Моделирование этнических конфликтов при помощи однородных структур

Р. М. Корнев

В последние годы после завершения биполярного деления мира резко возросло количество конфликтов на межэтнической почве, и возникла насущная необходимость в средствах их предотвращения и локализации. Предлагаемые ниже математические модели представляют собой попытку математического моделирования развития таких конфликтов.

Введение

Задачи локализации и устранения этнических конфликтов появились сравнительно недавно. Наличие межнациональной напряженности на Ближнем Востоке, Северном Кавказе, в Средней Азии ставит задачу о предсказании развития такого рода конфликтов. В данной работе в качестве модели места конфликта используется однородная структура, а индивидуумы разных национальностей моделируются клетками структуры с добавлением неизменяемого признака «национальность». Предложены достаточное условие локализации конфликта и алгоритм проверки нераспространения конфликта.

Автор выражает благодарность В. Б. Кудрявцеву за постановку задачи и научное руководство, а также А. В. Галатенко за помощь в работе.

1. Основные определения

Однородная структура (сокращенно ОС) [1, 2] или *клеточный автомат* σ формально определяется как набор $\langle \mathbb{Z}^2, E_n, V, \varphi \rangle$, где $\mathbb{Z}^2$ —

множество векторов на плоскости с целочисленными координатами, $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $V = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h-1}\}$ — упорядоченный набор различных векторов из $\mathbb{Z}^2$, φ — функция n-значной логики от h переменных, причем существует такое k, что $\varphi(k, k, \dots, k) = k$. Векторы из $\mathbb{Z}^2$ называются *ячейками (клетками)* однородной структуры (*клеточного автомата*), элементы множества E_n — *состояниями ячейки.* Набор V, называемый *шаблоном соседства* однородной структуры, для каждой ячейки α определяет ее окрестность $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha + \alpha_1, \alpha + \alpha_2, \dots, \alpha + \alpha_{h-1}\}$, наконец функция φ задает *локальную функцию переходов* однородной структуры: если в момент времение t состояния ячеек $\alpha, \alpha+\alpha_1, \alpha+\alpha_2, \dots, \alpha+\alpha_{h-1}$ равны соотвественно $x_0, x_1, \dots, x_{h-1}$, то состояние ячейки α в следующий момент времени $t+1$ полагается равным $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h-1})$.

Приписывая каждой ячейке ОС σ состояние из множества E_n, получим *состояние однородной структуры.* Другими словами, под состоянием ОС σ понимается функция f, определенная на множестве ячеек $\mathbb{Z}^2$ и принимающая значения из E_n.

Функционирование (поведение) ОС происходти в дискретном времени $t = 0, 1, \dots$ в результате последовательного выполнения *основной функции переходов.* Основная функция (оператор) переходов Φ определяется на множестве всех состояний ОС σ, при этом считается, что состояние ОС f переходит в состояние ОС g, $g = \Phi(f)$, если для любой ячейки α выполняется равенство $g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \dots, f(\alpha + \alpha_{h-1}))$, то есть состояние каждой ячейки после перехода определяется по состоянию окрестностей ячейки до перехода с помощью локального преобразования φ, не зависящего от расположения ячейки α в пространстве $\mathbb{Z}^2$. Как правило, изучается поведение только таких состояний ОС, у которых лишь конечное число ячеек находится в состоянии, отличном от состояния покоя k. Состояния ОС такого вида называются *конфигурациями.*

Определение 1. *Границей* называется связное множество Γ клеток однородной структуры σ, такое что, $\mathbb{Z}^2 = A \cup \Gamma \cup B$, причем $|B| < \infty$ и $B =$.

Определение 2. Множество B, $|B| < \infty$, удовлетворяющее условиям из определения 1, назовем *внутренним множеством* границы Γ.

Определение 3. Клетки $\alpha \in \Gamma$, назовем *граничными.*

Каждая ячейка из $\mathbb{Z}^2$ соотносится с одним индивидуумом из популяции. В модели *агрессивность* определяется конфигурацией $f : S \to Z_2$, то есть индивидуум либо *спокоен*, либо *возбужден.* В неоднородных популяциях каждая ячейка снабжается некоторым неизменяемым набором признаков n. Хотя в общем определении однородной структуры локальная функция перехода не зависит от ячейки α, однако путем введения некоторых дополнительных состояний во множество состояний клетки $\overline{E_n}$: $\overline{E_n} = E_n \times E_m$ получаем конфигурации $\overline{f} = (f, n)$, расширенная локальная функция переходов для которых $\overline{\varphi} = (\varphi, \mathrm{id})$ (id — тождественное отображение) удовлетворяет общему определению однородной структуры. Всевозможные конфигурации над $\mathbb{Z}^2$ образуют пространство конфигураций $\mathbb{K}(S)$. Оно является линейным пространством над полем Z_2.

Рассмотрим модель развития конфликта в смешанном обществе. Здесь признаком, различающим ячейки в $\mathbb{Z}^2$, является *национальность*, определяемая как функция $n : S \to Z_2$.

Определение 4. $W : \mathbb{K}(S) \to \mathbb{K}(S)$ — линейный оператор, такой что

$$Wf(\alpha) = \sum_{\beta \in V} f(\alpha + \beta).$$

Определение 5. Оператор перехода в модели смешанного общества $(\Phi f)(\alpha)$ выглядит следующим образом:

$$(\Phi f)(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists k_{1-n(\alpha)}\ \beta_i \in V(\alpha),\ n(\beta) \neq n(\alpha) \text{ и } f(\beta) = 1, \\ s(Wf(\alpha) - P_i), & \text{где } i = f(\alpha), \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Определение 6. Пусть $f, g \in \mathbb{K}(S)$ — конфигурации. Тогда $f \leqslant g$, если $\forall \alpha \in S\ f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$.

Определение 7. Пусть $\Delta_f^{t+1} = \Phi^{t+1}(f) - \Phi^t(f)$ — количество клеток, ставших активными на шаге $t+1$.

k_i — порог перехода клетки в активное состояние в зависимости от числа активных клеток другой национальности. P_i — пороги перехода клетки в активное состояние (P_0) и спокойное состояние (P_1).

2. Основные теоремы и утверждения

Данная теорема показывает, что для локализации конфликта достаточно «двойное» кольцо однородных индивидуумов.

Теорема 1. *При* $P_0 \geqslant |V|$, $P_1 \geqslant |V|$, *если* $\exists B \subset \mathbb{Z}^2$ *такое, что* $\forall \alpha, \beta \in V(V(B))$, $n(\alpha) = n(\beta)$ *и* $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^2 \backslash (V(V(B)))$ $f(\alpha) = 0$, *то* $\forall t \in \mathbb{N}$, $\Phi^t f(\alpha) = 0$ $\forall \alpha \in S \backslash B$.

Следующая теорема предоставляет достаточное условие локализации конфликта.

Теорема 2. *Пусть дана модель* γ *с заданными параметрами* P_0, P_1, k_0, k_1. *Возьмем модель* γ' *с параметрами* $P'_0 = P'_0$, $P'_1 = 1$, $k'_0 = k_0$, $k'_1 = k_1$. *Тогда, если для модели* γ' $\exists B \subset \mathbb{Z}^2$ *и* $T(P'_0, P'_1, k'_1, k'_0)$, *такие что* $\forall t > T(P'_0, P'_1, k'_1, k'_0)$ $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^2 \backslash B$, $f(\alpha) = 0$, *то и для модели* γ $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^2 \backslash B$, $f(\alpha) = 0$.

Доказательство теоремы 1

Предположим противное. Пусть $\exists t, \alpha \in S \backslash (V(V(B)))$, что $\Phi^t f(\alpha) = 1$. Но в силу $f(\alpha) = 0$, существует такое t_1, что $\Phi^{t_1} f(\alpha) = 0$ и $\Phi^{t_1+1} f(\alpha) = 1$. Так как $P_0 \geqslant |V|$, $P_1 \geqslant |V|$, из этого следует, что $\exists \beta \in V(\alpha)$ с $n(\alpha) \neq n(\beta)$ и $\Phi^{t_1} f(\beta) = 1$. Из-за симметричности V $\alpha \in V(\beta)$ и, отсюда, $\beta \in B$, так как иначе бы $\alpha \in V(B)$. Получаем, что $f(\beta) = 0$ и $t_1 > 0$.

Далее $\exists t_2 < t_1$ такое, что $\Phi^{t_2} f(\beta) = 0$ и $\Phi^{t_2+1} f(\beta) = 1$. Опять же из-за $P_0 \geqslant |V|$, $P_1 \geqslant |V|$, $\exists \gamma \in V(\beta)$, такое, что $\Phi^{t_2} f(\gamma) = 1$ и $n(\gamma) \neq n(\beta)$.

Повторяя таким образом процесс, мы получаем последовательность $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\alpha_n \in B$, причем в этой последовательности есть как минимум 3 члена, $\alpha_{n-1} \in V(\alpha_n)$, $\alpha_{n-1} \in V(B)$ и $\alpha_{n-1} \in V(V(B))$. Аналогично, $\alpha_{n-2} \in V(\alpha_{n-1})$ и $\alpha_{n-2} \in V(V(B))$, но $n(\alpha_{n-2}) \neq n(\alpha_{n-1})$, и мы получаем противоречие с условиями теоремы.

Для доказательства теоремы 2 понадобится утверждение:

Утверждение 1. *При* $P_1 \leqslant P_0$ *для любых* $f, g \in \mathbb{K}(S)$, $f \leqslant g$, *имеем* $\Phi f \leqslant \Phi g$.

Доказательство. Сначала докажем для однородного общества, а затем и для смешанного. Предположим обратное, то есть $\exists \alpha \in S$, $f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$ и $\Phi f(\alpha) > \Phi g(\alpha)$. Отсюда $\Phi f(\alpha) = 1$, $\Phi g(\alpha) = 0$. Если $f \leqslant g$, то $Wf(\alpha) \leqslant Wg(\alpha)$. Обозначим $\omega_1 = Wf(\alpha)$, $\omega_2 = Wg(\alpha)$. Имеем $\omega_1 \leqslant \omega_2$. Возможны следующие три случая:

а) $f(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = 0$. Тогда $\omega_2 \leqslant P_0$, $\omega_1 > P_0$ и $\omega_1 > \omega_2$, получаем противоречие.

б) $f(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = 1$. Тогда $\omega_1 > P_0$, $\omega_2 \leqslant P_1$ и $\omega_2 \leqslant P_1 \leqslant P_0 \leqslant \omega_1$, получаем противоречие.

в) $f(\alpha) = 1$, $g(\alpha) = 1$. Тогда $\omega_1 > P_1$, $\omega_2 \leqslant P_1$ и $\omega_1 > \omega_2$, получаем противоречие.

Для однородного случая утверждение доказано. В неоднородном случае имеем:

Если $\forall \beta \in V(\alpha)$ $n(\alpha) = n(\beta)$, то доказательство не меняется.

Если же $\exists \beta \in V(\alpha)$, что $n(\beta) \neq n(\alpha)$ и $f(\beta) = 1$, то $\Phi f(\alpha) = 1$, и $g(\beta)$ должно равняться 1 (из-за $f \leqslant g$), откуда получаем $\Phi g(\alpha) = 1$, и все верно.

Если при всех $\beta \in V(\alpha)$ $n(\beta) \neq n(\alpha)$, но $g(\beta) = 0$, то для тех же β получаем $f(\beta) = 0$ и, применяя старое доказательство, приходим к $\Phi f \leqslant \Phi g$.

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим оператор перехода Φ. Для моделей γ и γ' он будет различен только в случае использования параметра P_1. Это означает, что за один такт функционирования однородной структуры в модели γ' меньше активных клеток перейдет в пассивное состояние, так как $P_1' \leqslant P_1$. Это означает, что на каждом такте $f \leqslant f'$. Таким образом, если $\exists B, T$, удовлетворяющие условию теоремы, то и для модели γ будет выполенено условие $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^2 \backslash B$ $f(\alpha) = 0$, так как $f \leqslant f'$. Укажем алгоритм нахождения множества B. Из утверждения следует, что $\Phi^t f \leqslant \Phi^{t+1} f$, соотвественно, если взять T, такое что $\Phi^T(f) = \Phi^{T+1}(f)$.

Введем ограничение на модель. Пусть задана граница Г и внутреннее множество B. Ограничение состоит в следующем — конфликт не может расспространяться за пределы границы Г. Тогда число всевозможных конфигураций множества B можно ограничить сверху следующим образом:

$$N \leqslant |\overline{E_n}|^{|B|}.$$

Данная оценка сильно груба, так как уже для $|\overline{E_n}| = 4$, число справа очень велико.

Для уменьшения оценки предлагается следующий алгоритм.

1 шаг. Внутри множества B выделяются клетки α_i, такие что

$$\sum_{\beta \in V(\alpha_i)} f(\beta) \leqslant k_{1-n(\alpha_i)},\ n(\beta) \neq n(\alpha_i).$$

Такие клетки не могут стать активными и они помечаются.

2 шаг. Среди оставшихся непомеченными клеток, снова выделяются клетки, описанные на шаге 1, только теперь в подсчете не участвуют клетки, отмеченные на шаге 1.

Шаг 2 повторяется до тех пор, пока появляются новые отмеченные клетки. Как результат работы алгоритма, мы получим неотмеченные клетки, которые (и только они) могут стать активными в процессе функционирования модели. Связные множества $B_1, B_2, \ldots, B_m$ таких клеток назовем *кластерами*. Тогда число исследуемых конфигураций можно уменьшить:

$$N \leqslant \sum_{i=1}^{m} \overline{E_n}^{|B_i|}.$$

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.