, вычисляемой по формуле (8) на основании N -мерной аппроксимации модели входного сигнала, согласующейся с результатом измерения с надежностью, определенной в (13).

3.7. Выбор размерности аппроксимации

Проделав процедуру, описанную в предыдущем разделе, для каждого значения $N = 1, 2, \dots$, получим семейство решений задачи редукции. С ростом N расстояние $\inf_{\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}} \rho(\xi, \mathcal{L})$ от вектора ξ до ближайшего к нему подпространства из класса $\{\mathcal{L}(Ae_1(\lambda_1), \dots, Ae_N(\lambda_N)), \lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}\}$, очевидно, не возрастает. Чем меньше это расстояние, тем больше надежность соответствующей модели аппроксимации (при заданном N), и тем менее возможно заметить отличие сигнала f от его конечномерной аппроксимации по результату ξ измерения сигнала Af на фоне шума ν , решая соответствующую задачу проверки статистической гипотезы или вычисляя ее надежность. А значит, и тем меньше причин считать, что сигнал f имеет более сложную форму.

В то же время стремление к слишком большому значению надежности модели в (13) путем увеличения размерности аппроксимации N приводит к тому, что вместо аппроксимации сигнала f все с большей подробностью начинает аппроксимироваться шум. Действительно, если все составляющие сигнала $f \in \mathcal{R}$, заметные на фоне

шумов в сигнале $Af \in \mathcal{R}_n$, уже вошли в линейную комбинацию сигналов, аппроксимирующую f , то дальнейшее увеличение размерности аппроксимации на единицу будет всякий раз приводить к уменьшению числа степеней свободы распределения χ^2 случайной величины $\|(I - \Pi_{\lambda^{(N)}})\Sigma^{-1/2}\xi\|^2$, определяющей надежность соответствующей модели. Этот переход от аппроксимации сигнала к аппроксимации шума можно оценить по характеру убывания расстояния $\inf_{\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}} \rho(\xi, \mathcal{L})$ в зависимости от N : резкое замедление скорости убывания свидетельствует о том, что основные информативные составляющие сигнала f уже отражены в его конечномерной аппроксимации.

4. Конечномерная аппроксимация при отсутствии ограничений на базисные векторы

Рассмотрим вырожденную ситуацию, когда о классе входных сигналов ничего не известно. С формальной точки зрения это означает, что класс векторов $\Lambda^{(N)}$ в (2) составляют любые комбинации из N векторов пространства \mathcal{R} . Речь идет о том, чтобы по заданной модели $[A, \Sigma]$ измерения (1) определить линейное подпространство в \mathcal{R} размерности не больше N , такое, чтобы его линейные комбинации в наилучшей степени согласовывались бы с результатом измерения. Так как согласие модели входного сигнала с результатом измерения, как следует из предыдущего раздела, определяется расстоянием от вектора ξ до линейного подпространства вида $\{Af, f \in \mathcal{R}\}$, то наилучшей моделью входного сигнала в этом случае будет линейная комбинация вектора $A^{-1}\xi \in \mathcal{R}$ с нужным числом векторов из нульпространства оператора A . Легко видеть, что в этом случае задача редукции к прибору $U \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_m)$ ничем не отличается от задачи несмещенного синтеза сигнала Uf [1, 3]; она разрешима тогда и только тогда, когда $U(I - A^1A) = 0$, и ее решение дается оператором $R_0 = U(\Sigma^{-1/2}A)^{-1}\Sigma^{-1/2}$ и редукция $R\xi$ сопровождается погрешностью $h(U) = \mathbf{E}\|R\xi - Uf\|^2 = \text{tr}(U(A\Sigma^{-1}A^*)U^*$.

Для того, чтобы получить более содержательный результат, следует наложить более жесткие ограничения на класс векторов, задающих линейные комбинации, аппроксимирующие сигнал $f \in \mathcal{R}$.

Заметим, что в рассматриваемом случае к более содержательным задачам приводит постановка, в которых требуется определить подпространство в \mathcal{R} заданной размерности, определяющей результат редукции с наименьшей погрешностью среди всех проекций той же размерности. Речь идет о задачах, связанных с понятием эффективного ранга модели линейных измерений с погрешностью. Им посвящены работы [9–13].

5. Модель кусочно-постоянной аппроксимации входного сигнала

Рассмотрим в качестве примера ситуацию, когда в качестве аппроксимации для $f \in \mathcal{R}$ используется кусочно-постоянный сигнал. Будем считать f элементом пространства функций $L_2(X)$, заданных на некотором множестве X и квадратично интегрируемых на этом множестве, и запишем кусочно-постоянную аппроксимацию $f^{(N)}(\cdot) \in L_2(X)$ сигнала $f(\cdot)$ в виде

$$f^{(N)}(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_i(x); \quad x \in X, \quad \chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i, \\ 0, & x \notin A_i, \end{cases} \quad (14)$$

здесь $f^{(N)}(x)$ — амплитуда сигнала $f^{(N)}(\cdot)$ в точке $x \in X$, $\chi_i(\cdot)$ — индикаторная функция подмножества A_i множества X , амплитуда сигнала $f^{(N)}(\cdot)$ в любой точке множества A_i имеет одно и то же значение c_i , $i = 1, \dots, N$. Множества A_i с одинаковой амплитудой сигнала c_i попарно не пересекаются, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i, j = 1, \dots, N$, и в сумме составляют все X : $\bigcup_{i=1}^N A_i = X$.

Множества A_i , $i = 1, \dots, N$, и их количество N априори неизвестны и должны быть выбраны в соответствии с результатом измерения (1). В согласии с предлагаемым подходом, разбиение множества X , состоящее из непересекающихся подмножеств одинаковой амплитуды, происходит максимизацией (13), где в качестве векторов $e_i^{(N)}(\lambda_i^{(N)})$ используются индикаторные функции множеств A_i , а их параметрами $\lambda_i^{(N)}$ являются границы этих множеств, $i = 1, \dots, N$.

Эта максимизация эквивалентна минимизации расстояния $\rho(\cdot, \cdot)$ от вектора ξ до проекции ξ на множество кусочно-постоянных сигналов вида (14); минимизация происходит выбором разбиения X .

6. Связь с методом максимального правдоподобия

Рассмотрим несколько более простую ситуацию, когда известно, что входной сигнал $f \in \mathcal{L}_2(X)$ задается кусочно-постоянной функцией вида (14), заданной на отрезке X числовой прямой, $X = [a_0, a_N]$, множества $A_j \subset X$ являются отрезками $[a_{j-1}, a_j]$, а вектор шума измерения $\nu \in \mathcal{R}_n$ в (1) контролируется нормальным распределением $\mathcal{N}(0, \Sigma)$. В этом случае оценку множеств A_j и значения c_j , $j = 1, \dots, N$, сигнала f на этих множествах можно найти как оценки максимального правдоподобия [7]. Логарифм функции правдоподобия в рассматриваемом случае имеет вид

$$l(\xi, a_1, \dots, a_{N-1}, c_1, \dots, c_N) = \\ = k_0 - \frac{1}{2} \left\| \Sigma^{-1/2} \left(\xi - \sum_{i=1}^N c_i A \chi_i \right) \right\|^2, \quad k_0 = \text{const}, \quad (15)$$

и оценка максимального правдоподобия определяется как решение задачи на максимум

$$l(\xi, \widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_{N-1}, \widehat{c}_1, \dots, \widehat{c}_N) = \\ = \sup_{a_1, \dots, a_{N-1}, c_1, \dots, c_N} l(\xi, a_1, \dots, a_{N-1}, c_1, \dots, c_N). \quad (16)$$

Теорема 1. В рассматриваемом случае оценка максимального правдоподобия, полученная как решение задачи (16), совпадает с оценкой, полученной при решении задачи (13), и сводится к задаче на минимум

$$\left\| \Sigma^{-1/2} \left(\xi - \sum_{i=1}^N \widehat{c}_i A \widehat{\chi}_i \right) \right\|^2 =$$

$$= \inf_{a_1, \dots, a_{N-1}, c_1, \dots, c_N} \left\{ \left\| \Sigma^{-1/2} \left(\xi - \sum_{i=1}^N c_i A \chi_i \right) \right\|^2 \right\}. \quad (17)$$

Эта оценка сходится к точному значению сигнала f при $\Sigma \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы опирается на свойства оценок максимального правдоподобия, приведенные в [7]. Существенным при этом является дифференцируемость функции правдоподобия по параметрам $a_1, \dots, a_{N-1}; c_1, \dots, c_N$, которая следует из ее явного вида (15).

6.1. Вычислительный эксперимент

Проиллюстрируем эффективность предложенных методов оценки входного сигнала в серии вычислительных экспериментов в ситуации, когда в качестве системы линейно независимых векторов $\{e_i^{(N)}(\lambda_i^{(N)})\}$ используются индикаторные функции разбиения области X , а параметры $\lambda_i^{(N)}$, $i = 1, \dots, N$, определяют границы множеств, составляющих разбиение.

В первом эксперименте на вход измерительной системы поступает кусочно-постоянный сигнал, содержащий 4 уровня яркости, его график изображен на рис. 1а. Результат его регистрации, сопровождающийся размытием и аддитивным шумом, составляющим 8% от полезного сигнала, приведен на рис. 1б.

Минимизация функционала (17) производится последовательно. На начальном этапе выбирается начальное разбиение области задания сигнала $f \in \mathcal{R}_{49}$ на N областей постоянного значения. Для этого все координаты сигнала f группируются в N наборов, имеющих одинаковые значения. Далее определяется значение этих координат решением задачи (7).

На следующем этапе при фиксированных N значениях кусочно-постоянного сигнала, найденных на предыдущем шаге, определяются N групп координат сигнала f , минимизирующие невязку (17). В данном случае это производилось полным перебором значений сигнала f в окрестности пиков. Процедура повторяется до тех пор, пока изменение невязки (17) не станет незначительным.

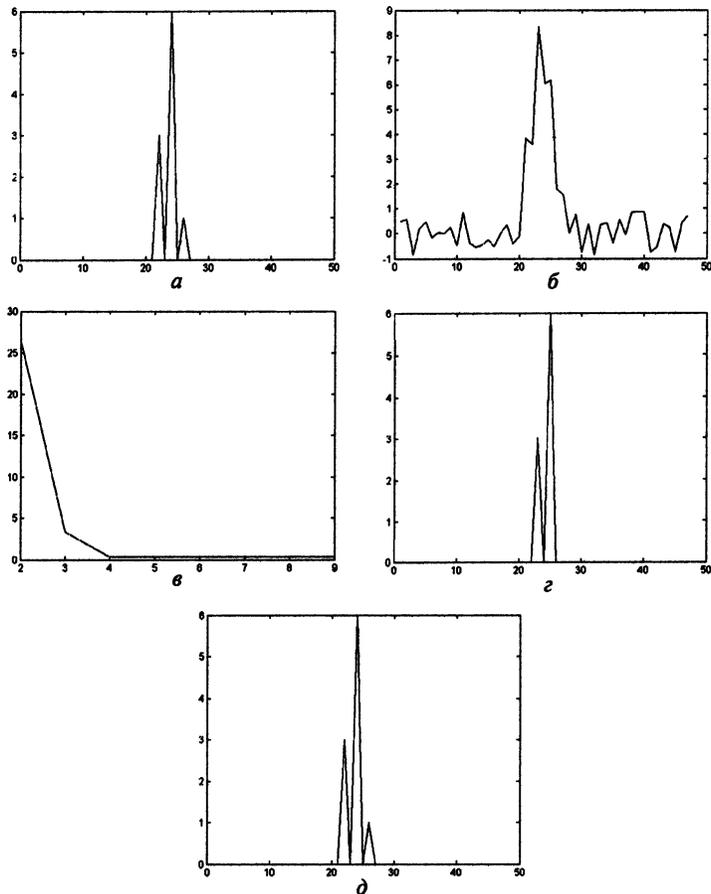


Рис. 1. *a* — входной сигнал, *б* — результат измерения (отношение шум/сигнал равно 0.08), *в* — график $y(N)$ в зависимости от числа уровней кусочно-постоянного сигнала, *г* — оценка входного сигнала при $n = 3$, *д* — оценка входного сигнала при $n = 4$.

На рис. 1в приведена зависимость минимума невязки (17) от числа уровней значений сигнала N . Видно, что при $N > 4$ значение минимума невязки с ростом N уменьшается незначительно, что свидетельствует в пользу того, чтобы выбрать значение $N = 4$ в качестве достаточно надежного для кусочной аппроксимации входного сигнала.

На рис. 1г приведено решение задачи кусочно-постоянной аппроксимации входного сигнала при $N = 3$. Верно определено положение двух пиков, с хорошей точностью оценена их амплитуда, однако потерял третий пик малой амплитуды.

На рис. 1д число уровней значения сигнала f увеличено до оптимального $N = 4$. Качество оценки входного сигнала достаточно высокое.

На рис. 2а-г приведены аналогичные результаты для того же входного сигнала, но в ситуации, когда шум при измерении составляет 20%. Как видно из рисунков, результат восстановления достаточно устойчив по отношению к погрешности измерений.

На рис. 3, 4 приведены результаты вычислительного эксперимента для входного сигнала, не являющегося кусочно-постоянным. Входной

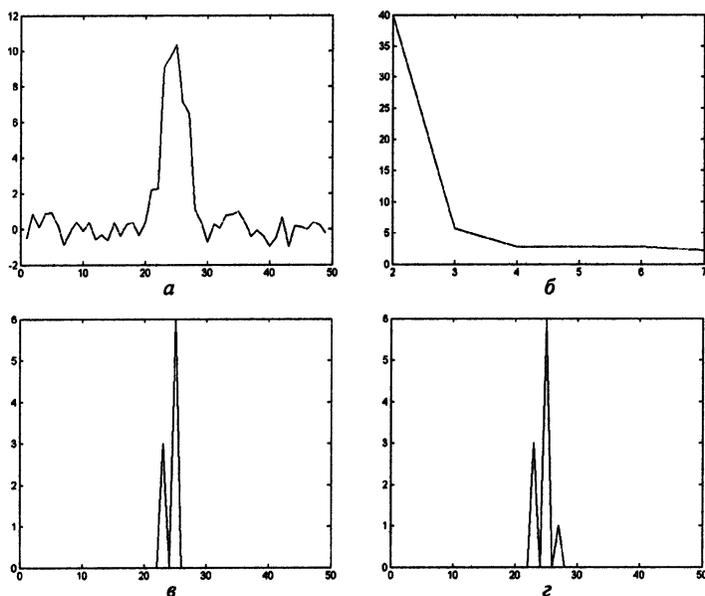


Рис. 2. а — результат измерения (отношение шум/сигнал равно 0.2), б — график $y(N)$ в зависимости от числа уровней кусочно-постоянного сигнала, в — оценка входного сигнала при $n = 3$, г — оценка входного сигнала при $n = 4$.

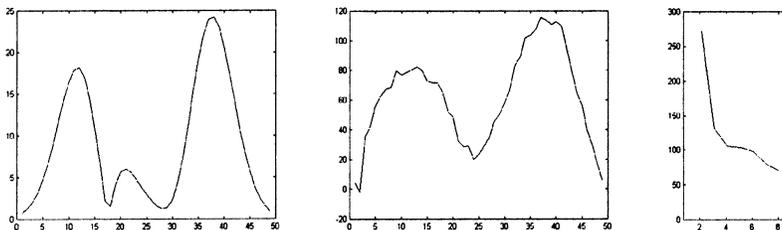


Рис. 3. *a* — входной сигнал, *б* — результат измерения, *в* — график $y(N)$ в зависимости от числа уровней кусочно-постоянного сигнала.

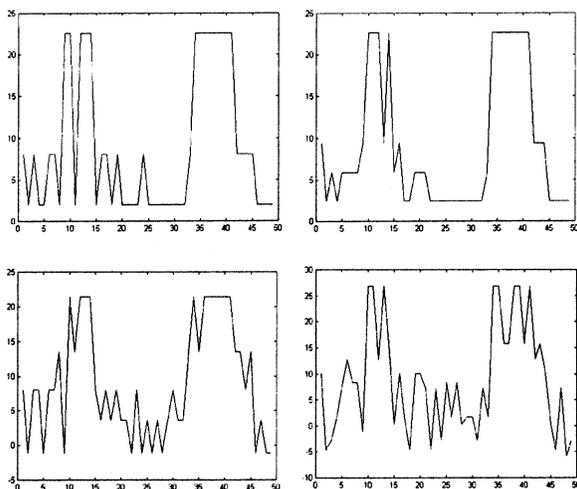


Рис. 4. *a* — оценка входного сигнала при $N = 3$, *б* — при $N = 4$, *в* — при $N = 5$, *г* — при $N = 12$.

сигнал $f \in \mathcal{R}_{49}$ изображен на рис. 3*a*. Он измеряется в эксперименте по схеме (1), результат его измерения — сигнал $\xi \in \mathcal{R}_{49}$ — представлен на рис. 3*б*. Погрешности измерения ν_i , $i = 1, \dots, 49$ некоррелированы и обладают среднеквадратичным отклонением, равным 10 (8%).

Вычисляется кусочно-постоянная аппроксимация входного сигнала и решается задача редукции к идеальному прибору $U = I \in (\mathcal{R}_{49} \rightarrow \mathcal{R}_{49})$, причем множества A_j , $j = 1, \dots, N$, не предполагаются односвязными. На рис. 3*в* приведен график зависимости аргу-

мента $y(N) = \|(I - \Pi)\Sigma^{-1/2}\xi\|^2$ функции распределения $F_k(\cdot)$, определяющего надежность модели измерения (11); она дается монотонно невозрастающей функцией аргумента N . Эта зависимость резко убывает до значения $N = 4$, далее скорость убывания заметно снижается. Можно предположить, что, начиная с $N = 4$, увеличение числа множеств разбиения X приведет лишь к аппроксимации искажений оценки сигнала f , вызванных погрешностью измерения.

Графики оценок при $N = 3, 4, 5, 12$ приведены, соответственно, на рис. 4а–г. Видно, что увеличение числа уровней действительно приводит к высококачественной погрешности, не имеющей отношения к истинному сигналу f .

Заключение

В работе предложен метод конечномерной аппроксимации входного сигнала линейного измерительного прибора, основанный на наиболее точной оценке значений амплитуд входного сигнала при контроле надежности модели аппроксимации. В вычислительных экспериментах продемонстрирована эффективность предложенного метода для кусочно-постоянной аппроксимации входного сигнала.

Работа поддержана грантами РФФИ № 02–01–00579 и № 02–01–06093.

Список литературы

- [1] Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
- [2] Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высшая школа, 1989.
- [3] Чуличков А. И. Основы теории измерительно-вычислительных систем сверхвысокого разрешения. Линейные стохастические измерительно-вычислительные системы. Тамбов: Изд-во Тамбовского гос. тех. ун-та, 2000.

- [4] Пытьев Ю. П. Задачи морфологического анализа изображений // В сб. Математические методы анализа природных ресурсов Земли из Космоса. М.: Наука, 1984.
- [5] Чуличков А. И. Анализ изображений с точки зрения их формы // В сб. Синергетика. Том 4. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. С. 74–80.
- [6] Пытьев Ю. П., Сухорукова Г. В., Чуличков А. И. Задачи дистанционного зондирования: математическое моделирование, анализ и интерпретация результатов // Матем. моделирование. 1994. Т. 6, № 11.
- [7] Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.
- [8] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.
- [9] Пытьев Ю. П., Бондаренко С. П. Об эффективном ранге модели линейных измерений с ошибкой // ЖВМ и МФ. 1995. Т. 35, № 1.
- [10] Пытьев А. Ю., Пытьев Ю. П. Об эффективной размерности множества измерений // Журнал выч. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 4. С. 682–697.
- [11] Громов М. А., Сердобольская М. Л. Об эффективном ранге конечномерных приближений бесконечномерной линейной модели измерения // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 4. С. 33–45.
- [12] Сердобольская М. Л. Об эффективном ранге бесконечномерной линейной модели измерения // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3: Физика, астрономия. 2000. № 5. С. 5–8.
- [13] Пытьев Ю. П., Голубцов П. В., Чуличков А. И. Задачи оптимальной редукции измерений в физическом эксперименте // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3: Физика, астрономия. Т. 27, № 2. 1986.

