Обходимость коллективом автоматов двуслойных лабиринтов с ограниченным числом перемычек*

Е.Г. Сыркина

В работе выделяется класс трехмерных конечных мозаичных лабиринтов, для котрого существует универсальный коллектив автоматов. А именно, конструктивно строится коллектив автоматов, обходящий произвольный конечный двуслойный мозаичный лабиринт с ограниченным числом перемычек между слоями, у которого плоские компоненты связности являются шахматными.

Введение

Задача обхода лабиринтов автоматами восходит к К. Шеннону [1]. Л. Будахом и А.С. Подколзиным установлено, что один автомат не может обойти семейство всех плоских лабиринтов [2, 4]. В то же время, М. Блюм и Д. Козен установили, что коллектив автоматов уже в состоянии решить эту задачу. Однако, в случае трехмерных лабиринтов задача обхода не может быть решена даже коллективом автоматов. Строится лабиринт-ловушка в классе бесконечных двуслойных мозаичных лабиринтов такая, что любой коллектив, оказавшись в этом лабиринте, зацикливается в ограниченной его части [6].

Ниже будет конструктивно показано, что существует коллектив автоматов, который обходит любой заданный конечный двуслойный

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 02–01–00162.

мозаичный лабиринт с ограниченным числом перемычек между слоями, у которого каждый максимальный по включению связный подлабиринт, находящийся в одном слое, является шахматным, и останавливается после обхода. Такой коллектив состоит из одной пешки и камней, число которых равно числу, ограничивающему количество перемычек между слоями, плюс шесть. Будет также рассмотрен аналогичный класс многослойных лабиринтов с ограниченным числом слоев и ограниченным числом перемычек между слоями.

Автор выражает благодарность В.Б. Кудрявцеву за постановку задачи и внимание к работе.

1. Основные понятия и результаты

Элементы целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3$ будем называть *полями*. Обозначим

$$\vec{0} = (0,0,0),\ e = (1,0,0),\ s = (0,-1,0),\ w = (-1,0,0),\ n = (0,1,0),$$
$$u = (0,0,1),\ d = (0,0,-1),$$
$$\theta = \{a \in \mathbb{Z}^3 \mid \|a\| \leqslant 1\} = \{\vec{0}, e, s, w, n, u, d\},\quad \theta' = \{a \in \mathbb{Z}^3 \mid \|a\| < 2\} =$$
$$= \{\vec{0},\, e,\, s,\, w,\, n,\, e+s,\, e+n,\, w+s,\, w+n,\, u+e,\, u+s,\, u+w,\, u+n,$$
$$d+e,\, d+s,\, d+w,\, d+n\}.$$

Для произвольного множества $M \subseteq \mathbb{Z}^3$, содержащего нулевой элемент $\vec{0}$, через $\mathcal{P}_0(M)$ обозначим множество всех его подмножеств, содержащих нулевой элемент.

Поля a и b из $\mathbb{Z}^3$ называются *соседними* (*слабо соседними*), если $\|a-b\| = 1$ $(0 < \|a-b\| < 2)$.

Говорят, что поля $a = p_0, p_1, \ldots, p_m = b$ при $m \geqslant 1$ образуют *цепь* (*слабую цепь*), связывающую a и b, если p_{i-1} и p_i соседние (слабо соседние) для $\forall i = 1, \ldots, m$. Множество $V \subseteq \mathbb{Z}^3$ называется *связным* (*слабо связным*), если для $\forall a, b \in V$ существует связывающая их цепь (слабая цепь) или $a = b$.

Граф (неориентированный) $G = (P_G, X_G)$, в котором P_G — множество всех его вершин, X_G — множество всех его ребер, будем называть *плоским шахматным лабиринтом*, если $P_G \subseteq \mathbb{Z}^2$ является конечным связным множеством и любые две его вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они соседние.

Дырой плоского шахматного лабиринта G называется произвольная компонента слабой связности множества $\mathbb{Z}^2 \setminus P_G$. Ограниченные дыры будем называть внутренними, а неограниченную дыру — внешней (в конечном лабиринте она одна). *Граница дыры* V плоского шахматного лабиринта — это множество полей из P_G, слабо соседних хотя бы с одним полем из V. Обозначение: $\partial_G V = \partial V$.

Граф (неориентированный) $G = (P_G, X_G)$, в котором P_G — множество всех его вершин, X_G — множество всех его ребер, будем называть *трехмерным мозаичным лабиринтом*, если $P_G \subseteq \mathbb{Z}^3$ является конечным связным множеством и из того, что две его вершины соединены ребром следует, что они соседние (из того, что вершины соседние не обязательно следует, что они соединены ребром).

k-слойным мозаичным лабиринтом $G = (P_G, X_G)$ будем называть мозаичный лабиринт, все вершины которого лежат в k горизонтальных плоскостях. *Слоем* будем называть каждую из этих плоскостей, *перемычками* — вертикальные ребра.

Далее рассматриваются только k-слойные лабиринты, у которых любой максимальный по включению связный подграф, лежащий в одном слое, является плоским шахматным лабиринтом и количество перемычек между любыми двумя соседними слоями не превосходит заданного числа l. Такие лабиринты назовем *(k, l)-лабиринтами.*

Пешкой будем называть любой инициальный конечный автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi_{\mathfrak{A}}, \psi_{\mathfrak{A}}, q_0)$ такой, что $A = \mathcal{P}_0(\theta)$ — входной алфавит, Q — множество состояний, $B = \theta$ — выходной алфавит, $\varphi_{\mathfrak{A}} : A \times Q \to Q$ — функция переходов состояния, $\psi_{\mathfrak{A}} : A{\times}Q \to B$ — функция выходов.

Предположим, пешка $\mathfrak{A}$ находится на поле z лабиринта G, то есть $z \in P_G$. Тогда в качестве входной буквы эта пешка $\mathfrak{A}$ получает множество всех векторов $\omega \in \theta$, переместившись на которые из поля z по ребру лабиринта, она снова окажется в лабиринте G, то есть $(z, z{+}\omega) \in X_G$. Таким образом, всякий раз, когда пешка находится на поле $z \in P_G$, она получает на вход множество $\{\omega \in \theta \mid (z, z{+}\omega) \in X_G\}$, обозначаемое далее $\theta_G(z)$. Выходной алфавит $B = \theta$ интерпретируется как множество всех векторов возможных перемещений из $\mathbb{Z}^3$. Иногда в качестве A берут $\mathcal{P}_0(\theta')$, расширяя тем самым обзор пешки до θ'.

Пешка называется *регулярной*, если для $\forall a \in A$ и $\forall q \in Q$ имеет место $\psi_{\mathfrak{A}}(a,q) \in a$. Регулярность пешки означает, что она, будучи помещенной на любое поле произвольного лабиринта, не выходит за его пределы и перемещается только по ребрам лабиринта. Далее будем рассматривать только регулярные пешки.

Поведением пешки $\mathfrak{A}$ *в лабиринте* G *с началом в* $p_0 \in P_G$ называется последовательность четверок $(z_t, a_t, q_t, b_t)_{t=0}^{\infty}$, определяемая индукцией по $t \geqslant 0$:

$$z_0 = p_0, \quad a_t = \theta_G(z_t), \quad q_{t+1} = \varphi_{\mathfrak{A}}(q_t, a_t),$$
$$b_t = \psi_{\mathfrak{A}}(q_t, a_t), \quad z_{t+1} = z_t + b_t.$$

Если множество полей $\bigcup\limits_{t=0}^{\infty}\{z_t\}$, где побывала пешка $\mathfrak{A}$, стартуя с поля p_0, совпадает с P_G, то говорят, что $\mathfrak{A}$ *обходит лабиринт* G *с началом в* p_0. Пешка *слабо обходит* лабиринт, если она обходит его хотя бы с одним началом, и *сильно обходит*, если она обходит его с любым началом из P_G. Возможность остановки пешки означает существование такого n, что $(z_n, q_n, a_n, b_n) = (z_{n+k}, q_{n+k}, a_{n+k}, b_{n+k})$ для $\forall k \in \mathbb{N}$. В этом случае q_n называем конечным состоянием.

В лабиринте можно также рассмотреть систему взаимодействующих пешек $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ (частный случай коллектива автоматов). Каждой пешке $\mathfrak{A}_i$ на вход, кроме множества всех векторов перемещений из θ, которые она может сделать по ребрам лабиритнта, не покидая его, подается еще и информация о наличии на полях, куда она может попасть, делая эти перемещения, других пешек системы $\mathcal{A}$ и их состояниях. Дадим точное определение. Пусть $I = \{1, \ldots, n\}$. Тогда *системой взаимодействующих пешек* будем называть любую систему пешек $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) = (\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ такую, что каждая i-тая пешка ($i \in I$) имеет вид $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i, q_0^i)$, где $B_i = \theta$ — выходной алфавит пешки $\mathfrak{A}_i$, A_i — входной алфавит пешки $\mathfrak{A}_i$, состоящий, по определению, из всех упорядоченных пар (Ω, F), удовлетворяющих следующим трем условиям:

1) $\vec{0} \in \Omega \subseteq \theta$,

2) $F \subseteq \{(j, \omega, q) \mid j \in I \setminus \{i\}, \omega \in \Omega, q \in Q_j\} = \bigcup\limits_{j \in I \setminus \{i\}} (\{j\} \times \Omega \times Q_j)$,

3) для $\forall j, \omega', q', \omega'', q''$ из того, что (j, ω', q') и $(j, \omega'', q'') \in F$ следует,

что $\omega' = \omega''$ и $q' = q''$.
Регулярность пешки $\mathfrak{A}_i$ *из системы* $\mathcal{A}$ определяется условием: для $\forall(\Omega, F) \in A_i$ и $\forall q \in Q_i$ имеет место $\psi_i((\Omega, F), q) \in \Omega$.

Поведением системы $\mathcal{A}$ *в лабиринте* G *с началом в* $p_0 \in P_G$ называется последовательность $((z_t^1, \ldots, z_t^n), (a_t^1, \ldots, a_t^n), (q_t^1, \ldots, q_t^n),$ $(b_t^1, \ldots, b_t^n))_{t=0}^{\infty}$, определяемая индукцией по $t \geqslant 0$. Для всех $i \in I$ полагаем:

$$z_0^i = p_0,$$
$$a_t^i = (\theta_G(z_t^i), \{(j, z_t^j - z_t^i, q_t^j) \mid j \in I \setminus \{i\}, z_t^j - z_t^i \in \theta_G(z_t^i)\}) =$$
$$= (\theta_G(z_t^i), \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} (\{j\} \times (\{z_t^j - z_t^i\} \cap \theta_G(z_t^i)) \times \{q_t^j\})),$$
$$q_{t+1}^i = \varphi_i(a_t^i, q_t^i), \quad b_t^i = \psi_i(a_t^i, q_t^i), \quad z_{t+1}^i = z_t^i + b_t^i.$$

Если $\bigcup\limits_{t=0}^{\infty}(\bigcup\limits_{i \in I}\{z_i^j\}) = P_G$, то говорят, что *система* $\mathcal{A}$ *обходит лабиринт* G *с началом в* p_0; если последнее имеет место для любого $p_0 \in P_G$, то система $\mathcal{A}$ *сильно обходит* G.

Пусть в J есть непустое подмножество множества номеров I, такое что $J \neq I$. Подсистему $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$ системы взаимодействующих пешек $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ будем называть *камнями в системе* $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$, если для любого номера j из J выполняются следующие условия:
1) $Q_j = \{q_0^j\}$, то есть $\mathfrak{A}_j$ имеет только одно состояние.
2) для $\forall(\Omega, F) \in A_j$ из условия $\psi_j((\Omega, F), q_0^j) \neq \vec{0}$ следует, что $\exists i \in I \setminus J$ и $\exists q \in Q_i$, такие что $(i, \vec{0}, q) \in F$ и $\psi_j((\Omega, F), q_0^j) = \psi_i((\Omega, (F \setminus \{(i, \vec{0}, q)\}) \cup \{(j, \vec{0}, q_0^j)\}), q)$. Это означает, что пешка $\mathfrak{A}_j$ может передвигаться (в ненулевом направлении), только если с ней на одном поле находится еще одна пешка $\mathfrak{A}_i$ (не из подсистемы $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$), причем $\mathfrak{A}_j$ может переместиться только на то же поле, что и $\mathfrak{A}_i$.
Для пешек, которые не являются камнями, камни играют роль ограниченной внешней памяти.

Теорема 1. *Существует коллектив, состоящий из 1 пешки и 6 камней (коллектив типа (1,6)), который сильно обходит (то есть обходит, стартуя с любого поля) произвольный плоский шахматный лабиринт и останавливается после обхода.*

Теорема 2. *Существует коллектив типа (1,6), который, стартуя с любого поля произвольного плоского шахматного лабиринта, распознает любое его выделенное поле и останавливается после обхода. При этом в момент остановки весь коллектив находится на выделенном поле.*

Теорема 3. *Сущестует коллектив, состоящий из 1 пешки и $l+6$ камней (коллектив типа (1,l+6)), который сильно обходит произвольный $(2,l)$-лабиринт и останавливается после обхода.*

2. Вспомогательные утверждения о плоских шахматных лабиринтах

Все приводимые в этом параграфе утверждения относятся к плоским шахматным лабиринтам.

Лемма 1 ([3]). *Существует пешка $\mathfrak{A}^+$ (соответственно, $\mathfrak{A}^-$) с 4 состояниями, которая, находясь на границе ∂V дыры V лабиринта G, последовательно обходит все поля ∂V в направлении против часовой стрелки (соответственно, по часовой стрелке), то есть поля лабиринта при обходе остаются справа (соответственно, слева).*

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $\mathfrak{A}^+$.

Пусть $Q = \{q_e, q_s, q_w, q_n\}$ и состояние у $\mathfrak{A}^+$ меняется так: если пешка сделала шаг в направлении ω, то она переходит в состояние q_ω.

Обозначим через π циклическую перестановку (e, s, w, n), через $-\omega$ — направление, противоположное ω. Пусть пешка находится в состоянии q_ω, d_0 — минимальное из всех натуральных d, таких что в направлении $\pi^d(-\omega)$ находится поле из P_G. Тогда пешка идет в направлении $\pi^{d_0}(-\omega)$ и переходит в состояние $q_{\pi^{d_0}(-\omega)}$. Осталось выбрать начальное состояние q_0.

Предположим в начальный момент времени пешка находится на поле $a \in \partial V$. Если в направлении $\omega \in \theta, \omega \neq \vec{0}$ находится поле из V $(a+\omega \in V)$, то за q_0 можно взять $q_{\pi(\omega)}$. Если среди полей соседних с a нет полей из V, но есть поле из V, слабо соседнее с a $(a+\omega+\pi(\omega) \in V)$, то обзора θ недостаточно для определения q_0 и его расширяют до

θ', что в нашем случае не достижимо, и тогда полагаем $q_0 = q_{-\omega}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Существует коллектив типа (1,6), такой что если он оказался на границе ∂V какой-либо дыры V лабиринта G и в направлении n оказалось поле из V, то этот коллектив распознает (то есть находит и останавливается) ближайшее сверху (не строго) поле на ∂V, находящееся на той же вертикали.*

Доказательство. Обозначим через p_0 поле на ∂V, на котором в начальный момент времени находится коллектив пешек $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_6)$, где $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_6$ — камни в коллективе; через $l_\omega(z, z')$ — число шагов, сделанных пешкой $\mathfrak{A}^+$ в направлении ω при однократном прохождении части границы ∂V от $z \in \partial V$ до $z' \in \partial V$. Фиксируем на поле p_0 камень $\mathfrak{B}_1$.

Нам надо найти поле z^* на ∂V, такое что $l_w(p_0, z^*) - l_e(p_0, z^*) = 0,\ 0 \leqslant l_n(p_0, z^*) - l_s(p_0, z^*) \leqslant l_n(p_0, z) - l_s(p_0, z)$ для $\forall z \in \partial V$.

Через z_i обозначим поле, на котором в каждый данный момент времени находится камень $\mathfrak{B}_i$. Положим z' в начальный момент времени равным p_0.

Шаг 1. С помощью 3 камней пешка может распознать ближайшее по ходу $\mathfrak{A}^+$ поле $z'' \in \partial V$ на одной вертикали с исходным полем $z' \in \partial V$ $(l_w(z', z'') - l_e(z', z'') = 0)$:

(1) Оставляем камни $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ на поле z';

(2) $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_4$ движутся как $\mathfrak{A}^+$ до первого шага в напралении e или w, делают этот шаг, $\mathfrak{A}$ запоминает направление (обозначим его ω), $\mathfrak{B}_4$ остается;

(3) $\mathfrak{A}$ идет как $\mathfrak{A}^-$ до $\mathfrak{B}_3$ и передвигает его на 1 шаг по ходу $\mathfrak{A}^-$, если $\omega = w$, и по ходу $\mathfrak{A}^+$, если $\omega = e$;

(4) $\mathfrak{A}$ движется как $\mathfrak{A}^+$ до первой встречи с $\mathfrak{B}_4$.

Затем повторяем (2), (3), (4) до тех пор, пока после действия (3) $\mathfrak{B}_3$ снова не окажется на одном поле с $\mathfrak{B}_2$. В этот момент $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ находятся на поле z', а $\mathfrak{B}_4$ на искомом поле z''. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Аналогично вычисляется разность $l_n(p_0, z'') - l_s(p_0, z'')$ при прохождении от поля с $\mathfrak{B}_1$ до поля с $\mathfrak{B}_4$ (используя $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$):

(1) Оставляем камень $\mathfrak{B}_2$ на поле p_0;

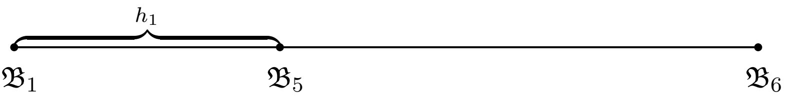
(2) $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_3$ движутся как $\mathfrak{A}^+$ до первого шага в напралении n или s, делают этот шаг ($\mathfrak{A}$ запоминает направление — ω), $\mathfrak{B}_3$ остается;
(3) $\mathfrak{A}$ идет как $\mathfrak{A}^-$ до $\mathfrak{B}_2$, далее $\mathfrak{B}_2$ передвигается на 1 шаг по ходу $\mathfrak{A}^-$, если $\omega = s$ и по ходу $\mathfrak{A}^+$, если $\omega = n$;
(4) $\mathfrak{A}$ движется как $\mathfrak{A}^+$ до $\mathfrak{B}_3$.

Затем повторяем (2), (3), (4) до тех пор, пока после действия (1) $\mathfrak{B}_3$ не окажется на одном поле с $\mathfrak{B}_4$.

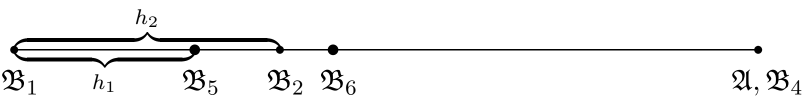
У $\mathfrak{A}$ можно ввести дополнительное состояние $q_{sgn}(z) = \mathrm{sgn}(l_n(p_0, z) - l_s(p_0, z))$ (меняется при переходе $\mathfrak{B}_2$ через $\mathfrak{B}_1$; в начальный момент времени $q_{sgn} = 0$; после первого шага $g_{sgn} = +1$, если $\omega = n$, и $q_{sgn} = -1$, если $\omega = s$). Тогда в зависимости от значения $q_{sgn}(z'')$ после шага 2 возможны 3 случая:

1) Если $q_{sgn}(z'') = -1$, то поле z'' ниже p_0 и $\mathfrak{A}$ забирает $\mathfrak{B}_2$ и идет на z''. После этого переходим к шагу 1 (в качестве z' берем z''). Таким образом находим следующее ближайшее против часовой стрелки поле на данной вертикали.

2) Если $q_{sgn}(z'') = +1$, то поле z'' выше поля p_0. Предположим, это первое поле по ходу $\mathfrak{A}^+$, которое выше p_0. В этом случае камни $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ заменяются, соответственно, на $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_6$, которые фиксируются.



После этого переходим к шагу 1 (в качестве z' берем z''). Если это не первое поле по ходу $\mathfrak{A}^+$, которое выше p_0, то камнями $\mathfrak{B}_6$ и $\mathfrak{B}_5$ уже помечены некоторые поля (см. рис.) Обозначим $l_n(p_0, z_6) - l_s(p_0, z_6)$ через h_1, а $l_n(p_0, z_4) - l_s(p_0, z_4)$ через h_2.



Тогда $\mathfrak{A}$ сравнивает h_1 и h_2, двигаясь от z_4 до первой встречи с $\mathfrak{B}_2$ или с $\mathfrak{B}_5$. Если раньше произошла встреча с $\mathfrak{B}_5$ (то есть $h_2 < h_1$), то $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_4$ заменяются на $\mathfrak{B}_5$ и $\mathfrak{B}_6$. Затем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ продолжают искать поле с минимальной высотой над уровнем p_0. Поиск продолжается до тех пор, пока q_{sgn} не станет равным нулю.

3) Если $q_{sgn}(z'') = 0$, то $\mathfrak{A}$ обошел полный оборот вокруг дыры V и снова оказался на поле p_0, помеченном $\mathfrak{B}_1$. В этот момент искомое поле помечено камнем $\mathfrak{B}_6$. Лемма 2 доказана.

Замечание. Очевидно, что данная система может распознать отсутствие полей лабиринта выше данного на той же вертикали ($q_{sgn}(z) \neq +1$ для $\forall z \in \partial V$ на данной вертикали).

Лемма 3. *Существует коллектив типа (1,6), который обходит любой лабиринт, начиная с самого нижнего среди самых левых его полей и останавливается после обхода.*

Доказательство. Пусть дан произвольный лабиринт, и коллектив находится на самом нижнем среди самых левых его полей в начальном состоянии.

Шаг 1. С самого нижнего поля вертикали коллектив движется в направлении n, пока это возможно, то есть пока в направлении n не встретит поле из $\mathbb{Z}^2 \setminus P_G$. Пусть впервые это случится на границе дыры V. Тогда, применив лемму 2, перейдем на ближайшее сверху поле на той же вертикали (отличное от данного). С этого поля идем так же, как в начальный момент времени. И так далее, пока это возможно (см. замечание). Таким образом, мы обошли все поля данной вертикали.

Шаг 2. Пусть весь коллектив находится на поле z (оно принадлежит границе внешней дыры). $\mathfrak{A}$ с помощью 3 камней может вычислить первое по ходу $\mathfrak{A}^+$ поле z' границы внешней дыры на ближайшей справа вертикали ($l_e(z,z') - l_w(z,z') = 1$) и перейти туда. Таким образом весь коллектив окажется на ближайшей справа вертикали.

Шаг 3. Аналогично шагу 1 спустимся до самого нижнего поля вертикали.

Шаг 4. Повторяем последовательно шаги 1, 2, 3.

В некоторый момент мы не сможем выполнить действия шага 2, так как $l_e(z,z') - l_w(z,z')$ будет $\leqslant 0$ для $\forall z'$ с границы внешней дыры, то есть правее данной вертикали нет полей лабиринта. В этот момент лабиринт обойден. Лемма 3 доказана.

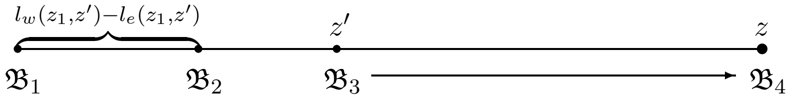
Лемма 4. *Существует коллектив типа (1,6), который, начиная с любого поля произвольного лабиринта, приходит в самое нижнее среди самых левых его полей и останавливается.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный лабиринт.

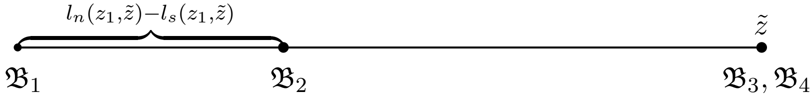
Шаг 1. С любого поля лабиринта пешка с 6 камнями может распознать самое левое поле данной горизонтали (доказательство аналогично предыдущим леммам). Помечаем его камнем $\mathfrak{B}_1$.

Шаг 2. Начинаем с этого поля (оно принадлежит границе внешней дыры) двигаться вдоль границы по ходу $\mathfrak{A}^-$, отыскивая ближайшее поле $\tilde{z}$, которое строго левее. Это можно сделать с помощью пешки и 3 камней (не считая $\mathfrak{B}_1$).

Для каждого поля z, принадлежащего границе внешней дыры, они вычисляют $l_w(z_1, z) - l_e(z_1, z)$ (поле z каждый раз помечаем камнем $\mathfrak{B}_4$):



Если для некоторого поля $z = \tilde{z}$ эта разность положительная (то есть поле $\tilde{z}$ левее исходного),



то весь коллектив переходит туда (поле помеченно камнем $\mathfrak{B}_4$) и шаг 2 выполняется с начала. Если разность отрицательная или равна нулю, то $\mathfrak{A}$ перемещает $\mathfrak{B}_4$ на 1 шаг по ходу $\mathfrak{A}^-$ и для этого поля снова вычисляет $l_w(z_1, z_4) - l_e(z_1, z_4)$.

Процесс завершается, когда мы находим такое поле z^*, что для любого поля z с границы внешней дыры разность $l_w(z^*, z) - l_e(z^*, z)$ не будет положительной ($\mathfrak{B}_4$ пройдет всю границу и вернется к $\mathfrak{B}_1$). Поле z^* принадлежит самой левой вертикали. Весь коллектив переходит на z^*.

Шаг 3. На самой левой вертикали коллектив типа (1,6) распознает самое нижнее поле. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. По лемме 4 существует коллектив типа (1,6), который в любом лабиринте, стартуя с произвольного поля, распознает (находит и останавливается) самое нижнее среди самых левых полей. Если после того, как пешка из этого коллектива перейдет в конечное состояние, заменить ее функции перехода и выхода функциями перехода и выхода коллектива, который обходит весь лабиринт, начиная с этого поля, и останавливается после обхода (он существует по лемме 3), то получим искомый коллектив. При этом конечное состояние пешки из первого коллектива заменяем начальным состоянием пешки из второго коллектива. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим коллектив, построенный при доказательстве теоремы 1. Поскольку этот коллектив решает задачу обхода произвольного плоского шахматного лабиринта, то в какой-то момент времени пешка $\mathfrak{A}$ окажется на выделенном поле. Таким образом, остается собрать все камни на этом поле.

Алгоритм обхода лабиринта таков, что либо весь коллектив движется с некоторого поля границы одной дыры по вертикальной или горизонтальной прямой до границы следующей дыры (очевидно, если пешка $\mathfrak{A}$ встретит выделенное поле при прохождении этого участка, все камни будут при ней и коллектив останавливается); либо, дойдя до границы дыры, пешка некоторым образом расставляет камни на этой границе, двигаясь как пешка $\mathfrak{A}^+$ или $\mathfrak{A}^-$. Предположим пешка $\mathfrak{A}$, двигаясь вдоль границы некоторой дыры как $\mathfrak{A}^+$ (соответсвенно, $\mathfrak{A}^-$), оказалась на выделенном поле и не все камни из коллектива при ней. Тогда пешка $\mathfrak{A}$ продолжает двигаться как $\mathfrak{A}^+$ (соответсвенно, $\mathfrak{A}^-$), собирая недостающие камни, до следующего попадания на выделенное поле и коллектив останавливается. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 3

Опишем поведение искомого коллектива $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_6, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_l)$. Для этого введем необходимые обозначения: $\mathcal{B} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_6)$, $M = \{\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_l\}$, $I = \{1, \ldots, l\}$, $J = \{1, \ldots, l+1\}$.

Для пешки введем вспомогательные состояния $r \subseteq I$, $n \in J$ и вектора состояний $(q_1, \ldots, q_l) \in \{0,1,2\}^l$ и $(s_1, \ldots, s_{l+1}) \in (2^I)^{l+1}$, удовлетворяющие условию $s_i \cap s_j = \varnothing$ для $\forall i, j \in J$, таких что $i \neq j$.

Рассмотрим произвольный $(2,l)$-лабиринт и поместим весь коллектив $\mathcal{A}$ на любое поле этого лабиринта.

В начальный момент времени $r = \varnothing$, $q_i = 0$ для любого $i \in I$, $s_j = \varnothing$ для любого $j \in J$.

Шаг 1. Положим $n := \min\{j \in J \mid s_j = \varnothing\}$. Коллектив $\mathcal{B}$ обходит ту горизонтальную компоненту (максимальный по включению связный плоский подлабиринт), в которой он находится. Это возможно по теореме 1. При прохождении компоненты пешка $\mathfrak{A}$ последовательно, начиная с наименьшего неиспользованного номера ($\min\{i \in I \mid q_i = 0\}$), расставляет камни из множества M на тех полях, из которых выходит вертикальное ребро (ведущее в другой слой), оба конца которого еще не отмечены никаким камнем из множества M. При этом функция переходов состояния устроена так, что как только пешка ставит камень с номером i, соответствующее состояние q_i становится равным 1, а $s_n := s_n \cup \{i\}$. Таким образом, пешка запоминает номера всех камней из текущей компоненты и то, какие камни уже использованы. Кроме того, аналочично пешка запоминает номера камней из другого слоя, соединенных с этой компонентой вертикальным ребром, если такие камни есть. А именно, состояния $r := r \cup \{k\}$, $q_k := 2$ каждый раз, когда пешка видит вертикальное ребро, на другом конце которого стоит камень с номером k. Шаг 1 завершается, когда коллектив понимает, что горизонтальная компонента, в которой он находится, уже обойдена (это равносильно моменту остановки коллектива из теоремы 1).

Шаг 2. Коллектив $\mathcal{B}$ находится в компоненте, которая уже обойдена (она имеет номер n). В зависимости от состояния пешки $\mathfrak{A}$ возможны 3 случая дальнейшего поведения коллектива.

Случай 1. В текущей компоненте есть камни из множества M, и не все компоненты, в которые можно попасть по вертикальному ребру из полей данной компоненты, помеченных камнями из M, еще обойдены, то есть состояние $s_n \neq \varnothing$ и $\{j \in s_n \mid q_j = 1\} \neq \varnothing$.

Тогда коллектив $\mathcal{B}$ распознает поле с камнем, у которого наименьший номер среди камней текущей компоненты, обладающих этим свойством. То есть коллектив $\mathfrak{B}$ распознает поле, отмеченное камнем номер $\min\{j \in s_n \mid q_j = 1\}$ и переходит на это поле. Это возможно по теореме 2. С этого поля коллектив $\mathcal{B}$ переходит на другой слой в подлабиринт, который еще не обойден. Далее выполняется шаг 1.

Случай 2. Из текущей компоненты хотя бы одно вертикальное ребро ведет к камню из множества M, и если в текущей компоненте есть камни из M, то все компоненты, в которые можно попасть по вертикальному ребру из полей данной компоненты, помеченных камнями из M, уже обойдены, то есть $r \neq \varnothing$ и $q_j = 2$ для $\forall j \in s_n$.

В этом случае коллектив $\mathcal{B}$ распознает поле, с которого пешка $\mathfrak{A}$ видит в соседнем слое камень с наибольшим номером среди всех камней соседнего слоя, в которые ведет вертикальное ребро из текущей компоненты. То есть коллектив $\mathfrak{B}$ распознает поле, с которого пешка $\mathfrak{A}$ видит в направлении u или d (в зависимости от того, в каком слое находится пешка, в нижнем или верхнем) камень с номером $\min\{k \in I \mid k \in r\}$ и переходит на это поле. Это возможно по теореме 2. С этого поля коллектив $\mathcal{B}$ переходит по вертикальному ребру на другой слой, при этом состояние $n := m$, такое что $\min\{k \in I \mid k \in r\} \in s_m$ (такое m единственное, что видно из определения вектора состояний $(s_1, \dots, s_{l+1})$). Далее снова выполняется шаг 2.

Случай 3. Нет ни одного вертикального ребра, ведущего из данной компоненты к камню из M и если в текущей компоненте есть камни из M, то все компоненты, в которые можно попасть по вертикальному ребру из полей данной компоненты, помеченных камнями из M, уже обойдены, то есть $r = \varnothing$ и $q_j = 2$ для $\forall j \in s_n$.

В этом случае лабиринт обойден, и коллектив останавливается. При этом, если $s_n = \varnothing$ и $r = \varnothing$, то рассматриваемый лабиринт является плоским шахматным лабиринтом. Теорема доказана.

Замечание 1. Число состояний у пешки $\mathfrak{A}$ из коллектива $\mathcal{A}$ будет порядка $(al)^{l+c}$, где a и c — константы.

Замечание 2. Если рассматривать каждую плоскую шахматную компоненту (k, l)-лабиринта как вершину нового графа, то таких графов будет конечное число (зависящее от k и l). Отсюда, учитывая теорему 2, следует, что для класса (k, l)-лабиринтов существует универсальный коллектив автоматов, количество которых зависит от k

и l, то есть коллектив автоматов, который обходит произвольный лабиринт из этого класса, стартуя с любого его поля и останавливается после обхода.

Список литературы

[1] Shannon Cl.E. Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found / Editor: H.Foerster. 1951. P. 173–180.

[2] Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха-Подколзина // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 3.

[3] Килибарда Г. Об обходе конечных лабиринтов системами автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 2.

[4] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[5] Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 1992. Т. 4. Вып. 3.

[6] Килибарда Г., Ушчумлич Ш. О лабиринтах-ловушках для коллективов автоматов // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 2.