Планирование измерений при оценке качества продукции на основе условия относительной равноточности

Н. Г. Назаров, А. Н. Назаров

1. Формирование альтернативных гипотез на основе радиуса гиперсферы

Пусть экземпляр продукции характеризуется совокупностью разнородных величин x_k, $k = \overline{1, m}$. Требования, предъявляемые к качеству продукции, заданы в виде двухсторонних полей допусков

$$|\Delta x_k| \leqslant \frac{1}{2} T x_k, \quad k = \overline{1, m},$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{0k}$, x_{0k} — координата середины поля допуска для величины x_k, (значения x_{0k}, $k = \overline{1, m}$ известны), Tx_k — допуск поля допуска.

Альтернативные гипотезы по каждой величине запишутся в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} H_{0k}:\ & |\Delta x_k| \leqslant \frac{1}{2} T x_k, \\ H_{1k}:\ & |\Delta x_k| > \frac{1}{2} T x_k, \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Тогда альтернативные гипотезы, представляющие две градации качества продукции, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} H_0 &: \bigcap_{k=1}^{m} H_{0k} \text{ — годная продукция,} \\ H_1 &: \bigcup_{k=1}^{m} \left[\bigcup_{j=1}^{N_\nu} H_j(\nu) \right] \text{ — дефектная продукция,} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $H_j(\nu)$, $j = \overline{1, N_\nu}$ — гипотезы, в которых ν величин выходят за пределы поля допуска, $N_\nu = \frac{m!}{\nu!(m-\nu)!}$, «$\cup$» — знак объединения гипотез.

Рассмотрим простейший случай $m = 2$. Для него будем иметь:

$$N_\nu = \begin{cases} 2, & \text{если } \nu = 1, \\ 1, & \text{если } \nu = 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H_0 &: \ H_{01} \bigcap H_{02}, \\ H_1(1) &: \ H_{01} \bigcap H_{12}, \\ H_2(2) &: \ H_{11} \bigcap H_{02}, \\ H_1(2) &: \ H_{11} \bigcap H_{12}, \\ H_1 &: \ H_1(1) \bigcup H_2(1) \bigcup H_1(2), \end{aligned}$$

где «$\cap$» — знак произведения гипотез.

Для гипотезы H_0 вероятность правильно оценить ее равна

$$1 - \alpha = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2), \tag{3}$$

где α, α_1, α_2 — вероятности ошибок 1-го рода для гипотез H_0, H_{01}, H_{02}.

Аналогичная вероятность для гипотезы H_1 равна

$$1 - \beta = \alpha_1(1 - \beta_2) + \alpha_2(1 - \beta_1) + (1 - \beta_1)(1 - \beta_2), \tag{4}$$

где β, β_1, β_2 — вероятности ошибок 2-го рода для гипотез H_1, H_{11}, H_{12}.

При планировании измерений в задаче оценки качества продукции на вероятности ошибок 1-го и 2-го рода накладываются следующие ограничения:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \leqslant \alpha_0 << 1, \\ &\beta \leqslant \beta_0 << 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

При процедуре независимого контроля каждой величины x_k, $k = \overline{1, m}$ вводятся аналогичные ограничения

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_k \leqslant \alpha_{0k}, \\ &\beta_k \leqslant \beta_{0k}, \quad k = \overline{1, 2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для того чтобы обеспечить выполнение условий (5), нужно выбрать соответствующие ограничения в условиях (6). Таких ограничений четыре, а уравнений, их связывающих с ограничениями α_0 и β_0, два. Поэтому для однозначного определения ограничений α_{0k}, β_{0k}, $k = 1, 2$ нужно вводить дополнительные условия. Кроме того, при $m >> 1$ возрастают сложности формирования уравнений (3), (4) и отыскания их решений.

Указанные трудности будут сняты, если альтернативные гипотезы сформировать на скалярной величине.

Для оценки неизвестных значений разнородных величин x_k, $k = \overline{1, m}$ используются конкретные экземпляры разнородных средства измерения СИ$_k$, $k = \overline{1, m}$ с соответствующими методиками выполнения измерений (МВИ). Результат измерения величины x_k в конкретных рабочих условиях измерения имеет следующую структуру

$$Y(x_k) = m_y(x) + \mathring{E}_k = x_k + E(x_k) = x_k + m_e(x_k) + \mathring{E}_k, \quad k = \overline{1, m},$$

где $m_y(x_k)$ — математическое ожидание случайного результата измерения $Y(x)$ (детерминированная величина), $E(x_k) = Y(x_k) - x_k = m_e(x_k) + \mathring{E}$ — случайная погрешность, $m_e(x_k) = m_y(x_k) - x_k$ — систематическая погрешность (детерминированная величина), $\mathring{E}_k$ — центрированная случайная составляющая случайной погрешности $E(x_k)$ с дисперсией D_{ek}.

В законе РФ «Об обеспечении единства измерений» определено понятие «единство измерений», в котором указан вид нормы для случайной погрешности, а именно «...погрешность не должна выходить за установленные пределы с заданной вероятностью». Формально для случайной погрешности результата измерения $E(x_k)$ условие единства измерений можно записать в следующем виде

$$P\Big(|E(x_k)| \leqslant \frac{1}{2}Te_k\Big) \geqslant 1-\varepsilon, \quad \varepsilon << 1, \tag{7}$$

где $|E(x_k)| \leqslant \frac{1}{2}Te_k, \quad k=\overline{1,m}$ — случайное событие, состоящее в том, что случайная погрешность $E(x_k)$ не выходит за пределы $(-\frac{1}{2}Te_k,\, \frac{1}{2}Te_k)$, $1-\varepsilon$ — заданная вероятность.

Поскольку случайная погрешность $E(x_k)$ характеризуется величинами $m_e(x_k)$ и D_{ek}, то условие единства измерений относительно $E(x_k)$ будет выполняться лишь при определенных ограничениях этих величин, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &D_{ek} \leqslant D^*_{ek}, \quad k=\overline{1,m} \text{ — условие единства измерений относительно дисперсии,}\\ &|m_e(x_k)| \leqslant \frac{1}{2}T^*m_{ek}, \quad k=\overline{1,m} \text{ — условие единства измерений относительно систематической погрешности,} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{D^*_{ek}} = \sigma^*_{ek} = \frac{1}{2}Te_k t^{-1}_{0,5(1-\lambda\varepsilon)}, \quad k=\overline{1,m}\\ T^*m_{ek} = 2\sigma_{ek}(t_{0k}-t_{0,5-\varepsilon}), \quad k=\overline{1,m} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$t_{0,5-\varepsilon}$, $t_{0,5(1-\lambda\varepsilon)}$ — квантили функции Лапласа, соответствующие значениям $0{,}5-\varepsilon$ и $0{,}5(1-\lambda\varepsilon)$, $0<\lambda<1$, $t_{0k}=\frac{1}{2}\frac{Te_k}{\sigma_{ek}}$.

Переход от условия (7) к условию (8), а также алгоритмы формирования оптимальных планов измерения при экспериментальной оценке условия единства измерений (8) в конкретных рабочих условиях измерения и для МВИ, использующей конкретные СИ, изложены в работе [2].

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_{exk} = \frac{Te_k}{Tx_k} = \eta_{ex} - \text{const}, \quad k=\overline{1,m}\\ &\eta_{ek} = \frac{\sigma_{ek}}{\sigma^*_e} \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда получим

$$\sigma^*_{ek} = K_e T x_k,$$
$$T^* m_{ek} = \gamma_k T x_k,$$

где

$$\left.\begin{aligned} K_e &= \frac{1}{2}\eta_{ex} t^{-1}_{0,5(1-\lambda\varepsilon)}, \\ \gamma_k &= 2K_e(t_{0,5(1-\lambda\varepsilon)} - \eta_{ek} t_{0,5-\varepsilon}), \quad k = \overline{1,m}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

K_e, γ_k, $k = \overline{1,m}$ — числовые коэффициенты, определяющие дольные части допуска Tx_k, приходящиеся на ограничения σ^*_{ek}, $T^* m_{ek}$, $k = \overline{1,m}$.

В последующем изложении будем исходить из допущения, что качество погрешности $E(x_k)$, $k = \overline{1,m}$ однократного результата измерения в рабочих условиях оценки качества продукции удовлетворяет условиям (8).

Приведем альтернативные гипотезы к безразмерному виду. С этой целью разделим обе части отношений (1) на соответствующее среднее квадратическое отклонение (СКО) σ_{ek}. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} H_{0k}:\ |\varepsilon_{xk}| &\leqslant \frac{1}{2}T\varepsilon_{xk}, \\ H_{1k}:\ |\varepsilon_{xk}| &> \frac{1}{2}T\varepsilon_{xk}, \quad k = \overline{1,m}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $\varepsilon_{xk} = \frac{\Delta x_k}{\sigma_{ek}}$, $k = \overline{1,m}$ — приведенное отклонение,

$$T\varepsilon_{xk} = \left.\frac{Tx_k}{\sigma_{ek}}\right|_{\sigma_{ek}=\eta_{ek}K_e T x_k} = \frac{1}{\eta_{ek}K_e}, \quad k = \overline{1,m} \text{ — приведенный допуск.} \tag{13}$$

Величина $\frac{Tx_k}{\sigma_{ek}}$ характеризует количество СКО, содержащееся в допуске, причем, чем меньше СКО, тем больше отношение $\frac{Tx_k}{\sigma_{ek}}$. Поэтому приведенный допуск $T\varepsilon_{xk}$, $k = \overline{1,m}$ представляет относительную меру точности по СКО результатов измерений, получаемых с использованием СИ$_k$, $k = \overline{1,m}$.

Пусть

$$T\varepsilon_x = T\varepsilon_{x\hat{k}} = \max\{T\varepsilon_{x1}, \ldots, T\varepsilon_{xm}\}, \tag{14}$$

где $\hat{k}$ — номер СИ с максимальным приведенным допуском.

Введем величины

$$\frac{T\varepsilon_{xk}}{T\varepsilon_x} = \frac{\eta_e K_e}{\eta_{ek} K_e} = \lambda_k = \eta_e \eta_{ek}^{-1} \leqslant 1, \quad k = \overline{1, m}. \tag{15}$$

Теперь гипотезы (12) можно записать следующим образом

$$\left.\begin{aligned} &H_{0k}: \ |\varepsilon_{xk}|\lambda_k^{-1} = |\hat{\varepsilon}_{xk}| \leqslant \frac{1}{2} T\varepsilon_x, \quad \hat{\varepsilon}_{xk} = \varepsilon_{xk}\lambda_k^{-1}, \\ &H_{1k}: \ |\varepsilon_{xk}|\lambda_k^{-1} = |\hat{\varepsilon}_{xk}| > \frac{1}{2} T\varepsilon_x. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

На безразмерных составляющих $\hat{\varepsilon}_{xk}$, $k = \overline{1, m}$ образуем вектор-столбец

$$\bar{\hat{\varepsilon}}_x = (\hat{\varepsilon}_{x1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{xk})^{\mathrm{T}}.$$

Его модуль удовлетворяет следующему отношению:

$$|\bar{\hat{\varepsilon}}_x| = \varepsilon_x = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \hat{\varepsilon}_{xk}^2} \leqslant \frac{\sqrt{m}}{2} T\varepsilon_x. \tag{17}$$

Если в этом отношении оставить только знак равенства, то получим уравнение гиперсферы

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{\varepsilon}_{xk}^2 = \left(\frac{\sqrt{m}}{2} T\varepsilon_x\right)^2, \tag{18}$$

где $\frac{\sqrt{m}}{2} T\varepsilon_x = r(m)$ — радиус гиперсферы.

Гиперсфера, определяемая уравнением (18), проходит через вершины гиперкуба с центром в начале системы координат и с длиной ребра $T\varepsilon_x$. Если радиус гиперсферы принять равным

$$r(m) = \frac{1}{2} T\varepsilon_x,$$

то получим гиперсферу, вписанную в этот гиперкуб.

При $r(m) = \frac{\rho(m)}{2} T\varepsilon_x = \varepsilon_x^*$, где $1 < \rho(m) < \sqrt{m}$, будем иметь гиперсферу, расположенную между гиперсферами, вписанной в гиперкуб и проходящей через его вершины. В частности, можно принять $\rho(m) = \sqrt[\lambda]{m}$, $\lambda = 3, 4, \ldots$

Теперь на основе отношения (16) образуем альтернативные гипотезы

$$\left.\begin{aligned} H_0 &: \ \varepsilon_x \leqslant \varepsilon_x^*, \\ H_1 &: \ \varepsilon_x > \varepsilon_x^*, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где гипотеза H_0 представляет векторы $\bar{\hat{\varepsilon}}_x$, не выходящие за пределы гиперсферы радиуса ε_x^*. Все остальные векторы образуют альтернативную гипотезу H_1. Таким образом, отношение $\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_x^*$ представляет поле допуска в форме гиперсферы радиуса ε_x^*, то есть годные изделия, а отношение $\varepsilon_x > \varepsilon_x^*$ — дефектные изделия.

2. Условие относительной равноточности многократных измерений

Малые вероятности ошибок 1-го и 2-го рода при оценке качества продукции можно обеспечить применяя процедуру многократных измерений. План измерений величины x_k обозначим (x_k, μ_k), $k = \overline{1, m}$, где μ_k, $k = \overline{1, m}$ — объем многократных измерений. Тогда план измерения совокупности величин x_k, $k = \overline{1, m}$ можно представить в виде

$$(\bar{x}, \bar{\mu}) = \bigcup_{k=1}^{m} (x_k, \mu_k),$$

где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$ — вектор плана измерения, $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ — вектор объема многократных измерений вектора $\bar{x}$.

Плану измерения (x_k, μ_k) соответствует вектор многократных измерений

$$\bar{Y}(x_k) = (Y_1(x_k), \ldots, Y_{\mu k}(x_k))^{\mathrm{T}} = \Phi_{\mu k}(x_k + m_e(x_k)) + \bar{\mathring{E}}_k,$$

где $\Phi_{\mu k} = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{\mu_k}{}^{\mathrm{T}}$ — матрица-столбец, состоящая из единиц, $\bar{\mathring{E}} = (\mathring{E}_{k1}, \ldots, \mathring{E}_{k\mu_k})^{\mathrm{T}}$ — центрированный случайный вектор с ковариационной матрицей $K_{ek} = D_{ek}V_{ek}$, $k = \overline{1,m}$, $V_{ek} = D_{ek}^{-1}K_{ek}$ — нормированная ковариационная матрица размера $\mu_k \times \mu_k$.

Алгоритм обработки вектора $\bar{Y}(x_k)$, сформированный на основе метода максимального правдоподобия, имеет следующий вид:

$$Z(x_k) = \sum_{j=1}^{\mu_k} w_j Y_j(x_k) = x_k + m_e(x_k) + \mathring{Z}_k, \tag{20}$$

где w_j, $j = \overline{1,\mu_k}$ — весовые коэффициенты, определяемые на основе элементов обратной матрицы V_{ek}^{-1}, $\mathring{Z}_k$ — центрированная случайная составляющая с дисперсией $D_{zk} = \frac{D_{ek}}{b_k(\mu_k)}$, $k = \overline{1,m}$, $b_k(\mu_k)$ — сумма элементов обратной матрицы V_{ek}^{-1}.

Отношение $\frac{Tx_k}{\sigma_{zk}} = \frac{Tx_k}{\sigma_{ek}}\sqrt{b_k(\mu_k)} = T\varepsilon_{xk}\sqrt{b_k(\mu_k)}$ есть приведенный допуск относительно СКО результата обработки многократных измерений (20).

Введем следующее условие

$$T\varepsilon_{xk}\sqrt{b_k(\mu_k)} \approx T\varepsilon_x\sqrt{b(\mu)}, \tag{21}$$

где $T\varepsilon_x = T\varepsilon_{x\hat{k}}$, $b(\mu) = b_{\hat{k}}(\mu_{\hat{k}})$.

Назовем его условием относительной равноточности многократных измерений. Очевидно, что выбором объемов многократных измерений μ_k, $k = \overline{1,m}$ условие (21) можно обеспечить. Из условия (21) получим

$$b_k(\mu_k) = \left(\frac{T\varepsilon_x}{T\varepsilon_{xk}}\right)^2 b(\mu) = \lambda_k^{-2} b(\mu), \quad k = \overline{1,m}. \tag{22}$$

Полученное уравнение (22) позволит при известном значении величины μ определить объемы многократных измерений μ_k, $k \neq \hat{k}$, $k = \overline{1,m}$, причем $\mu_{\hat{k}} = \mu$. Если многократные измерения по каждой величине x_k, $k = \overline{1,m}$ некоррелированы, то получим

$$\mu_k = [\lambda_k^{-2}\mu]^+, \tag{23}$$

где $[\cdot]^+$ — знак округления до большего целого числа.

3. Решающая функция и ее оперативная характеристика

Для экспериментальной оценки альтернативных гипотез (19) используем решающую функцию следующей структуры

$$r(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } u \leqslant u_0 \text{ — принимается гипотеза } H_0, \\ 1, \text{ если } u > u_0 \text{ — принимается гипотеза } H_1, \end{cases} \tag{24}$$

где $u_0 = \text{const}$ — параметр решающей функции. План измерения задачи, использующий эту решающую функцию, имеет вид $(\bar{x}, \bar{\mu}, u_0)$.

Определимся с аргументом решающей функции (24). Требования, предъявляемые к этому аргументу, сводятся к следующему: он должен быть возможным значением некоторой случайной величины с известным законом распределения, причем, параметр этого закона должен зависеть от составляющих $\hat{\varepsilon}_{xk}$, $k = \overline{1,m}$, а возможное значение определяться экспериментально.

Рассмотрим случайные величины

$$T_k = \frac{Z(x_k) - x_{0k}}{\sigma_{zk}} = \frac{x_k + m_e(x_k) + \mathring{Z}_k - x_{0k}}{\sigma_{zk}} = \\ = \frac{\Delta x_k + m_e(x_k)}{\sigma_{ek}} \sqrt{b_k(\mu_k)} + \frac{\mathring{Z}_k}{\sigma_{zk}} = m_{tk} + \mathring{T}_k, \quad k = \overline{1,m},$$

где $\mathring{T}_k = \frac{\mathring{Z}_k}{\sigma_{zk}}$, $k = \overline{1,m}$ — взаимно некоррелированные случайные величины с дисперсиями $D_{tk} = 1$, $k = \overline{1,m}$.

$$m_{tk} = \frac{\Delta x_k + m_e(x_k)}{\sigma_{ek}} \sqrt{b_k(\mu_k)} \Big|_{\sqrt{b_k(\mu_k)} = \lambda_k^{-1}\sqrt{b(\mu)}} = \\ = (\varepsilon_{xk} + \varepsilon_{ek})\lambda_k^{-1}\sqrt{b(\mu)} = (\hat{\varepsilon}_{xk} + \hat{\varepsilon}_{ek})\sqrt{b(\mu)},$$

$\hat{\varepsilon}_{ek} = \varepsilon_{ek}\lambda_k^{-1}$, $\varepsilon_{ek} = \frac{m_e(x_k)}{\sigma_{ek}}$ — приведенная систематическая погрешность.

На случайных составляющих T_k, $k = \overline{1,m}$ образуем случайный вектор

$$\bar{T} = (T_1, \ldots, T_m)^{\mathrm{T}} = \bar{m}_t + \mathring{\bar{T}},$$

где $\bar{m}_t = (m_{t1}, \ldots, m_{tm})^{\mathrm{T}}$ — вектор математического ожидания, $\mathring{\bar{T}} = (\mathring{T}_1, \ldots, \mathring{T}_m)^{\mathrm{T}}$ — центрированный гауссовский случайный вектор с ковариационной матрицей $K_t = M\big[\mathring{\bar{T}}\mathring{\bar{T}}^{\mathrm{T}}\big] = I_m$ — единичная квадратная матрица размера $(m \times m)$.

На основе случайного вектора $\bar{T}$ сформируем квадратичную форму

$$Q_t = \bar{T}^{\mathrm{T}} K_t^{-1} \bar{T} = \bar{T}^{\mathrm{T}} \bar{T} = Q_t(m, \delta_t),$$

которая является случайной величиной, имеющей нецентральное χ^2-распределение с m степенями свободы и параметр нецентральности, равный

$$\delta_t = \sqrt{\bar{m}_t^{\mathrm{T}} \bar{m}_t} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} m_{tk}^2} = \sqrt{b(\mu)} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\hat{\varepsilon}_{xk} + \hat{\varepsilon}_{ek})^2} = \sqrt{b(\mu)}\,\varepsilon_t,$$

где

$$\varepsilon_t = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\hat{\varepsilon}_{xk} + \hat{\varepsilon}_{ek})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \hat{\varepsilon}_{xk}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \hat{\varepsilon}_{ek}^2} = \varepsilon_x + \varepsilon_e,$$

$$\varepsilon_x = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \hat{\varepsilon}_{xk}^2}, \quad \varepsilon_e = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \hat{\varepsilon}_{ek}^2}. \tag{25}$$

Рассмотрим условие $|m_e(x_k)| \leqslant \frac{1}{2} T^* m_{ek}$, относительно приведенной систематической погрешности, а именно

$$|\varepsilon_{ek}| \leqslant \frac{1}{2} T\varepsilon_{mk} \frac{T\varepsilon_x}{T\varepsilon_x} = \frac{1}{2} \hat{\gamma}_k T\varepsilon_x, \text{ где } \hat{\gamma}_k = \frac{T\varepsilon_{mk}}{T\varepsilon_x}, \ T\varepsilon_{mk} = \frac{T^* m_{ek}}{\sigma_{ek}}, \ k = \overline{1, m}.$$

С учетом полученного отношения будем иметь

$$\varepsilon_e \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \hat{\gamma}_k^2 \lambda_k^{-2}} \frac{1}{2} T\varepsilon_x. \tag{26}$$

Поскольку

$$\hat{\gamma}_k^2 \lambda_k^{-2} = \left(\frac{T\varepsilon_{mk}}{T\varepsilon_x} \frac{T\varepsilon_x}{T\varepsilon_{xk}} \right)^2 = \left(\frac{T\varepsilon_{mk}}{T\varepsilon_{xk}} \right)^2 = \left(\frac{T^* m_{ek}}{T x_k} \right) = \gamma_k^2, \quad k = \overline{1, m},$$

то отношение (26) можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_e \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^2 \frac{1}{2} T\varepsilon_x} = \frac{1}{2}\gamma T\varepsilon_x,$$

где $\gamma = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k^2}$ — модуль вектора $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)^{\mathrm{T}}$.

Величина $\gamma_k = \frac{T^* m_{ek}}{Tx_k} < 1$, $k = \overline{1,m}$ — определяет, какую долю от допуска Tx_k составляет допуск поля допуска для систематической погрешности и определяется выражением (11). Скалярная величина γ представляет, таким образом, характеристику систематических погрешностей.

Теперь будем иметь уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{\varepsilon}_{ek}^2 = \left(\frac{\rho(m)}{2}\gamma T\varepsilon_x\right)^2 = (\gamma\varepsilon_x^*)^2, \quad \varepsilon_x^* = \frac{\rho(m)}{2} T\varepsilon_x,$$

которое является уравнением гиперсферы радиуса $\gamma\varepsilon_x^*$. Из выражения (25) следует, что центр гиперсферы находится на конце вектора $\bar{\hat{\varepsilon}}$. При $1 < \rho(m) < \sqrt{m}$, гиперсфера радиуса $\gamma\varepsilon_x^*$ находится между гиперсферами, одна из которых вписана в гиперкуб с длиной ребра $\gamma T\varepsilon_x$, а другая проходит через вершины этого гиперкуба.

Таким образом, альтернативные гипотезы по систематическим погрешностям представляются в следующем виде

$$H_0: \ \varepsilon_e \leqslant \gamma\varepsilon_x^*,$$
$$H_1: \ \varepsilon_e > \gamma\varepsilon_x^*$$

Из выражения (25) следует, что параметр нецентральности $\delta_t = \sqrt{b(\mu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_e)$ зависит от ε_x, на основе которой сформированы альтернативные гипотезы (19). Поэтому в качестве аргумента решающей функции (23) следует взять возможные значения случайной величины $Q_t(m, \delta_t)$. Тогда получим

$$s(q_t) = \begin{cases} 0, \ q_t \leqslant u_0, \\ 1, \ q_t > u_0. \end{cases} \tag{27}$$

Обозначим плотность распределения случайной величины $Q_t(m, \delta_t)$ через $f(q_t; m, \delta_t)$. Рассмотрим случайную величину $s(Q_t) = S$, которая имеет множество возможных значений $\{0, 1\}$ и закон распределения: $P(S = 0)$; $P(S = 1) = 1 - P(S = 0)$.

Найдем выражения для вероятности случайного события $(S = 0)$

$$P(S=0) = P(Q_t \leqslant u_0) = \int\limits_0^{u_0} f(q_t; m, \delta_t)\Big|_{\delta_t = \sqrt{b(\mu)}\varepsilon_t} dq_t =$$
$$= F(q_t; m, \sqrt{b(\mu)}\varepsilon_t)\Big|_{q_t = u_0} = L\Big(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_t \Big/ \bar{x}, \mu, u_0\Big), \quad (28)$$

где $(\bar{x}, \mu, u_0)$ — план измерения.

Как функция аргумента ε_t функция $L\big(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_t / \bar{x}, \mu, u_0\big)$ называется оперативной характеристикой решающей функции (28). Ее значения определяют вероятность принять гипотезу H_0.

Задачу формирования оптимального плана измерения сначала рассмотрим при допущении $\gamma = 0$ (систематические погрешности отсутствуют). Тогда будем иметь $\varepsilon_t = \varepsilon_x$ и, следовательно

$$L\Big(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x \Big/ \bar{x}, \mu, u_0\Big) = F(q_x; m, \sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x)\Big|_{q_x = u_0}, \quad (29)$$

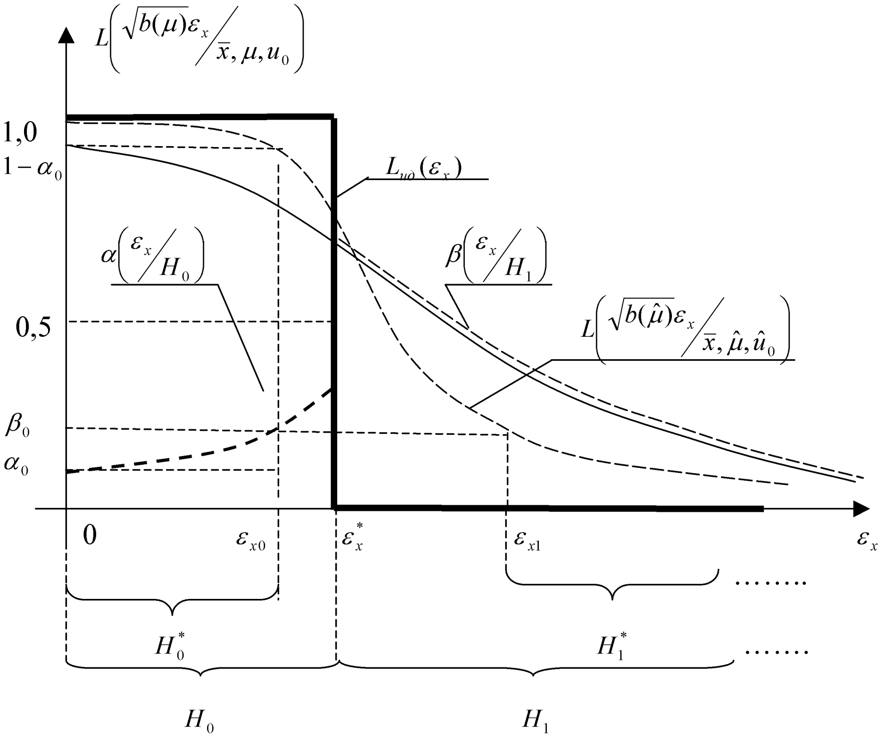
где q_x — возможное значение случайной величины

$$Q_x = Q_t(m; \delta_t)\Big|_{\varepsilon_t = \varepsilon_x} = Q_x(m; \delta_x), \quad \delta_x = \sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x.$$

Первые две числовые характеристики случайной величины Q_x имеют следующие выражения (см. работу [3]).

$$M[Q_x] = m + \delta_x^2 \text{ — математическое ожидание,}$$
$$M[\mathring{Q}_x^2] = 2m + 4\delta_x^2 \text{ — дисперсия.}$$

При заданном плане измерения $(\bar{x}, \mu, u_0)$ с возрастанием аргумента ε_x интеграл (29), а, следовательно, и оперативная характеристика убывают. График оперативной характеристики как функция аргумента ε_x показан на рисунке сплошной кривой.



По определению, вероятность случайного события $(S = 1)$, противоположного событию $(S = 0)$, равна

$$P(S{=}1){=}1-P(S{=}0){=}1-L\left(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon \Big/_{\bar{x}, \mu, u_0}\right){=}G\left(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x \Big/_{\bar{x}, \mu, u_0}\right),$$

где $G\left(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x /_{\bar{x}, \mu, u_0}\right)$ — функция мощности решающей функции. Ее значения определяют вероятность принять гипотезу H_1. Следовательно, на интервале $[0,\ \varepsilon_x^*]$, соответствующем гипотезе H_0, значения функции мощности определяют вероятность ошибки 1-го рода, а на интервале $(\varepsilon_x^*, \infty)$, соответствующем гипотезе H_1, значения оперативной характеристики определяют вероятность ошибки 2-го рода. Итак, имеем

$$\alpha\left(\varepsilon_x \Big/_{H_0}\right){=}1{-}L\left(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x \Big/_{\bar{x}, \mu, u_0}\right) \text{ — вероятность ошибки 1-го рода,}$$

$$\beta\left(\varepsilon_x \Big/ _{H_1}\right) = L\left(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x \Big/ _{\bar{x},\, \mu,\, u_0}\right) \text{ — вероятность ошибки 2-го рода.} \tag{30}$$

На рисунке графики вероятностей этих ошибок показаны пунктирными линиями.

Очевидно, что в точке $\varepsilon_x = \varepsilon_x^*$, являющейся граничной между гипотезами H_0 и H_1, сумма вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода равна

$$\alpha\left(\varepsilon_x^* \Big/ _{H_0}\right) + \beta\left(\varepsilon_x^* \Big/ _{H_1}\right) = \\ = 1 - L\left(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x^* \Big/ _{\bar{x},\, \mu,\, u_0}\right) + L\left(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x^* \Big/ _{\bar{x},\, \mu,\, u_0}\right) = 1.$$

Это означает, что в точке $\varepsilon_x = \varepsilon_x^*$ и в ее малой окрестности невозможно сделать малыми одновременно вероятности ошибок 1-го и 2-го рода.

Выделим из гипотезы H_0 наиболее предпочтительную ее часть

$$H_0^* : \ \varepsilon_x \leqslant \varepsilon_{x0} = \varepsilon_x^*(1 - \xi_0) \quad 0 \leqslant \xi_0 \leqslant 1,$$

и назовем ее наиболее предпочтительной гипотезой, а из гипотезы H_1 — наименее предпочтительную ее часть

$$H_1^* : \ \varepsilon_x \geqslant \varepsilon_{x1} = \varepsilon_x^*(1 + \xi_1) \quad \xi_1 > 0,$$

и назовем ее наименее предпочтительной гипотезой.

Относительно этих гипотез введем следующие ограничения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\varepsilon_x \Big/ _{H_0^*}\right) \leqslant \alpha_0 << 1, \\ \beta\left(\varepsilon_x \Big/ _{H_1^*}\right) \leqslant \beta_0 << 1. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

План измерения $(\bar{x}, \mu, u_0)$, обеспечивающий выполнение ограничений (32), называется допустимым планом. Допустимый план измерения, обеспечивающий выполнение этих ограничений при минимальном объеме измерений μ, называется оптимальным планом. В плане измерения $(\bar{x}, \mu, u_0)$ вектор плана измерения $\bar{x}$ представляется экземпляром продукции, качество которого оценивается. Поэтому параметрами плана измерения, которые следует определить, являются: μ — объем многократных измерений и u_0 — параметр решающей функции.

Рассмотрим уравнения, на основе которых можно определить значения указанных параметров плана измерения, обеспечивающие выполнение ограничений (32) при минимальном объеме измерений.

Используя уравнения (31), ограничения (32) заменим эквивалентными ограничениями относительно оперативной характеристики

$$\left.\begin{aligned} L\Big(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x \Big/ \bar{x}, \mu, u_0\Big)\Big|_{\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_{x0}} &\geqslant 1 - \alpha_0, \\ L\Big(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x \Big/ \bar{x}, \mu, u_0\Big)\Big|_{\varepsilon_x \geqslant \varepsilon_{x1}} &\leqslant \beta_0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Две пары чисел (ξ_0, α_0) и (ξ_1, β_0) на плоскости $LO\varepsilon_x$ определяют две точки, в которых оперативная характеристика должна удовлетворять следующим требованиям:
в точке $(\varepsilon_{x0}, 1 - \alpha_0)$

$$L\Big(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_{x_0} \Big/ \bar{x}, \mu, u_0\Big) \geqslant 1 - \alpha_0,$$

в точке $(\varepsilon_{x1}, \beta_0)$

$$L\Big(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_{x_1} \Big/ \bar{x}, \mu, u_0\Big) \leqslant \beta_0.$$

На рисунке жирными линиями показана идеальная оперативная характеристика $L_{\text{ид}}(\varepsilon_x)$, которая обеспечивает нулевые вероятности ошибок 1-го и 2-го рода. Следовательно, парами чисел (ξ_0, α_0) и (ξ_1, β_0) можно задавать желательную степень приближения оперативной характеристики к идеальной и реализовать ее выбором соответствующих значений параметров μ и u_0. Относительно параметра μ можно утверждать, что чем выше степень приближения оперативной характеристики к идеальной, тем больше значение этого параметра, то есть тем больший объем многократных измерений потребуется для ее реализации.

Тогда с учетом уравнения (30) получим

$$\begin{aligned} &F(u_0; m, \sqrt{b(\mu)}\varepsilon_{x0}) = 1 - \alpha_0, \\ &F(u_0; m, \sqrt{b(\mu)}\varepsilon_{x1}) = \beta_0, \end{aligned} \tag{33}$$

где $F(q_x; m, \sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x)$ — функция нецентрального χ^2-распределения с m степенями свободы и параметром нецентральности $\delta_x = \sqrt{b(\mu)}\varepsilon_x$. Табулированных значений этой функции распределения нет. В работе [1] приведен приближенный метод решения уравнений (34), основанный на замене случайной величины $Q_x(m, \delta_x)$ случайной величиной $aQ_x(\nu', 0)$, где a — const, $Q_x(\nu', 0)$ — случайная величина, имеющая центральное χ^2-распределение с ν' степенями свободы. Эквивалентность случайных величин $Q_x(m, \delta_x)$ и $aQ_x(\nu', 0)$ трактуется в смысле равенства их математических ожиданий и дисперсий. Возможность такой замены показана в работе [3].

Решения уравнений (32) определяют оптимальный план измерения $(x, \hat{\mu}, \hat{u}_0)$, где $\hat{\mu} = \hat{\mu}_{\hat{k}}$. Объемы многократных измерений других величин определяются на основе уравнений (22)

$$b_k(\mu_k) = \lambda_k^{-2} b(\hat{\mu}) = d_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad k \neq \hat{k}. \tag{34}$$

Функция целочисленного аргумента $b_k(\mu_k)$ является возрастающей функцией. Поэтому каждое из уравнений (35) имеет единственное решение

$$\hat{\mu}_k = \min\{\mu : \ b_k(\mu) \geqslant d_k, \ \ \mu = \mu, \mu + 1 \ldots\}.$$

Таким образом, оптимальный план измерения имеет следующую структуру $(x, \hat{\bar{\mu}}, \hat{u}_0)$, где $\hat{\bar{\mu}} = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_m)$.

4. Планирование измерений с учетом систематических погрешностей ($\gamma \neq 0$)

При условии $\gamma \neq 0$ оперативная характеристика зависит от аргумента

$$\varepsilon_t = \varepsilon_x + \varepsilon_e,$$

где $\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_x^*$, $\varepsilon_e \leqslant \gamma\varepsilon_x^*$, $\gamma = \sqrt{\sum_{k=1}^m \gamma_k^2}$, $\gamma_k = \frac{T^* m_{ek}}{T x_k}$, $k = \overline{1,m}$.

Формирование оптимального плана измерения для этого случая основано на лемме, доказанной в работе [1]. Она при $\gamma \neq 0$ формулируется следующим образом

Лемма 1. *Пусть функция*

$$\alpha\left(\varepsilon_t \Big/ H_0^*(\gamma)\right) = 1 - L\left(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_t \Big/ \bar{x}, \mu, u_0\right)\Bigg|_{H_0^*(\gamma):\ \varepsilon_t \leqslant \varepsilon_{t0}(\gamma)}$$

на интервале $[\varepsilon_{t0}(\gamma)]$ *является возрастающей по аргументу* ε_t *и выпукла вниз, а функция*

$$\beta\left(\varepsilon_t \Big/ H_1^*(\gamma)\right) = L\left(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_t \Big/ \bar{x}, \mu, u_0\right)\Bigg|_{H_1^*(\gamma):\ \varepsilon_t \geqslant \varepsilon_{t1}(\gamma)}$$

на интервале $[\varepsilon_{t1}(\gamma),\, \infty]$ *является убывающей по этому аргументу и также выпукла вниз, где*

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{t0}(\gamma) &= \varepsilon_x^*(1 - \xi_0 + \gamma), \\ \varepsilon_{t1}(\gamma) &= \varepsilon_x^*(1 + \xi_1 - \gamma), \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\Delta\varepsilon_t(\gamma) = \varepsilon_{t1}(\gamma) - \varepsilon_{t0}(\gamma) > 0, \tag{36}$$

$$H_0^*(\gamma):\ \varepsilon_t \leqslant \varepsilon_{t0}(\gamma),$$
$$H_1^*(\gamma):\ \varepsilon_t \geqslant \varepsilon_{t1}(\gamma).$$

Тогда оптимальный план измерения для условий

$$\alpha\left(\varepsilon_t \Big/ H_0^*(\gamma)\right) \leqslant \alpha_0,$$
$$\beta\left(\varepsilon_t \Big/ H_1^*(\gamma)\right) \leqslant \beta_0,$$

гарантирует выполнение отношений для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода

$$\alpha\left(\varepsilon_x \Big/ H_0^*\right) \leqslant \alpha_0,$$
$$\beta\left(\varepsilon_x \Big/ H_1^*\right) \leqslant \beta_0.$$

Согласно этой лемме оптимальные параметры плана $\hat{\mu}$, $\hat{u}_0$, определяемые на основе уравнений

$$L\Big(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_{t0}(\gamma)\Big/_{\bar{x},\,\mu,\,u_0}\Big) = 1-\alpha_0,$$
$$L\Big(\sqrt{b(\mu)}\varepsilon_{t1}(\gamma)\Big/_{\bar{x},\,\mu,\,u_0}\Big) = \beta_0,$$

обеспечивают и выполнение заданных ограничений для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода относительно наиболее и наименее предпочтительных гипотез: $H_0^*:\ \varepsilon_x \leqslant \varepsilon_{x0}$ и $H_1^*:\ \varepsilon_x \geqslant \varepsilon_{x1}$.

Обратимся к отношению (37). Оно отражает тот факт, что оперативная характеристика аргумента ε_t является взаимно однозначной. Поэтому отношение (37) налагает определенное ограничение на значение параметра γ. Определим это ограничение.

Используя выражения (36), получим

$$\Delta\varepsilon_t(\gamma) = \varepsilon_x^*(\xi_0+\xi_1-2\gamma) > 0.$$

Поскольку $\varepsilon_x^* > 0$, то будем иметь

$$\xi_0+\xi_1-2\gamma > 0$$

или

$$\gamma < \frac{1}{2}(\xi_0+\xi_1). \tag{37}$$

Пример 1. Определим параметры оптимального плана измерения $(\bar{x}, \bar{\mu}, u_0)$ для частного случая $m=2$. Пусть величины, определяющие условия единства измерений, имеют следующие значения: $\eta_{ek} = 0{,}25$, $\lambda = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\eta_{e1} = 0{,}6$, $\eta_{e2} = 0{,}9$.

На основе этих данных, используя выражения (10), (13), (15), (27), получим: $K_e = 0{,}063$, $\gamma_1 = 0{,}16$, $\gamma_2 = 0{,}11$, $T\varepsilon_{x1} = 26{,}45$, $T\varepsilon_{x2} = 17{,}60$, $T\varepsilon_x = T\varepsilon_{x1} = 26{,}45$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0{,}67$, $\gamma = 0{,}20$.

Выберем значение ε_x^* в середине между радиусами вписанной в квадрат со сторонами $T\varepsilon_x$ и проходящей через его вершины окружностями, то есть

$$\varepsilon_x^* = \frac{1}{4}\big(1+\sqrt{2}\big)T\varepsilon_x = 15{,}94.$$

Выберем значения для коэффициентов ξ_0 и ξ_1 равными

$$\xi_0 = \xi_1 = 0{,}24.$$

Теперь на основе выражения (36) для гипотез $H_0^*(\gamma)$ и $H_1^*(\gamma)$ определим значения граничных точек и расстояние между ними

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t0}(\gamma) &= \varepsilon_x^*(1-\xi_0+\gamma) = 15{,}94\cdot 0{,}96 = 15{,}30,\\ \varepsilon_{t1}(\gamma) &= \varepsilon_x^*(1+\xi_0-\gamma) = 15{,}94\cdot 1{,}04 = 16{,}58,\\ \Delta\varepsilon_t(\gamma) &= \varepsilon_{t1}(\gamma) - \varepsilon_{t0}(\gamma) = 1{,}28. \end{aligned} \tag{38}$$

Важная особенность оперативной характеристики (29) представляется величиной

$$\eta = \frac{1-(\alpha_0+\beta_0)}{\Delta\varepsilon_t(\gamma)} = \frac{0{,}8}{1{,}28} = 0{,}63. \tag{39}$$

Она определяет крутизну убывания оперативной характеристики на интервале $[\varepsilon_{t0}(\gamma),\, \varepsilon_{t1}(\gamma)]$.

В работе [1] показано, что оптимальные значения параметров μ и u_0 определяются уравнениями

$$\lambda(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma),\varepsilon_{t1}(\gamma),\alpha_0,\beta_0) = 1, \tag{40}$$

$$u_0 = a(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma))q_{t,\nu'(\mu,\varepsilon_{t0}(\gamma)),1-\alpha_0}, \tag{41}$$

где

$$a(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma)) = \frac{2+2\mu\varepsilon_{t0}^2(\gamma)}{2+\mu\varepsilon_{t0}^2(\gamma)}, \quad \nu' = \frac{2+\mu\varepsilon_{t0}^2(\gamma)}{a(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma))} = \nu'(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma)),$$

$$\lambda(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma),\varepsilon_{t1}(\gamma),\alpha_0,\beta_0) = \frac{a(\mu;\varepsilon_{t1}(\gamma))}{a(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma))}\cdot\frac{q_{t,\nu'(\mu;\varepsilon_{t1}(\gamma)),\beta_0}}{q_{t,\nu'(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma)),1-\alpha_0}},$$

$q_{t,\nu'(\mu,\varepsilon_{t0}(\gamma)),1-\alpha_0}$, $q_{t,\nu'(\mu,\varepsilon_{t1}(\gamma)),\beta_0}$ — квантили функции χ^2-распределения с $\nu'(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma))$ и $\nu'(\mu;\varepsilon_{t1}(\gamma))$ степенями свободы, соответствующие значениям вероятностей $1-\alpha_0$ и β_0.

Функция $\lambda(\mu;\varepsilon_{t0}(\gamma),\varepsilon_{t1}(\gamma),\alpha_0,\beta_0)$ по целочисленному аргументу μ является монотонно возрастающей от значений, меньших единицы при малых значениях аргумента μ, до значений, больших единицы при больших значениях этого аргумента. Поэтому уравнение (41) имеет единственное решение, определяемое следующим алгоритмом

$$\mu = \min\{\mu :\ \lambda(\mu; \varepsilon_{t0}(\gamma), \varepsilon_{t1}(\gamma), \alpha_0, \beta_0) \geqslant 1,\ \ \mu = 1, 2\}.$$

Программный пакет, созданный для решения уравнения (41), при исходных данных: $m = 2$, $\varepsilon_{t0}(\gamma) = 15{,}30$, $\varepsilon_{t1}(\gamma) = 16{,}58$, $\alpha_0, \beta_0 = 0{,}1$ определил следующие значения параметров плана

$$\mu = \mu_1 = 4; \quad u_0 = 1{,}016 \cdot 10^3.$$

Значение $\mu_2 = 9$ найдено на основе выражения (23). Общий объем многократных измерений равен $\mu_1 + \mu_2 = 13$.

Пример 2. Рассмотрим задачу формирования оптимальных планов (x_k, μ_k, t_{0k}), $k = 1, 2$ при тех же значениях величин: η_{ex}, λ, ε, η_{ek}, $k = 1, 2$, α_0, β_0, что и в предыдущем примере.

Используем выражения для оптимальных значений параметров μ_k, t_{0k}, $k = 1, 2$, приведенные в работе [1].

$$\mu_k = [\lambda_0^2(\gamma)]^+, \quad t_{0k} = \lambda_{01}(\gamma_k), \quad k = 1, 2, \tag{42}$$

где

$$\lambda_0(\gamma_k) = \frac{t_{0,5-\alpha_{00}} + t_{0,5-\beta_{00}}}{\Delta\varepsilon_t(\gamma_k)}, \tag{43}$$

$$\lambda_{01}(\gamma_k) = \frac{(1 - \xi_{0k} + \gamma_k) t_{0,5-\alpha_{00}} + (1 + \xi_{1k} - \gamma_k) t_{0,5-\beta_{00}}}{\xi_{0k} + \xi_{1k} - 2(\gamma_k)}, \tag{44}$$

$$\Delta\varepsilon_t(\gamma_k) = \varepsilon^*_{xk}(\xi_{0r} + \xi_{1k} - 2\gamma_k), \quad k = 1, 2. \tag{45}$$

Обозначим крутизну оперативной характеристики, соответствующей плану (x_k, μ_k, t_{0k}), $k = 1, 2$

$$\eta_k = \frac{1 - (\alpha_{00} + \beta_{00})}{\Delta\varepsilon_t(\gamma_k)}, \quad k = 1, 2. \tag{46}$$

Теперь введем следующие условия

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \eta_k = \eta = 0{,}63, \\ &2.\ \xi_{0k} = \xi_{1k}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Ограничения на вероятности ошибок 1-го и 2-го рода определим на основе уравнений (3) и (4) при следующих допущениях: $\alpha_{0k} = \alpha_{00}$, $k = 1, 2$, $\beta_{0k} = \beta_{00}$, $k = 1, 2$. Тогда значения величин α_{00}, β_{00} будут решениями следующих уравнений:

$$\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha_{00})^2,$$
$$\beta_0 = 1 - [2\alpha_{00}(1 - \beta_{00}) + (1 - \beta_{00})^2].$$

При $\alpha_0, \beta_0 = 0{,}1$ получим $\alpha_{00} = 0{,}05$, $\beta_{00} = 0{,}1$.

Выражения для граничных точек ε_{ek}^* по определению имеют следующий вид

$$\varepsilon_{ek}^* = \frac{1}{2}\frac{Tx_k}{\sigma_{ek}}\bigg|_{\sigma_{ek}=\eta_{ek}K_eTx_k} = \frac{1}{2\eta_{ek}K_e}, \quad k = 1, 2.$$

В примере 1 использовались значения

$$\eta_{ek} = \begin{cases} 0{,}6, & k = 1, \\ 0{,}9, & k = 2, \end{cases}$$
$$K_e = 0{,}063.$$

В итоге получим

$$\varepsilon_{xk}^* = \begin{cases} 13{,}20, & k = 1, \\ 8{,}82, & k = 2. \end{cases}$$
$$K_e = 0{,}063.$$

Теперь на основе уравнений (47) и условий (18) определятся следующие значения величин

$$\Delta\varepsilon_t(\gamma_k) = \begin{cases} 1{,}32, & k = 1, \\ 1{,}41, & k = 2, \end{cases}$$

$$\lambda_0(\gamma_k) = \begin{cases} 2{,}22, & k = 1, \\ 2{,}08, & k = 2. \end{cases}$$

В итоге получим

$$\lambda_{01}(\gamma_k) = \begin{cases} 29{,}5, & k = 1, \\ 18{,}5, & k = 2, \end{cases}$$

$$\hat{\mu}_k = 5, \quad k = 1, 2,$$

$$t_{0k} = \begin{cases} 29{,}5, & k = 1, \\ 18{,}5, & k = 2. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальные планы имеют следующий вид:
– для величины x_1 — $(x_1, \mu_1, t_{01}) = (x_1; 5; 29{,}5)$;
– для величины x_2 — $(x_2, \mu_2, t_{02}) = (x_2; 5; 18{,}5)$.

Общий объем измерений равен $\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 = 10$, что меньше объема, полученного в примере 1. Однако, если использовать условие относительной равноточности и определить объем μ_2 по выражению (23), то будем иметь

$$\hat{\mu}_2 = \left[\lambda_2^{-2}\hat{\mu}_1\right]^+ = \left[2{,}22 \cdot 5\right]^+ = 12.$$

Тогда общий объем измерений будет равен $\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 = 17$, что больше объема, полученного в примере 1.

Список литературы

[1] Назаров Н. Г. Измерения: планирование и обработка результатов. — М.: ИПК Изд-во стандартов, 2000. — С. 306.

[2] Назаров Н. Г. Планирование измерений при экспериментальной оценке их единства // Измерительная техника. № 2. 2000.

[3] Шеффе Г. Дисперсионный анализ / Пер. с англ. — М.: Физматиз, 1963.