Аксиоматический подход к задаче нахождения оптимального полигонального представления контура

А. Г. Броневич, А. Е. Лепский

1. Введение

Одним из предварительных этапов в задачах распознавания и анализа плоского контура в теории распознавания изображений является его аппроксимация некоторым многоугольником с вершинами в наиболее информативных (контрольных) точках. Этот многоугольник называют полигональным представлением контура. Некоторые подходы к получению полигонального представления контура можно найти в [1]. Полигональное представление определяется неоднозначно, но должно сохранять основную информацию о контуре, достаточную для его последующей классификации. Многоугольник, содержащий минимальное число вершин и обладающий этим свойством, будем называть оптимальным полигональным представлением контура. В этой статье будет рассмотрен некоторый общий аксиоматический подход к нахождению оптимального полигонального представления плоского контура, связанный с построением и исследованием нечеткой меры (меры информативности), рассматриваемой на множестве всех подмножеств контура изображения и удовлетворяющей условиям монотонности и нормировки.

2. Полигональное представление контура и мера его информативности

Будем рассматривать плоский замкнутый несамопересекающийся контур, заданный последовательностью точек $X = \{x_1, \dots, x_N\}$. При этом считаем $x_0 = x_N$ и предполагаем, что соседние точки x_i, x_{i+1}, $i = 1, \dots, N-1$, а также конечные точки x_1, и x_N связаны между собой отрезком прямой линии. Такое представление контура называется полигональным. Через $\bar{X}$ обозначим замкнутую область, ограниченную контуром. Введем на контуре $\bar{X}$ меру информативности его подконтура $B = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < N$, показывающую степень его информативности по отношению к исходному контуру после удаления малоинформативных точек. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех подмножеств контура X.

Определение 1. Мерой информативности μ назовем такую функцию множества на $\mathfrak{A}$, которая удовлетворяет условиям:
1) $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = 1$ (нормированность);
2) если $A \subseteq B$, то $\mu(A) < \mu(B)$ (монотонность);
3) пусть $B = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}, x_{i_{n+1}}, \dots, x_{i_k}\}$ и точки $x_{i_{n-1}}, x_{i_n}, x_{i_{n+1}}$ лежат на одной прямой, тогда $\mu(B) = \mu(B \setminus \{x_{i_n}\})$;
4) значение меры информативности не изменяется при аффинных преобразованиях координат на плоскости, таких как поворот, параллельный перенос и масштабирование.

Заметим, что свойства 1), 2) — это аксиомы, которым должна удовлетворять нечеткая мера, введенная Сугено [2].

3. Способы определения нечетких мер информативности контура

Пусть X — некоторый контур, такой, что площадь области $\bar{X}$ ненулевая. Тогда примерами мер информативности являются нормированные длина и площадь подконтура $B \subset X$, которые можно ввести по формулам $\mu_L(B) = L(B)/L(X)$ и $\mu_S(B) = S(B)/S(X)$ соответственно, где $L(B)$ — длина контура B, $S(B)$ — площадь области $\bar{B}$. Следующее утверждение очевидно

Теорема 1. *1) Функция множества $\mu_L(B)$ удовлетворяет всем аксиомам нечеткой меры информативности контура.*
2) Функция множества $\mu_S(B)$ удовлетворяет всем аксиомам нечеткой меры информативности для выпуклых контуров.

Отметим, что для невыпуклых областей, ограниченных контуром, вторая часть теоремы 1 уже перестает быть справедливой.

Другой способ определения меры информативности связан с понятием оценки кривизны. Под ε-оценкой $\hat{k}_\varepsilon[A](x) = \hat{k}_\varepsilon(x)$ кривизны $k(x)$ в точке x контура A понимают такую функцию точки, зависящую от параметра ε, которая удовлетворяет условиям:
1) для гладкого контура $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \hat{k}_\varepsilon(x) = k(x)$;

2) если рассматривать зашумленный контур $\tilde{\Gamma}$ как кривую, описываемую случайной функцией, то ε-оценка будет случайной величиной $K_\varepsilon(x)$, которая должна удовлетворять условию $\sigma^2(K_\varepsilon(x)) \to 0$ при $\varepsilon \to \infty$. Например, в качестве такой оценки можно использовать величину $\hat{k}_\varepsilon[A](x) = C(\varepsilon)|1-2I_\varepsilon(x)/S_\varepsilon(x)|$ [3], где $S_\varepsilon(x)$, $I_\varepsilon(x)$ — площадь ε-окрестности $U_\varepsilon(x)$ точки x и области $U_\varepsilon(x)\cap\bar{A}$ соответственно, $C(\varepsilon)$ — константа, зависящая от метрики, относительно которой определяются окрестности (например, для окрестности, определяемой с помощью евклидовой метрики $C(\varepsilon) = 3\pi/(2\varepsilon)$). Рассмотрим отображение $L_\varepsilon :\ \mathfrak{A} \to l_p^n$, где $l_p^n = \left\{(z_i)_{i=1}^n :\ \|z\|_p\left(\sum_{i=1}^n |z_i|^p\right)^{1/p} < \infty\right\}$ ($n \leqslant N$, $0 < p < \infty$), действующее по правилу: $A = \{x_i\}_{i=1}^n \mapsto \left\{\hat{k}_\varepsilon[A](x_i)\right\}_{i=1}^n$. Определим на $\mathfrak{A}$ функцию множеств $\mu_{p,\varepsilon}(A) = \|L_\varepsilon(A)\|_p/\|L_\varepsilon(X)\|_p$, причем будем считать, что $\mu_{p,\varepsilon}(A) = 0$, если $|A| \leqslant 2$. Очевидно, что $\mu_{p,\varepsilon}(X) = 1$. Пусть $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ — представление контура $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, $a_i(A)$ — внутренний угол полигонального представления A при вершине x_i.

Теорема 2. *Пусть ε-оценка кривизны вычисляется по формуле $\hat{k}_\varepsilon(x) = C(\varepsilon)|1-2I_\varepsilon(x)/S_\varepsilon(x)|$. Если $\varepsilon \leqslant 0.5 \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i - x_{i+1}|$ и окрестности определяются с помощью евклидовой метрики, то справедливы следующие свойства меры $\mu_{p,\varepsilon}$:*

1) мера $\mu_{p,\varepsilon}(A) = \dfrac{\left(\sum_i |\pi - \alpha_i(A)|^p\right)^{1/p}}{\left(\sum_j |\pi - \alpha_j(X)|^p\right)^{1/p}}$ *и не зависит от величины*

$\varepsilon \leqslant 0.5 \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i - x_{i+1}|$;
2) $\mu_{1,\varepsilon}$ — нечеткая мера на $\mathfrak{A}$;
3) если $\bar{X}$ — выпуклое множество, то мера $\mu_{1,\varepsilon} : \mathfrak{A} \to \{0,1\}$, кроме того $\mu_{1,\varepsilon}(A) \equiv 1$ для любого множества $A \in \mathfrak{A}$, $|A| \geqslant 3$.
4) Пусть $0 < p < 1$ и $\bar{X}$ — такой выпуклый многоугольник, что все его внутренние углы не превосходят величины $\pi(1 - t_0)$, где t_0 — корень уравнения $t^p + 2^{p-1}(1-t)^p = 1$ $(0 < t < 1)$. Тогда $\mu_{p,\varepsilon}$ будет нечеткой мерой на $\mathfrak{A}$, если $\varepsilon \leqslant 0.5 \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i - x_{i+1}|$.

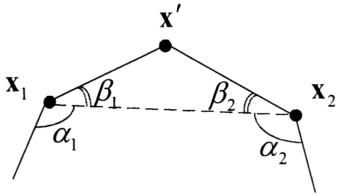


Рис. 1.

Доказательство. Справедливость первых трех пунктов теоремы проверяется непосредственно. Докажем 4). Для этого достаточно показать, что если $B = A \cup \{x'\}$ и $B = \{x_1, x', x_2, \ldots, x_N\}$, то $\mu_{p,\varepsilon}(A) \leqslant \mu_{p,\varepsilon}(B)$. Доказательство последнего неравенства сводится к доказательству оценки

$$\hat{k}^p_\varepsilon[A \cup \{x'\}](x_1) + \hat{k}^p_\varepsilon[A \cup \{x'\}](x_2) + \hat{k}^p_\varepsilon[A \cup \{x'\}](x') \geqslant \\ \geqslant \hat{k}^p_\varepsilon[A](x_1) + \hat{k}^p_\varepsilon[A](x_2).$$

Поскольку $\hat{k}^p_\varepsilon[A](x_i) = \frac{C_2(\varepsilon)}{\pi}|\pi - \alpha_i|$, $\hat{k}^p_\varepsilon[A \cup \{x'\}](x_i) = \frac{C_2(\varepsilon)}{\pi}|\pi - \alpha_i - \beta_i|$, $\hat{k}^p_\varepsilon[A \cup \{x'\}](x') = \frac{C_2(\varepsilon)}{\pi}|\beta_1 + \beta_2|$ $(i = 1,2)$ (см. рис. 1), где $\alpha_1 = \angle \ldots x_1 x_2$, $\alpha_2 = \angle x_1 x_2 \ldots$, $\beta_1 = \angle x' x_1 x_2$, $\beta_2 = \angle x' x_2 x_1$, то достаточно показать, что функция

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (\pi - \alpha_1 - \beta_1)^p + (\pi - \alpha_2 - \beta_2)^p + \\ + (\beta_1 + \beta_2)^p - (\pi - \alpha_1)^p - (\pi - \alpha_2)^p$$

неотрицательна в области

$$D = \{(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2): \ \alpha_i, \beta_i \geqslant 0, \ \alpha_i + \beta_i \leqslant \pi(1 - t_0) \ \ (i = 1, 2)\}.$$

Последнее условие будет выполняться, если t_0 удовлетворяет условиям теоремы.

4. Мера информативности контура и вес его вершин

Введем важную характеристику — функцию веса каждой вершины y контура B.

Определение 2. Функцией веса вершины y контура B по мере информативности μ называется величина, равная $\nu_B(y) = \mu(y) - \mu(B \setminus \{y\})$.

Рассмотрим функции веса для введенных мер информативности. Если в качестве меры информативности выбирается длина контура, то для точки x_{i_n} контура $B = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}, x_{i_{n+1}}, \ldots, x_{i_k}\}$ $\nu_B(x_{i_n}) = c(|v_i| + |v_2| - |v_1 + v_2|)$, где $v_1 = x_{i_n} - x_{i_{n-1}}$, $v_2 = x_{i_{n+1}} - x_{i_n}$, $c = L^{-1}(X)$. Если в качестве меры информативности выбирается площадь выпуклой области, ограниченной контуром, то $\nu_B(x_{i_n}) = \frac{c}{2}(|v_1 \times v_2|)$, где $v_1 \times v_2$ — векторное произведение векторов v_1 и x_2, $c = S^{-1}(X)$.

Лемма 1. *Пусть $A_1 = \{y_1\}, A_2 = \{y_1, y_2\}, \ldots, A_m = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\} = B$ — полная цепь множеств, тогда $\mu(B) = \sum_{n=1}^{m} \nu_{A_n}(y_n)$.*

Теорема 3. *Пусть μ — это функция множества, определенная на контуре $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Тогда эта функция будет мерой информативности в том и только том случае, если*
1) $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = 1$;
2) функция веса $\nu_B(x_{i_n}) = \mu(B) - \mu(B \setminus \{x_{i_n}\})$ для произвольного контура $B = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}, x_{i_{n+1}}, \ldots, x_{i_k}\} \subseteq X$ является а) неотрицательной; б) равной нулю, если точки $x_{i_{n-1}}, x_{i_n}, x_{i_{n+1}}$ лежат на одной прямой; в) инвариантной относительно аффинных преобразований координат точек $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, таких как поворот, параллельный перенос и масштабирование.

Доказательство. Достаточно показать, что $\mu(A) \leqslant \mu(B)$, если $A \subseteq B$. Рассмотрим множество $B \setminus A = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}$ и связанную с этим множеством последовательность множеств $C_0 = A$, $C_1 = C_0 \cup \{x_{j_1}\}, \ldots, C_m = C_{m-1} \cup \{x_{j_m}\} = B$. Тогда $\mu(B) = \mu(A) + \sum_{n=1}^{m} \nu_{C_n}(x_{j_n})$. Ясно, что $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ в силу неотрицательности функции веса ν. И обратно, пусть $\nu_B(x_k) < 0$ для некоторой вершины x_{i_n} контура B. Тогда $\mu(B) = \mu(B \setminus \{x_k\}) + \nu_B(x_k)$ и, значит, не выполняется аксиома монотонности для нечеткой меры.

Возникает вопрос, можно ли получить меру информативности, задавая некоторым произвольным образом функцию веса? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 4. *Пусть функция веса $\nu_B(x)$ обладает всеми свойствами, перечисленными в теореме 3. Кроме того, для любого $B \subseteq X$ и точек $y_i, y_j \in B$, $y_i \neq y_j$, выполняется*

$$\nu_B(y_i) + \nu_{B\setminus\{y_i\}}(y_j) = \nu_B(y_j) + \nu_{B\setminus\{y_j\}}(y_i), \tag{1}$$

тогда для любого множества $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ и произвольной цепи множеств $A_1 = \{y_{i_1}\}$, $A_2 = \{y_{i_1}, y_{i_2}\}, \ldots, A_k = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}\} = B$ сумма $\sum_{n=1}^{k} \nu_{A_n}(y_{i_n})$ не зависит от порядка следования индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$. При этом функция множества

$$\mu(B) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{k} \nu_{A_n}(y_{i_n}), & B \neq \varnothing, \\ 0, & B = \varnothing, \end{cases} \tag{2}$$

является мерой информативности, если $\mu(X) = 1$.

Доказательство. Справедливость свойства (1) для функции веса проверяется непосредственно. Докажем, что значение $\mu(B)$, вычисляемое но формуле (2), не зависит от порядка следования индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, если выполняется (1). Пусть $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Рассмотрим два порядка следования индексов $\alpha = (i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_k = k)$ и $\beta = (j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_m = m+1, j_{m+1} = m, \ldots, j_k = k)$, отличающихся друг от друга инверсией элементов m и $m+1$. Сравним числа $a = \sum_{n=1}^{k} \nu_{A_n}(y_{i_n})$ и $b = \sum_{n=1}^{k} \nu_{C_n}(y_{j_n})$ где $A_n = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}\}$, $C_n = \{y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}\}$. В этих суммах $A_n = C_n$ для

$n = 1, \ldots, k$, $n \neq m$ и $A_m = A_{m+1} \setminus \{y_{m+1}\}$, $C_m = A_{m+1} \setminus \{y_m\}$. Тогда $a - b = \big(\nu_{A_{m+1}}(y_{m+1}) + \nu_{A_{m+1}\setminus\{y_{m+1}\}}(y_m)\big) - \big(\nu_{A_{m+1}}(y_m) + \nu_{A_{m+1}\setminus\{y_m\}}(y_{m+1})\big) = 0$ в силу свойства (1). Таким образом, инверсия индексов в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ не влияет на значение $\mu(B)$. Так как из всякой перестановки с помощью конечного числа инверсий мы можем получить любую другую перестановку, то сумма $\sum_{n=1}^{k} \nu_{A_n}(y_{i_n})$ не зависит от порядка следования индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Остальные утверждения теоремы следуют из теоремы 3.

Заметим, что функция веса $\nu_B^*(x)$, задаваемая эвристически, не обладает свойством (1). Это замечание также относится к мере информативности, вычисляемой по площади области, ограниченной контуром. Возникает вопрос, как можно продолжить эту меру информативности для случая невыпуклых контуров. Следующая теорема очевидна.

Теорема 5. *Пусть функция веса $\nu_B^*(x)$ неотрицательна и инвариантна относительно аффинных преобразований, рассматриваемых для меры информативности. Пусть $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ и $\gamma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — перестановка индексов $\{1, 2, \ldots, k\}$, тогда функция множества*

$$\mu(B) = \begin{cases} \max\limits_{\gamma} \sum_{n=1}^{k} \nu_{A_{\gamma,n}}^*(y_{i_n}), & B \neq \varnothing, \\ 0, & B = \varnothing, \end{cases} \tag{3}$$

где $A_{\gamma,n} = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}\}$, $n = 1, 2, \ldots, k$, и максимум в формуле (3) берется по всем перестановкам множества $\{1, 2, \ldots, k\}$, будет нечеткой инвариантной мерой, если $\mu(X) = 1$.

Замечание. С помощью формулы (3) мы можем определить нечеткую меру μ_S информативности для невыпуклого контура. Для этого определяем функцию веса по формуле: $\nu_B^*(y_i) = 0.5|(y_i - y_{i-1}) \times (y_i - y_{i+1})|$, где y_{i-1}, y_{i+1} — соседние вершины для y_i, в контуре B и «$\times$» — операция векторного произведения.

5. Выбор оптимального полигонального представления контура по мере информативности

Пусть на контуре $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ задана мера информативности μ. Рассмотрим произвольное множество контуров $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{A}$.

Определение 3. Контур $B \in \mathcal{A}$ назовем $\mathcal{A}$-оптимальным, если выполняется условие
$$\mu(B) = \max_{A \in \mathcal{A}} \mu(A). \tag{4}$$

Данное определение дает широкие возможности постановки задач выбора оптимального полигонального представления. Рассмотрим одну из них.

Определение 4. Контур $A \subseteq X$ называется ε-точным, если для любой точки $y \notin A$, $\nu_{A \cup \{y\}}(y) \leqslant \varepsilon$.

Обозначим через $\mathcal{A}_\varepsilon \subseteq \mathfrak{A}$ множество всех ε-точных контуров, через $\mathcal{A}_{\varepsilon,k} \subseteq \mathfrak{A}$ множество всех ε-точных контуров, содержащих k вершин.

Таким образом, можно рассматривать задачу нахождения $\mathcal{A}_{\varepsilon,k}$-оптимального контура. Понятие ε-точного контура должно удовлетворять также некоторым дополнительным условиям, например, логично потребовать, чтобы из того, что $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$, следовало бы, что и любое множество B, $B \supseteq A$, также было ε-точным контуром.

Теорема 6. *Семейство ε-точных контуров $\mathcal{A}_\varepsilon$ является фильтром, то есть если $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$, $B \supseteq A$, то $B \in \mathcal{A}_\varepsilon$ в том и только том случае, если функция множества*
$$\tau(A) = \begin{cases} \max\limits_{y \in X \setminus A} \nu_{A \cup \{y\}}(y), & A \neq X, \\ 0, & A = X, \end{cases}$$
является антимонотонной: из $A \subseteq B$ следует, что $\tau(A) \geqslant \tau(B)$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{A}_\varepsilon = \{A \subseteq X \mid \tau(A) \leqslant \varepsilon\}$. Так как $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$, то $\tau(A) \leqslant \varepsilon$, поэтому из антимонотонности функции τ следует, что для любого контура B, $B \supseteq A$, $\tau(B) \leqslant \tau(A) \leqslant \varepsilon$, то есть

$B \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Обратно, пусть функция τ не является антимонотонной. В этом случае найдутся контуры $A, B \subseteq X$ такие, что $A \subseteq B$, $\tau(A) < \tau(B)$. Выберем ε: $\tau(A) < \varepsilon < \tau(B)$. Тогда $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$, $B \notin \mathcal{A}_\varepsilon$, то есть множество $\mathcal{A}_\varepsilon$ не является фильтром.

Определение 5. Функцию $\tau(A)$ будем называть функцией точности контура.

Введем еще одну характеристику полигонального представления контура.

Определение 6. Величину

$$\delta(A) = \min_{y \in A} \nu_A(y), \quad \varnothing \subset A \subseteq X,$$

назовем степенью обусловленности контура A, а сам контур, для которого $\delta(A) > \varepsilon$ назовем ε-обусловленным. Множество всех ε-обусловленных контуров обозначим через $\mathcal{B}_\varepsilon$. Контур $B \in \mathcal{B}_\varepsilon$, для которого $\mu(B) = \max\limits_{A \in \mathcal{B}_\varepsilon} \mu(A)$ назовем оптимальным ε-обусловленным контуром.

Таким образом, ε-обусловленный контур B содержит вершины x, для которых $\nu_B(x) > \varepsilon$.

6. Алгебраические свойства нечетких мер информативности

Напомним некоторые определения и результаты из теории нечетких мер [4].

Определение 7. Нечеткая мера μ на $\mathfrak{A}$ называется супермодулярной (субмодулярной), если $\mu(A) + \mu(B) \leqslant \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$ $(\mu(A) + \mu(B) \geqslant \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B))$ для любых $A, B \in \mathfrak{A}$.

Следующая теорема хорошо известна в теории игр [5].

Теорема 7. *Нечеткая мера μ является супермодулярной (субмодулярной) на $\mathfrak{A}$ в том и только том случае, когда ее функция веса является монотонной (антимонотонной), то есть $\nu_A(y) \leqslant \nu_B(y)$ $(\nu_A(y) \geqslant \nu_B(y))$ для любых множеств $A \subseteq B \in \mathfrak{A}$ и $y \in A$.*

Следствие 1. *Пусть мера информативности контура μ является субмодулярной. Тогда функция τ точности контура является антимонотонной, то есть $\tau(A) \geqslant \tau(B)$, если $A \subseteq B$.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq B \in \mathfrak{A}$. Докажем, что $\tau(A) \geqslant \tau(B)$. По определению функции точности

$$\tau(A) = \max_{y \in X \setminus A} \nu_{A \cup \{y\}}(y) = \nu_{A \cup \{y_1\}}(y_1),$$
$$\tau(B) = \max_{y \in X \setminus B} \nu_{B \cup \{y\}}(y) = \nu_{B \cup \{y_2\}}(y_2).$$

По условию $\nu_{A \cup \{y_1\}}(y_1) \geqslant \nu_{A \cup \{y_2\}}(y_2) \geqslant \nu_{B \cup \{y_2\}}(y_2)$. Поэтому $\tau(A) \geqslant \tau(B)$.

Следствие 2. *Пусть нечеткая мера информативности μ контура субмодулярна. Тогда функция обусловленности контура является аптимонотонной: если $\varnothing \subset A \subseteq B \subseteq X$, то $\delta(A) \geqslant \delta(B)$.*

Доказательство. Пусть $\varnothing \subset A \subseteq B \in \mathfrak{A}$, тогда

$$\delta(A) = \max_{y \in A} \nu_A(y) = \nu_A(y_1), \quad \delta(B) = \max_{y \in B} \nu_B(y) = \nu_B(y_2).$$

Используя свойство субаддитивности меры, получаем $\nu_A(y_1) \geqslant \nu_B(y_1) \geqslant \nu_B(y_2)$, то есть $\delta(A) \geqslant \delta(B)$.

7. Алгоритмы выделения оптимального полигонального представления контура

Определение 8. Пусть задан контур $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ и мера информативности μ на $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathcal{A}(n) = \{A \in \mathfrak{A} \big| |A| = n\}$. Тогда контур $B \in \mathcal{A}(N)$ называется N-оптимальным по мере μ, если $\mu(B) = \max\limits_{A \in \mathcal{A}(n)} \mu(A)$.

а) **Выбор базового множества**, то есть множества таких точек контура, которые, согласно некоторым априорным предположениям, должны принадлежать оптимальному полигональному представлению. Будем считать, что минимальное полигональное представление должно удовлетворять условиям:

1) если точка x_i, принадлежит этому представлению, то в некоторой ее окрестности $\{x{-}t+i, x_{-t+i+1}, \ldots, x_i, \ldots, x_{t+i}\}$, $t > 0$, нет других контрольных точек;
2) в представлении точки должны иметь большой вес. Тогда в качестве контрольных точек для базового множества можно выбрать хорошо обусловленные ($\nu(x_i) > 0$) максимумы функции веса ν ($\nu(x_{i-1}) \leqslant \nu(x_i)$ и $\nu(x_i) \geqslant \nu(x_{i+1})$).

б) **Алгоритм поиска n-оптимального полигонального представления:**
1) Для контура X выбирается базовое множество точек $B_0 = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ $(m > n)$.
2) Из множества B_0 последовательно удаляются точки с наименьшим весом до тех пор, пока число точек не станет равным n — получим контур B_1, содержащий ровно n точек.
3) Пусть $\delta(B_1) < \tau(B_1)$, тогда существуют такие точки $x, y \in X$, что $x \in B_1$ и $y \in X \setminus B_1$, причем $\nu_{B_1}(x) = \delta(B_1) < \tau(B_1) = \nu_{B_1 \cup \{y\}}(y)$. Таким образом, можно увеличить информативность контура, если в качестве следующего приближения n-минимального представления выбрать множество $B_2 = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$.

Если мера μ является субмодулярной, то $\mu(B_2) > \mu(B_1)$. Действительно

$$\mu(B_2) = \mu(B_1) - \nu_{B_1}(x) + \nu_{(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}}(y). \tag{5}$$

По условию $\nu_{B_1}(x) < \nu_{B_1 \cup \{y\}}(y)$. Поскольку $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \subseteq B_1 \cup \{y\}$, то по теореме 7 $\nu_{B_1 \cup \{y\}}(y) \leqslant \nu_{B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}}(y)$, то есть из равенства (5) следует, что $\mu(B_2) > \mu(B_1)$. Таким образом, на шаге 3 для субаддитивных мер можно увеличивать информативность контура до тех пор, пока $\delta(B_i) < \tau(B_i)$.

Предложенный алгоритм не позволяет получить n-минимальный контур, а дает лишь некоторое приближение данного оптимального контура.

в) **Алгоритм выделения оптимального ε-обусловленного контура:**
1) Выбор базового множества $B_0 = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.
2) Из контура B_0 последовательно удаляются вершины y_i, для которых $\nu_{B_0}(y_i) \leqslant \varepsilon$, в результате получим контур B_1, для которого

$\delta(B_1) > \varepsilon$ (подчеркнем, что расчет $\nu_{B_0}(y_i)$ производится с учетом удаленных вершин).
3) К контуру B_1 последовательно добавляются вершины y_i из множества $X \setminus B_1$, для которых $\nu_{B_1 \cup \{y_i\}}(y_i) > \varepsilon$, в результате получим контур B_2 такой, что $\tau(B_2) \leqslant \varepsilon$.

Шаги 2) и 3) следует повторять до тех пор, пока не получим контур B_k, для которого $\delta(B_k) > \varepsilon \geqslant \tau(B_k)$.

Теорема 8. *Пусть базовое множество B_0 выбрано таким образом, что*

$$|B_0|\varepsilon < \mu(B_0). \tag{6}$$

Тогда алгоритм поиска оптимального ε-обусловленного контура сходится к непустому контуру B_k.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия (6) на шаге 2 мы не получим пустой контур. Предположим противное, что условие (6) выполняется, и на таге 2 могут быть удалены все вершины. В этом случае существует такая полная цепь множеств $B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_m = \{y_m\}$, что $B_i \setminus B_{i+1} = \{y_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, причем $\nu_{B_0}(y_0) \leqslant \varepsilon$, $\nu_{B_1}(y_1) \leqslant \varepsilon, \ldots, \nu_{B_m}(y_m) \leqslant \varepsilon$. Однако $\sum_{i=0}^{m} \nu_{B_i}(y_i) = \mu(B_0)$, а это противоречит неравенству (6).

Ясно, что неравенство (6) будет оставаться в силе после удаления вершины $y_i \in B_0$, вес которой $\nu_{B_0}(y_i) \leqslant \varepsilon$, а также после добавления вершины $y_i \in X \setminus B_0$, вес которой $\nu_{B_1 \cup \{y_i\}}(y_i) > \varepsilon$. Таким образом, на шаге 2 не может возникнуть ситуация, в которой будет получен пустой контур.

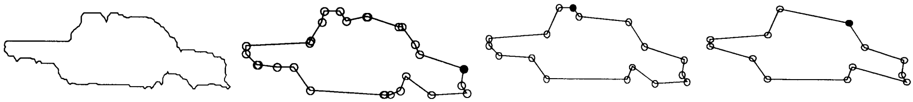
Докажем, что предложенный алгоритм сходится. Для этого вначале покажем, что данная процедура не может породить в процессе решения один и тот же контур. Предположим противное, что контур A порождает контур A. Тогда это может произойти в результате удаления n вершин и добавления n вершин. По алгоритму удаление n вершин приведет к уменьшению $\mu(A)$ на число не большее, чем $\varepsilon \cdot n$, а добавление n вершин приведет к увеличению $\mu(A)$ на число большее, чем $\varepsilon \cdot n$, то есть в этом случае получим неравенство $\mu(A) < \mu(A)$, которое является ложным. С учетом доказанного свойства, предложенный алгоритм осуществляет некоторый направленный перебор допустимых контуров. Поскольку число допустимых контуров конечно, то алгоритм обязательно сходится, и на некотором итерационном шаге получим неравенство $\delta(B_k) > \varepsilon \geqslant \tau(B_k)$.

Следствия из предложенных алгоритмов.

1) Пусть B, $B \subseteq X$ — n-оптимальный контур по субмодулярной мере μ, тогда $\delta(B) \geqslant \tau(B)$;

2) Пусть B, $B \subseteq X$ — оптимальный ε-обусловленный контур, тогда $\delta(B) > \varepsilon \geqslant \tau(B)$;

3) Задачи нахождения оптимального ε-обусловленного и оптимального ε-точного контура совпадают, то есть если B — это оптимальный ε-обусловленный контур, то этот контур является и оптимальным ε-точным контуром, и наоборот, если B — это оптимальный ε-точный контур, то он является оптимальным ε-обусловленным контуром.



а) б) в) г)

Рис. 2. а) базовый контур, б) базовое множество, в) ε_1-обусловленный контур, г) ε_2-обусловленный контур.

Результат работы алгоритма выделения оптимального ε-обусловленного контура представлен на рис. 2. Базовое множество контрольных точек было выделено в результате нахождения локальных максимумов весовой функции $\nu(x_i) = \|x_{i-t} - x_i\| + \|x_i - x_{i+t}\| - \|x_{i-t} - x_{i+t}\|$, в 4-х пиксельных окрестностях граничных точек. Выбор значения ε, при котором получается «хороший» ε-обусловленный контур, можно произвести по гистограмме распределения значений весовой функции. Здесь $\varepsilon_1 = 1/L(X)$, $\varepsilon_2 = 2/L(X)$, где $L(X)$ — длина контура.

Список литературы

[1] Gonzales R. C., Woods R. E. Digital Image Processing. 2002. 2-nd ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

[2] Sugeno M. Fuzzy measure and fuzzy integral. Tram. SICE. 1972. V. 8, 2. 95–102.

[3] Броневич А. Г., Лепский А. Е. Применение теории нечетких мер к оцениванию информативности полигонального представления контура изображения // В сб. трудов межд. науч.-практич. семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте», 17-18 мая 2001. Коломна. С. 112–116.

[4] Grabisch M., Nguyen H. T., Walker E. A. Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference. New York: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[5] Данилов В. И. Лекции по теории игр. /КЛ/2002/001. — М.: Российская экономическая школа, 2002.