Модель процесса дыхания живых организмов*

Ю.Г. Гераськина

Введение

Легкие образуют древовидную структуру бронхов, в которых имеются ворсинки, играющие роль эскалаторного механизма вывода как внутреннего секрета, так и поступающего извне в легкие вещества, во внешнюю среду. Бронхи имеют разные пропускные способности и разную эффективность ворсинок. Чем выше от альвеол, то есть самых мелких бронхов, тем мощнее механизм передачи вещества изнутри вовне.

Возникает задача построения модели легочного механизма самоочищения в условиях возможного запыления легких из среды в процессе дыхания и изучение ее свойств.

Ранее автором была построена такая модель процесса очищения запыленного легкого в предположении чистой среды [2], в которой оно функционирует. Там получено полное описание временной сложности такого очищения.

Здесь указанная модель расширяется до случая запыленной среды. Для нее решается задача описания всех возможных воздействующих квазислов (слов и сверхслов), каждая буква которых означает количество поступающего в легкие вещества извне в заданный момент времени такое, чтобы общая запыленность легкого не превышала предельно допустимого порога. Описываются все такие квазислова, называемые допустимыми. Это описание сводится к указанию

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 02–01–00162.

всех предельно допустимых квазислов (соответственно, слов и сверхслов) в том смысле, что все допустимые квазислова являются в точности монотонными «предшественниками» квазислов из этого семейства. Показывается, что мощность множества предельно допустимых сверхслов континуальна. Рассматривается и решается сложностной аспект задачи для слов.

1. Основные понятия, постановка задачи и результаты

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Обычным образом введем понятие графа.

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — некоторое множество, тогда u_i из U при $i \in \mathbb{N}_n$ называется *вершиной*. При $H \subseteq U \times U$, пара (u_i, u_j) из H называется *ребром*, ориентированным от u_i к u_j, $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Пару $G = (U, H)$ называем *графом*. Его вершинами являются элементы из U, а ребрами — пары из H. Про вершину u_i из (u_i, u_j) говорят, что она инцидентна этому ребру, а число всех таких ребер является ее ветвлением.

Каждый граф допускает геометрическую интерпретацию следующим образом.

Каждой вершине u_i из U взаимно однозначно сопоставляется точка u'_i в трехмерном евклидовом пространстве, множество которых обозначаем через U'.

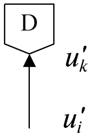
Каждому ребру (u_i, u_j) сопоставляется ориентированная дуга окружности (или отрезок) $\langle u'_i, u'_j \rangle$, при этом разные дуги не пересекаются, кроме точек, соответствующих одной и той же вершине. Возникающая фигура G' называется *геометрической интерпретацией графа G*.

Известно [1], что такая реализация для не более, чем континуального множества U, всегда возможна.

В наших рассмотрениях граф может быть интерпретирован его геометрической реализацией.

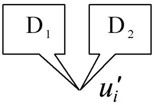
Нас будут интересовать специальные графы, называемые *деревьями*. Они определяются индуктивно с использованием геометрической реализации по следующим правилам.

1) Точка u'_i является деревом. Она же является корнем дерева.
2) Дуга $\langle u'_i, u'_j \rangle$ в виде отрезка является деревом, и u'_i — корень этого дерева.
3) Если D является деревом, точка u'_k является его корнем, и задано дерево $\langle u'_i, u'_k \rangle$, то фигура вида



тоже является деревом с корнем u'_i.

4) Если заданы два дерева D_1 и D_2, корнями которых является одна и та же точка u'_i, а других общих точек у них нет, то фигура



является деревом с корнем в точке u'_i.

5) Фигура D называется деревом, если она может быть получена с помощью конечного применения правил 1–4.

Отрезки, из которых состоит дерево, в дальнейшем будем называть ребрами, а точки — вершинами, как и в случае графов.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию D^{-1}, которая получается из дерева D путем замены ориентации в D на противоположную, полагая корнем в D^{-1} корень в D.

D^{-1} назовем *I-деревом.*

Класс всех деревьев обозначим через $\mathbf{D}$, а класс всех I-деревьев — через $\mathbf{D}^{-1}$. Выделим в $\mathbf{D}^{-1}$ подкласс всех I-деревьев, каждая точка в которых инцидентна не более чем трем ребрам, то есть имеет ветвление не более двух. Эти I-деревья называем *дихотомическими.*

Далее будем рассматривать только такие деревья, хотя наши утверждения для них будут справедливыми и для подкласса I-деревьев с заданным ветвлением q, $q \in \mathbb{N}$.

Сделаем несколько дополнительных предположений относительно I-деревьев.

Припишем каждому ребру I-дерева D^{-1} число из $\mathbb{N}$, которое назовем *весом ребра.* Это приписывание подчиним правилу: если двум ребрам, «входящим» в одну и ту же вершину, приписаны, соответственно, веса a и b, то «исходящему» из них ребру приписываем вес $c \geqslant a + b$.

Далее будем считать, что каждое ребро разделено на n частей, где $n \in \mathbb{N}$, которые называем *ворсинками*, занумерованными числами i из $\mathbb{N}_n$, возрастающими в направлении, обратном ориентации ребра.

Ворсинкам могут приписываться числа из $\mathbb{N}_0$, не превосходящие веса этого ребра, называемые *нагрузкой на ворсинку.*

Припишем также ребру число r из $\mathbb{N}$, такое, что r не превосходит нагрузки на ворсинку этого ребра, и назовем его *мерой переброса.* Это приписывание подчиним правилу: если двум ребрам, «входящим» в одну и ту же вершину, приписаны, соответственно, меры переброса r_1 и r_2, то «исходящему» из них ребру приписываем меру переброса $k \geqslant r_1 + r_2$.

I-дерево D^{-1}, у которого каждому ребру приписаны следующие компоненты: вес b, такой что $c_1 \leqslant b \leqslant c_2$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{N}$, мера переброса r, такая что $k_1 \leqslant r \leqslant k_2$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}$, и число ворсинок n, обозначим через $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n)$.

Свяжем с ним некоторый процесс, который назовем *процессом дыхания.* Он обусловлен рядом допущений.

Считаем, что в $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n)$ заданы распределения значений нагрузок по всем ворсинкам, учитывая, что нагрузка может быть нулевой. Пусть V' — суммарная нагрузка по всем ворсинкам, а $\mathbf{V}$ — максимально возможная суммарная нагрузка по всем ворсинкам. $\mathbf{V}$ назовем *объемом дерева (легкого)*, а V' — *исходным объемом загруженности дерева.* I-дерево $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n)$ с исходным объемом загруженности V' обозначим $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$. Пусть $\delta \in (0; 1]$, тогда *предельно допустимым порогом* будем называть объем загруженности легкого, равный $]\delta V[$, то есть наименьшему натуральному числу, не меньшему, чем δV. Далее будем писать δV вместо $]\delta V[$, считая, что $\delta V \in \mathbb{N}$.

Каждая ворсинка осуществляет прием вещества извне и переброс своей нагрузки на следующую ворсинку с меньшим номером внутри ребра.

Прием ворсинкой вещества, имеющего массу d, $d \in \mathbb{N}_0$ и $d \leqslant \mathbf{V} - V'$, из внешней среды внутри ребра осуществляется по следующему правилу (для этого правила ориентация считается обратной к заданной).

А$_1$) Если ворсинка имеет максимальную нагрузку, то прием вещества не осуществляется.

Б$_1$) При немаксимальной нагрузке d_1 первой такой ворсинки она осуществляет прием вещества максимально возможной массы d_2, такой, что $d_1 + d_2 \leqslant \min(b, d)$.

В$_1$) Следующая за ворсинкой из Б$_1$) принимает массу d_3, как и в Б$_1$), с заменой там d на $d - d_2$.

Г$_1$) Оставшаяся масса вещества опускается до следующей ворсинки с большим номером в ребре, для которой не выполняется условие А$_1$). Она осуществляет прием вещества по правилу В$_1$) или Б$_1$).

Д$_1$) Если ворсинка в рассматриваемом ребре является последней, не удовлетворяющей условию А$_1$), то оставшаяся масса вещества делится пополам (если число нечетное, то одна из частей на единицу больше другой); и каждая из частей вещества воспринимается соответствующими ребрами, как описано выше.

Е$_1$) Процесс, описываемый позициями А$_1$)–Д$_1$), начинается с ребра, которое инцидентно корню.

Переброс ворсинкой вещества осуществляется на следующую ворсинку с меньшим номером внутри ребра по такому правилу.

А$_2$) Если следующая ворсинка имеет не нулевую нагрузку, то переброс с ворсинки не осуществляется.

Б$_2$) Если нагрузка ворсинки не превосходит r и не выполнено условие А$_2$), то перебрасывается на следующую вся нагрузка ворсинки и считается, что ее нагрузка становится равной нулю.

В$_2$) Если на ворсинке нагрузка m и $m > r$, то она перебрасывает на следующую ворсинку нагрузку r и оставляет у себя нагрузку $m - r$.

Если ворсинка в ребре последняя, то переброс нагрузки осуществляется по правилам А$_2$), Б$_2$), В$_2$).

Γ_2) Если ребро инцидентно корню, то переброс с наименьшей по номеру ворсинки осуществляется в среду по правилам Б$_2$) и В$_2$) в предположении, что среда играет роль ворсинки с нулевой нагрузкой.

Д$_2$) Если ребро не инцидентно корню, то есть его вершина инцидентна следующему ребру, то нагрузка с наименьшей по номеру ворсинки этого ребра передается наибольшей по номеру ворсинке другого ребра по правилам А$_2$), Б$_2$), В$_2$).

Считаем, что процесс дыхания осуществляется в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \dots$

В первый момент I-дерево $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$ имеет заданное распределение нагрузок по его ворсинкам.

Ко второму моменту осуществляется прием вещества массой $d(1)$ по правилам А$_1$)–Е$_1$), и затем осуществляется переброс нагрузок с ворсинки на ворсинку во всем I-дереве или выброс в среду в соответствии с правилами А$_2$), Б$_2$), В$_2$), Γ_2), Д$_2$). А если в легкое подается масса d, не превосходящая объема легкого, то та ее часть, которая не осела на ворсинках, выбрасывается в среду.

Другими словами, за один момент (шаг) происходит «вдох» и «выдох».

Пусть A^m — множество всех слов $\alpha^m = a(1)a(2)\dots a(m)$, где $a(t) \in \mathbb{N}_V \cup \{0\}$ при $t = 1, 2, \dots m$, на котором вводим отношение частичного порядка $\leqslant$, полагая $\alpha^m \leqslant \alpha'^m$, если $a(t) \leqslant a'(t)$ для всех $t = 1, 2, \dots, m$.

Для I-дерева $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$ слово α^m из A^m назовем *допустимым*, если при подаче на него буквы $a(t)$ из α^m в каждый момент времени t всегда выполнено $a(t) + V(t) \leqslant \delta V$, где $V(t)$ — объем загруженности I-дерева $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$ в момент t, $t = 1, 2, \dots, m$. Такое слово называется *предельно допустимым* для I-дерева $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$, если не существует допустимого слова α'^m из A^m такого, что $\alpha'^m \geqslant \alpha^m$ и $\alpha'^m \neq \alpha^m$.

Пусть $A^* = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A^m$, а A^ω — множество всех сверхслов (то есть слов бесконечной длины) $\alpha^\omega = a(1)a(2)\dots a(t)\dots$, где $a(t) \in \mathbb{N}_0$, на котором вводим отношение частичного порядка $\leqslant$, полагая $\alpha^\omega \leqslant \alpha'^\omega$, если $a(t) \leqslant a'(t)$ для всех t из $\mathbb{N}$.

Для I-дерева $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$ сверхслово α^ω из A^ω назовем *допустимым*, если при подаче на него буквы $a(t)$ из α^ω в каждый момент времени t всегда выполнено $a(t)+V(t) \leqslant \delta\mathbf{V}$, где $V(t)$ — объем загруженности I-дерева $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$ в момент t, $t = 1, 2, \ldots$ Такое сверхслово называется *предельно допустимым* для I-дерева $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$, если не существует допустимого сверхслова α'^ω из A^ω такого, что $\alpha'^\omega \geqslant \alpha^\omega$ и $\alpha'^\omega \neq \alpha^\omega$.

Ясно, что предельно допустимые сверхслова существуют. Например, сверхслово $\delta\mathbf{V} - V'\delta\mathbf{V}\delta\mathbf{V} \ldots \delta\mathbf{V} \ldots$ при $\delta\mathbf{V} \leqslant r$ является предельно допустимым.

Более того, можно показать, что для всякого допустимого сверхслова α^ω найдется предельно допустимое α'^ω такое, что $\alpha^\omega \leqslant \alpha'^\omega$.

Множество $A = A^* \cup A^\omega$ будем называть множеством квазислов. Распространим понятия допустимости и предельной допустимости на квазислова.

Нашей главной задачей будет описание всех квазислов, как допустимых, так и не допустимых.

Последовательность ребер вида $(u_{i_1}, u_{i_2})(u_{i_2}, u_{i_3}) \ldots (u_{i_k}, u_{i_{k+1}})$ $(u_{i_{k+1}}, u_{i_{k+2}}) \ldots (u_{i_{s-1}}, u_{i_s})$ в I-дереве назовем *цепью* в нем от u_{i_1} до u_{i_s} длины s. Наибольшую длину цепи в I-дереве называем его *глубиной*. Понятие глубины распространим на вершины I-дерева.

Вершина u_i в $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$ имеет глубину h, если кратчайшая цепь от нее до корня в $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$ имеет длину h. Глубину корня полагаем равной нулю. Если глубина $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$ равна l, то все его вершины расслаиваются на классы $K_0, K_1, \ldots, K_l$, где K_j состоит из всех тех вершин из $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$, которые имеют глубину j, $j \in \{0, 1, 2..., l\}$.

При заданных b и r из $\mathbb{N}$ считаем $D^{-1}(c_1, c_2; k_1, k_2; n; V')$ (b, r)-*правильным*, если каждому ребру, исходящему из любой вершины класса K_j, приписаны вес $2^{l-j}b$ и мера переброса $2^{l-j}r$. Таким образом, ребрам, исходящим из вершин класса K_l, будут приписаны вес b и мера переброса r, а ребру, входящему в корень — $2^{l-1}b$ и $2^{l-1}r$, соответственно. Такое I-дерево будем обозначать через $D_l^{-1}(b, r, n; V')$.

Пусть $D_l(b, r, n; V')$ — класс всех I-деревьев $D_l^{-1}(b, r, n; V')$.

Теорема 1. *Если* $\delta \in (0, 1]$, *объем* V I-*дерева* $D_l^{-1}(b, r, n; V')$ *равен* $2^{l-1}bnr$, $v(t)$ — *нагрузка ворсинки, бросающей в среду, к нача-*

лу момента t, $V(t)$ *— объем загруженности* I*-дерева* $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ *к началу момента* t, *где* V, b, r, n, l, $V' \in \mathbb{N}$ *и* $0 \leqslant V' \leqslant \delta V$, δV *— предельно допустимый порог загруженности, то слово* $a(1)a(2)\dots a(t)\dots a(m)$, *где* $m \in \mathbb{N}$ *и* $m > 1$, *является предельно допустимым для этого дерева точно тогда, когда для него выполнены следующие рекуррентные соотношения:*
а) для $t = 1$ *выполнено*

$$a(1) \in \begin{cases} [2^{l-1}r, \delta V], \text{ если } V' = 0, \\ \{0\} \cup [2^{l-1}r, \delta V - V'], \text{ если } v(1) = 0 \text{ и } V' > 0, \\ [0, \delta V - V'], \text{ если } v(1) \geqslant 2^{l-1}r, \\ [2^{l-1}r - v(1), \delta V - V'], \text{ если } 0 < v(1) < 2^{l-1}r; \end{cases}$$

б) для всех $t = 2, \dots, m-1$ *имеет место*

$$a(t) \in \begin{cases} [0, \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t)], \text{ если } v(t) \geqslant 2^{l-1}r, \\ [2^{l-1}r - v(t), \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } 0 < v(t) < 2^{l-1}r, \\ \{0\} \cup [2^{l-1}r, \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } v(t) = 0 \text{ и } V(t) \neq 0, \\ [2^{l-1}r, \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } v(t) = 0 \text{ и } V(t) = 0, \end{cases}$$

где $k(2) = 1$, $k(t) = k(t-1) + p(t-1)$, *причем*

$$p(t-1) = \begin{cases} 0, \text{ если } v(t-1) = 0, a(t-1) = 0 \text{ и } V(t-1) \neq 0, \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

в) для $t = m$ *выполнено* $a(m) = \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m)$.

Пусть $\alpha^m = a(1)a(2)\dots a(m)$ — некоторое предельно допустимое слово. Назовем его букву $a(t), t \in \mathbb{N}_m$, *максимально возможной*, если после подачи вещества объема $a(t)$ в I-дерево $D_l^{-1}(b,r,n;V')$, в этот момент времени общий объем нагрузки $V(t)$ данного I-дерева будет в точности равен δV.

Распространим понятие максимально возможной буквы на предельно допустимые сверхслова. Назовем букву $a(t)$, $t \in \mathbb{N}$, сверхслова $\alpha^\omega = a(1)a(2)\ldots a(m)\ldots$, максимально возможной, если после подачи вещества объема $a(t)$ в I-дерево $D_l^{-1}(b,r,n;V')$, в этот момент времени общий объем нагрузки $V(t)$ данного I-дерева будет в точности равен δV.

Для предельно допустимого слова $\alpha^m = a(1)a(2)\ldots a(m)$, $m \in \mathbb{N}$ назовем слово $\alpha^k = a(1)a(2)\ldots a(k)$ его префиксом длины k, $k \in \mathbb{N}_m$. Назовем слово $\alpha^k = a(t)a(t{+}1)\ldots a(k{+}t{-}1)$, $t \in \mathbb{N}_{m-k+1}$, суффиксом длины k, $k \in \mathbb{N}_m$, слова α^m.

Распространим понятия префикса и суффикса на предельно допустимые сверхслова. Для сверхслова $\alpha^\omega = a(1)a(2)\ldots a(m)\ldots$ слово $\alpha^k = a(1)a(2)\ldots a(k)$ назовем его префиксом длины k, $k \in \mathbb{N}$, а слово $\alpha^k = a(t)a(t+1)\ldots a(k+t-1)$, $t \in \mathbb{N}$, — его суффиксом длины k, $k \in \mathbb{N}$.

Префиксы предельно допустимых квазислов, последняя буква которых является максимально возможной, будем называть *предельными префиксами.*

Суффиксы предельно допустимых квазислов, последняя буква которых является максимально возможной, будем называть *предельными суффиксами.*

Назовем *минимальным предельным префиксом* предельно допустимого квазислова такой его предельный префикс, длина которого больше единицы и из всех возможных предельных префиксов этого квазислова он является наименьшим по длине.

Назовем *минимальным предельным суффиксом* предельно допустимого квазислова такой его предельный суффикс, длина которого больше единицы и из всех возможных предельных суффиксов этого квазислова, имеющих одинаковую первую букву, он является наименьшим по длине.

Заметим, что если каждый префикс сверхслова допустим, то это сверхслово является допустимым.

Теорема 2. *Если $\delta \in (0,1]$, объем V I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ равен $2^{l-1}bnr$, $v(t)$ — нагрузка ворсинки, бросающей в среду, к началу мо-*

мента t, $V(t)$ — объем загруженности I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ к началу момента t, где V, b, r, n, l, $V' \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant V' \leqslant \delta V$, δV — предельно допустимый порог загруженности, то все минимальные предельные префиксы и суффиксы длины m, $m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$, являются предельно допустимыми словами $a(1)a(2)\dots a(t)\dots a(m)$ длины m, где $a(t)$ определяются рекуррентно так:
а) для $t=1$ выполнено

$$a(1) \in \begin{cases} [2^{l-1}r, \delta V], \text{ если } V' = 0, \\ \{0\} \cup [2^{l-1}r, \delta V - V'], \text{ если } v(1) = 0 \text{ и } V' > 0, \\ [0, \delta V - V'], \text{ если } v(1) \geqslant 2^{l-1}r, \\ [2^{l-1}r - v(1), \delta V - V'], \text{ если } 0 < v(1) < 2^{l-1}r; \end{cases}$$

б) для всех $t = 2, \dots, m-1$ имеет место

$$a(t) \in \begin{cases} [0, \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t) - 1], \text{ если } v(t) \geqslant 2^{l-1}r, \\ [2^{l-1}r - v(t), \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t) - 1], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } 0 < v(t) < 2^{l-1}r, \\ \{0\} \cup [2^{l-1}r, \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t) - 1], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } v(t) = 0 \text{ и } V(t) \neq 0, \\ [2^{l-1}r, \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t) - 1], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } v(t) = 0 \text{ и } V(t) = 0, \end{cases}$$

где $k(2) = 1$, $k(t) = k(t-1) + p(t-1)$, причем

$$p(t-1) = \begin{cases} 0, \text{ если } v(t-1) = 0, a(t-1) = 0 \text{ и } V(t-1) \neq 0, \\ 1, \text{ иначе}; \end{cases}$$

в) для $t = m$ выполнено $a(m) = \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m).$

Пусть $P(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, V')$ — множество всех минимальных предельных префиксов для I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ объема V с предельным порогом загруженности δV, а $S(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r)$ —

множество всех минимальных предельных суффиксов для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; \delta V - 2^{l-1}r)$ объема V с предельным порогом загруженности δV.

Введем *операцию конкатенации* «$\cdot$» над словами и сверхсловами. Если $\alpha^m \in A^*$, а $\beta \in A^* \cup A^\omega$, то выражение $\alpha^m \cdot \beta$ будет определять слово или сверхслово, получаемое приписыванием к α^m последовательно справа всех букв из β.

Если $C \subseteq A^*$, а $D \subseteq A^* \cup A^\omega$, то полагаем $C \cdot D = \bigcup\limits_{\substack{\alpha\in C\\ \beta\in D}} \alpha \cdot \beta$.

Пусть $P^m(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, V')$ — множество всех минимальных предельных префиксов длины m для ребра I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$ объема V с предельным порогом загруженности δV, а $S^m(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r)$ — множество всех минимальных предельных суффиксов длины m для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; \delta V - 2^{l-1}r)$ объема V с предельным порогом загруженности δV.

Положим

$$\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r) = \bigcup_{i=2}^{\infty} S^i(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r),$$

$$\bar{P}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, V') = \bigcup_{i=2}^{\infty} P^i(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, V').$$

Пусть e — пустое слово, для которого считаем выполненными для любого λ из $\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r)$ соотношения $e\cdot\lambda = \lambda\cdot e = \lambda$. Полагаем, что $e \in \bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r)$.

Распространим операции A^* и A^ω на случай произвольного множества $B \subseteq A^*$, полагая, соответственно, что B^* состоит из всех слов, являющихся конкатенациями слов из B, а B^ω — из всех сверхслов, получаемых последовательным приписыванием слов из B.

Теорема 3. *Если $\delta \in (0, 1]$, объем V I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$ равен $2^{l-1}bnr$, где V, b, r, n, l, $V' \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant V' \leqslant \delta V$, а δV — предельно допустимый порог загруженности, и $\Im$ — множество всех предельно допустимых квазислов для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$, то*

$$\Im = \bar{P}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, V') \cdot (\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r)\cdot$$
$$\cdot \{e, 2^{l-1}r\})^* \cup (\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r) \cdot \{e, 2^{l-1}r\})^{\omega}.$$

Следствие 1. *Если $\delta \in (0,1]$, объем V I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ равен $2^{l-1}bnr$, где V, b, r, n, l, $V' \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant V' \leqslant \delta V$, а δV — предельно допустимый порог загруженности, то мощность множества всех предельно допустимых для I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ сверхслов континуальна.*

Следствие 2. *Если $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$ — множество всех предельно допустимых слов длины m для I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$, $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$ — множество всех допустимых слов длины m для I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$, то для α^m из A^m выполнено $\alpha^m \in \mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$ точно тогда, когда существует β^m из $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$, что $\alpha^m \leqslant \beta^m$.*

Следствие 3. *Если $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$ — множество всех предельно допустимых сверхслов для I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$, $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$ — множество всех допустимых сверхслов для I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$, то для α^ω из A^ω выполнено $\alpha^\omega \in \mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$ точно тогда, когда существует β^ω из $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$, что $\alpha^\omega \leqslant \beta^\omega$.*

Таким образом, указав все предельно допустимые квазислова, мы описали все множество допустимых квазислов, то есть решили нашу основную задачу.

Рассмотрим сложностной аспект основной задачи для слов.

Хотим понять, как по данному слову $\alpha^m = a(1)a(2)\ldots a(m)$ длины m, $m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$, и начальному состоянию I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ определить, является ли оно допустимым или предельно допустимым. Для решения этого вопроса предлагается следующий алгоритм.

Для определения допустимости (предельной допустимости) слова $\alpha^m = a(1)a(2)\ldots a(m)$ необходимо выполнить следующее.

1) Определить с помощью леммы 2 верхнюю границу интервала изменения значения текущей буквы по начальному состоянию

I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$, то есть по известным исходному объему загруженности V', нагрузке $v(t)$ на ворсинку, бросающую в среду, допустимому порогу загруженности δV, а также по известным значениям предыдущих букв.

2) Определить с помощью леммы 2 нижнюю границу интервала изменения значения текущей буквы по начальному состоянию I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$, то есть по известным исходному объему загруженности V', нагрузке $v(t)$ на ворсинку, бросающую в среду, и текущему объему загруженности $V(t)$ I-дерева.
3) Определить положение значения текущей буквы относительно верхней границы интервала.
4) Определить положение значения текущей буквы относительно нижней границы интервала.
5) Переход к следующей букве.

Введем сложностную функцию Шеннона $L_{\mathbf{Q}}(m, D_l^{-1}(b, r, n; V'))$, которая равна минимально достаточному числу шагов типа 1)–5) для определения принадлежности любого слова длины m множеству $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$, и аналогичную сложностную функцию Шеннона $L_{\mathbf{T}}(m, D_l^{-1}(b, r, n; V'))$ для определения предельной допустимости слов.

Теорема 4. *Если m, $m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$ — длина слов для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$ и предельный порог загруженности I-дерева равен δV, то*

$$L_{\mathbf{Q}}(m, D_l^{-1}(b, r, n; V')) = 3m - 1 \quad \text{и} \quad L_{\mathbf{T}}(m, D_l^{-1}(b, r, n; V')) = 5m - 3.$$

2. Доказательства утверждений

Ребро, которое состоит ровно из nl ворсинок, имеет вес $2^{l-1}b$, меру переброса $2^{l-1}r$ и исходный объем загруженности V', будем обозначать $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$.

Справедливо следующее вспомогательное утверждение (лемма о редукции).

Лемма 1. *Для I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ и ребра $R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;V')$ множества всех допустимых квазислов совпадают.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что исходный объем загруженности V' равен нулю.

Сначала вычислим объем $V(D_l^{-1}(b,r,n;0))$ I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;0)$.

Ребром класса K_j в I-дереве $D_l^{-1}(b,r,n;0)$ назовем такое ребро, одна вершина которого имеет глубину $j-1$, а другая вершина имеет глубину j. Таким образом, в классе K_j ровно 2^{j-1} ребер. Далее, каждое ребро класса K_j состоит из n ворсинок. Вес ребра класса K_j равен $2^{l-j}b$. А количество классов K_j для ребер I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;0)$ равно l.

Следовательно,

$$V(D_l^{-1}(b,r,n;0)) = \sum_{j=1}^{l} 2^{l-j} b 2^{j-1} n =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} 2^{l-j+j-1} bn = \sum_{j=1}^{l} 2^{l-1} bn = 2^{l-1} bnl.$$

Пусть $V(R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;0))$ — объем ребра $R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;0)$. Очевидно, что $V(R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;0)) = 2^{l-1}bnl$.

Видим, что $V(D_l^{-1}(b,r,n;0)) = V(R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;0))$.

Учитывая равенство объемов I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ и ребра $R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;V')$, и, исходя из определения допустимых квазислов, получаем, что для фиксированного δ допустимые квазислова для I-дерева $D_l^{-1}(b,r,n;V')$ и ребра $R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;V')$ совпадают. Лемма доказана.

Учитывая эту лемму, далее будем описывать предельно допустимые квазислова для ребра $R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;V')$.

Лемма 2. *Если $\delta \in (0,1]$, объем V ребра $R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;0)$ равен $2^{l-1}bnr$, $v(t)$ — нагрузка ворсинки, бросающей в среду, к началу момента t, где V, b, r, n, t, $l \in \mathbb{N}$, $V(t)$ — объем загруженности ребра $R(2^{l-1}b,2^{l-1}r,nl;0)$ к началу момента t, δV — предельно допустимый порог загруженности, то слово $a(1)a(2)\ldots a(t)\ldots a(m)$, где*

$m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$, является предельно допустимым для этого ребра точно тогда, когда для него выполнены следующие рекуррентные соотношения:
а) для $t = 1$ выполнено $2^{l-1}r \leqslant a(1) \leqslant \delta V$;
б) для всех $t = 2, \dots, m-1$ имеет место

$$a(t) \in \begin{cases} [0, \delta V - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t)], \ \textit{если } v(t) \geqslant 2^{l-1}r, \\ [2^{l-1}r - v(t), \delta V - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{если } 0 < v(t) < 2^{l-1}r, \\ \{0\} \cup [2^{l-1}r, \delta V - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{если } v(t) = 0 \textit{ и } V(t) \neq 0, \\ [2^{l-1}r, \delta V - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(t)], \ \textit{если } v(t) = 0 \textit{ и } V(t) = 0, \end{cases}$$

где $k(2) = 1$, и при $t > 2$ $k(t) = k(t-1) + p(t-1)$, причем

$$p(t-1) = \begin{cases} 0, \ \textit{если } v(t-1) = 0, \ a(t-1) = 0 \textit{ и } V(t-1) \neq 0, \\ 1, \ \textit{иначе}; \end{cases}$$

в) для $t = m$ выполнено $a(m) = \delta V - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m)$.

Доказательство. Пусть слово $\alpha^m = a(1)a(2)\dots a(t)\dots a(m)$ предельно допустимое для ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; 0)$. Найдем его вид.

Из определения допустимости α^m следует, что $a(1) \leqslant \delta V$, а для того, чтобы это слово было предельным, необходимо, чтобы $a(1) \geqslant 2^{l-1}r$ (иначе, эту букву можно мажорировать, положив $a(1) = 2^{l-1}r$).

Таким образом, если слово α^m предельно допустимое, то $2^{l-1}r \leqslant a(1) \leqslant \delta V$.

Если слово α^m допустимое, то в каждый момент времени ребро $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; 0)$ может принимать нагрузку такую, чтобы суммарный объем не превышал предельно допустимого порога, равного δV, а его ворсинка, бросающая в среду, в этот же момент времени выбрасывает в среду нагрузку f, равную либо $2^{l-1}r$, либо нулю. Далее, так как в первый момент ребро $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; 0)$ получило не нулевую нагрузку, а заполнение ребра начинается с меньшей по номеру ворсинки, имеющей нулевую нагрузку, то $a(2) \leqslant \delta V - a(1) + 2^{l-1}r$. Определяем $k(2)$ единицей, то есть $k(2) = 1$.

Для установления при $m > 2$ максимальных значений $a(t)$ в α^m, когда $t \in \{3, \dots, m\}$, применим индукцию.

При $t = 3$, очевидно, выполнено $a(3) \leqslant \delta V - a(1) - a(2) + 2^{l-1}r + 2^{l-1}rp(2)$, где

$$p(2) = \begin{cases} 0, \text{ если } v(2) = 0, \ a(2) = 0 \text{ и } V(2) \neq 0, \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пусть для $t \leqslant m - 1$ верны верхние границы из условия б). Следовательно, $a(m-1) \leqslant \delta V - \sum\limits_{i=1}^{m-2} a(i) + 2^{l-1}rk(m-1)$, где $k(m-1) = k(m-2) + p(m-2)$, и

$$p(m-2) = \begin{cases} 0, \text{ если } v(m-2) = 0, \ a(m-2) = 0 \text{ и } V(m-2) \neq 0, \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что для $t = m$ верна верхняя граница из условия в).

В момент $m-1$ (после вброса) ребро $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; 0)$ содержит вещество массы не более $\sum\limits_{i=1}^{m-2} a(i) - 2^{l-1}rk(m-1) + a(m-1)$, но в этот же момент происходит выброс вещества массы $(2^{l-1}r)p(m-1)$, где

$$p(m-1) = \begin{cases} 0, \text{ если } v(m-1) = 0, \ a(m-1) = 0 \text{ и } V(m-1) \neq 0, \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Тем самым получаем

$$a(m) \leqslant \delta V - (\sum_{i=1}^{m-2} a(i) - 2^{l-1}rk(m-1) + a(m-1) - (2^{l-1}r)p(m-1)),$$

$$a(m) \leqslant \delta V - \sum_{i=1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}r(k(m-1) + p(m-1)),$$

$$a(m) \leqslant \delta V - \sum_{i=1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m), \text{ где } k(m) = k(m-1) + p(m-1).$$

Таким образом, получили верхние границы значений из области допустимых значений (ОДЗ) для букв $a(2), \ldots, a(m)$ слова α^m. Найдем теперь их нижние границы.

Заметим, что значение нижней границы ОДЗ $a(t)$ зависит только от $v(t)$ и $V(t)$.

Если $v(t) = 0$ и $V(t) = 0$, то $a(t) \geqslant 2^{l-1}r$. В противном случае $a(t) < 2^{l-1}r$ и слово $\alpha^m = a(1) \ldots a(t) \ldots a(m)$ не является предельно допустимым, поскольку $a(t)$ можно мажорировать при сохранении значений остальных $m-1$ букв, полагая $a(t) = 2^{l-1}r$.

Если $v(t) = 0$ и $V(t) \neq 0$, то для $a(t)$ возможны два случая. Либо можно подать нагрузку, равную нулю, тогда в момент t произойдет переброс с большей по номеру ворсинки на ворсинку с меньшим номером, если последняя имеет нулевую нагрузку, а выброс в среду не произойдет; либо можно подать $a(t) \geqslant 2^{l-1}r$. В противном случае $a(t) < 2^{l-1}r$ и слово $\alpha^m = a(1) \ldots a(t) \ldots a(m)$ не является предельно допустимым, поскольку $a(t)$ можно мажорировать при сохранении значений остальных $m-1$ букв, полагая $a(t) = 2^{l-1}r$.

Если $0 < v(t) < 2^{l-1}r$, то $a(t) \geqslant 2^{l-1}r - v(t)$. В противном случае $a(t) < 2^{l-1}r - v(t)$ и слово $\alpha^m = a(1) \ldots a(t) \ldots a(m)$ не является предельно допустимым, поскольку $a(t)$ можно мажорировать при сохранении значений остальных $m-1$ букв, полагая $a(t) = 2^{l-1}r - v(t)$.

Если $v(t) \geqslant 2^{l-1}r$, то, очевидно, $a(t) \geqslant 0$.

Теперь заметим, что $a(m)$ должно быть максимально возможным при фиксированных $a(1), \ldots, a(m-1)$, то есть $a(m) = \delta V - \sum\limits_{t=1}^{m-1} a(t) + 2^{l-1}rk(m)$, иначе слово α^m не было бы предельно допустимым для ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; 0)$.

Значит, если $V' = 0$ и слово $\alpha^m = a(1) \ldots a(m)$ предельно допустимое, то оно обязательно имеет вид, указанный в формулировке леммы 2.

Тем самым мы установили необходимость выполнения условий а), б) и в) для предельной допустимости слова α^m.

Покажем, что всякое слово α^m со свойствами а), б) и в) является предельно допустимым.

Пусть α^m такое слово и $a(1)$ в нем принимает любое значение из а), а при $t \geqslant 2a(t)$ — любое значение из б) и в), соответственно. Из рекуррентного построения α^m по правилам а), б) и в) видно, что слово α^m допустимое.

Пусть $\mathbf{T}(\delta V, 2^{l-1}r, m)$ — множество всех таких слов. Покажем, что все они попарно несравнимы. Отсюда, очевидно, будет следовать, что все слова из $\mathbf{T}(\delta V, 2^{l-1}r, m)$ предельно допустимые.

Путь слово $\tilde{\alpha}^m = \tilde{a}(1)\tilde{a}(2)\dots\tilde{a}(m)$ такое, что $\tilde{\alpha}^m \in \mathbf{T}(\delta V, 2^{l-1}r, m)$ и для некоторого t^*, из $\{1, 2, \dots, m\}$, выполнено $a(t^*) \neq \tilde{a}(t^*)$.

Если $a(t) \geqslant \tilde{a}(t)$ для всех t из $\{1, 2, \dots, m-1\} \setminus t^*$, и $a(t^*) > \tilde{a}(t^*)$, при $t^* \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, то $\delta V - \sum\limits_{i=1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m) < \delta V - \sum\limits_{i=1}^{m-1} \tilde{a}(i) + 2^{l-1}rk(m)$. Отсюда $a(m) < \tilde{a}(m)$.

Если $a(t) \geqslant \tilde{a}(t)$ для всех t из $\{2, 3, \dots, m\} \setminus t^*$, и $a(t^*) > \tilde{a}(t^*)$, при $t^* \in \{2, 3, \dots, m\}$, то будет выполнена такая система соотношений

$$\begin{cases} \delta V - \sum\limits_{i=1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m) \geqslant \delta V - \sum\limits_{i=1}^{m-1} \tilde{a}(i) + 2^{l-1}rk(m), \\ a(t) \geqslant \tilde{a}(t) \text{ при } t \in \{2, 3, \dots, m\} \setminus t^*, \\ a(t^*) > \tilde{a}(t^*) \text{ при } t^* \in \{2, 3, \dots, m\}. \end{cases}$$

Значит, $a(1) + \sum\limits_{i=2}^{m-1} a(i) \leqslant \tilde{a}(1) + \sum\limits_{i=2}^{m-1} \tilde{a}(i) < \tilde{a}(1) + \sum\limits_{i=2}^{m-1} \tilde{a}(i)$. Отсюда $a_1 < \tilde{a}(1)$.

Если $a(t) \geqslant \tilde{a}(t)$ для всех t из $\{1, 2, \dots, t'-1, t'+1, \dots, m\} \setminus t^*$, и любого t' из $\{2, 3, \dots, m-1\}$, $t^* \in \{1, 2, \dots, t'-1, t'+1, \dots, m\}$, то будет выполнена такая система соотношений

$$\begin{cases} \delta V - \sum\limits_{i=1}^{t'-1} a(i) - a(t') - \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m) \geqslant \\ \qquad\qquad \geqslant \delta V - \sum\limits_{i=1}^{t'-1} \tilde{a}(i) - \tilde{a}(t') - \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} \tilde{a}(i) + 2^{l-1}rk(m), \\ a(t) \geqslant \tilde{a}(t) \text{ при } t \in \{1, 2, \dots, t'-1, t'+1, \dots, m\} \setminus t^*, \\ a(t^*) > \tilde{a}(t^*) \text{ при } t^* \in \{1, 2, \dots, t'-1, t'+1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Значит, $\sum\limits_{i=1}^{t'-1} a(i) + a(t') + \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} a(i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{t'-1} \tilde{a}(i) + \tilde{a}(t') + \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} \tilde{a}(i) <$ $\sum\limits_{i=1}^{t'-1} a(i) + \tilde{a}(t') + \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} a(i)$. Отсюда $a(t') < \tilde{a}(t')$.

Таким образом, если какие-нибудь $(m-1)$ значений букв слова α^m не меньше значений соответствующих букв слова $\tilde{\alpha}^m$, и среди них существует хотя бы одна буква слова α^m, значение которой строго больше значения соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$, то значение оставшейся буквы слова α^m будет меньше значения соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$.

В силу симметрии этих слов, если какие-нибудь $(m-1)$ значений букв слова α^m не больше значений соответствующих букв слова $\tilde{\alpha}^m$, и среди них существует хотя бы одна буква слова α^m, значение которой строго меньше значения соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$, то значение оставшейся буквы слова α^m будет больше значения соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$.

Очевидно, если какие-нибудь $(m-1)$ значений букв слова α^m равны значениям соответствующих букв слова α^m, то и значение оставшейся буквы слова α^m будет равно значению соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$.

Таким образом, слова α^m и $\tilde{\alpha}^m$ либо несравнимы, либо совпадают.

Следовательно, описаны все предельно допустимые слова длины m, $m > 1$, для ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; 0)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\delta \in (0, 1]$, объем V ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$ равен $2^{l-1}bnr$, $v(t)$ — нагрузка ворсинки, бросающей в среду, к началу момента t, $V(t)$ — объем загруженности ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$ к началу момента t, где V, b, r, n, l, $V' \in \mathbb{N}$ и $0 < V' \leqslant \delta V$, δV — предельно допустимый порог загруженности, то слово $a(1)a(2)\ldots a(t)\ldots a(m)$, где $m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$, является предельно допустимым для этого ребра точно тогда, когда для него выполнены следующие рекуррентные соотношения:*
а) для $t = 1$ выполнено

$$a(1) \in \begin{cases} [2^{l-1}r - v(1), \delta V - V'], \ \text{если } 0 < v(1) < 2^{l-1}r, \\ \{0\} \cup [2^{l-1}r, \delta V - V'], \ \text{если } v(1) = 0, \\ [0, \delta V - V'], \ \text{если } v(1) \geqslant 2^{l-1}r. \end{cases}$$

б) для всех $t = 2, \dots, m-1$ *имеет место*

$$a(t) \in \begin{cases} [0, \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1} r k(t)], \ \text{если } v(t) \geqslant 2^{l-1} r, \\ [2^{l-1} r - v(t), \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1} r k(t)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } 0 < v(t) < 2^{l-1} r, \\ \{0\} \cup [2^{l-1} r, \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1} r k(t)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } v(t) = 0 \ \text{и} \ V(t) \neq 0, \\ [2^{l-1} r, \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1} r k(t)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } v(t) = 0 \ \text{и} \ V(t) = 0, \end{cases}$$

где $k(2) = 1$, *и при* $t > 2$ $k(t) = k(t-1) + p(t-1)$, *причем*

$$p(t-1) = \begin{cases} 0, \ \text{если } v(t-1) = 0, \ a(t-1) = 0 \ \text{и} \ V(t-1) \neq 0, \\ 1, \ \text{иначе}. \end{cases}$$

в) для $t = m$ *выполнено* $a(m) = \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t-1} a(i) + 2^{l-1} r k(m)$.

Доказательство. Пусть слово $\alpha^m = a(1)a(2)\dots a(m)$ предельно допустимое для ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$. Найдем его вид.

Из определения допустимости α^m следует, что $a(1) \leqslant \delta V - V'$.

Найдем нижнюю границу ОДЗ $a(1)$.

Если $v(1) = 0$, то для $a(1)$ возможны два случая. Либо можно подать нагрузку, равную нулю, тогда в первый момент произойдет переброс с большей по номеру ворсинки на ворсинку с меньшим номером, если последняя имеет нулевую нагрузку, а выброс в среду не произойдет. Либо можно подать $a(1) \geqslant 2^{l-1}r$. В противном случае $a(1) < 2^{l-1}r$ и слово $\alpha^m = a(1)\dots a(m)$ не является предельно допустимым, поскольку $a(1)$ можно мажорировать при фиксированных значениях остальных $m-1$ букв, полагая $a(1) = 2^{l-1}r$.

Если $0 < v(1) < 2^{l-1}r$, то $a(1) \geqslant 2^{l-1}r - v(1)$. В противном случае $a(1) < 2^{l-1}r - v(1)$ слово $\alpha^m = a(1)\dots a(m)$ не является предельно допустимым, поскольку $a(1)$ можно мажорировать при фиксированных значениях остальных $m-1$ букв, полагая $a(1) = 2^{l-1}r - v(1)$.

Если $v(1) \geqslant 2^{l-1}r$, то, очевидно, $a(1) \geqslant 0$.

Таким образом, если слово α^m предельно допустимое, то

$$a(1) \in \begin{cases} [2^{l-1}r - v(1), \delta V - V'], \text{ если } 0 < v(1) < 2^{l-1}r, \\ \{0\} \cup [2^{l-1}r, \delta V - V'], \text{ если } v(1) = 0, \\ [0, \delta V - V'], \text{ если } v(1) \geqslant 2^{l-1}r. \end{cases}$$

Так как слово α^m допустимое, то в каждый момент времени ребро $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$ может принимать нагрузку такую, чтобы суммарный объем не превышал предельно допустимого порога, равного δV, а его ворсинка, бросающая в среду, в этот же момент времени выбрасывает в среду нагрузку f, равную либо $2^{l-1}r$, либо нулю. Учитывая, что в ребре $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$ к этому моменту уже имелся исходный объем загруженности V', а также, что в первый момент ребро $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$ получило не нулевую нагрузку, и заполнение ребра начинается с меньшей по номеру ворсинки, имеющей нулевую нагрузку, то $a(2) \leqslant \delta V - V' - a(1) + 2^{l-1}r$. Определяем $k(2)$ единицей, то есть $k(2) = 1$.

Для установления при $m > 2$ максимальных значений для $a(t)$ в α^m, когда $t \in \{3, \ldots, m\}$, применим индукцию.

При $t = 3$, очевидно, выполнено $a(3) \leqslant \delta V - V' - a(1) - a(2) + 2^{l-1}r + 2^{l-1}rp(2)$, где

$$p(2) = \begin{cases} 0, \text{ если } v(2) = 0, \ a(2) = 0 \text{ и } V(2) \neq 0, \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пусть для $t \leqslant m - 1$ верны верхние границы из условия б).

Следовательно, $a(m-1) \leqslant \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{m-2} a(i) + 2^{l-1}rk(m-1)$, где $k(m-1) = k(m-2) + p(m-2)$,

$$p(m-2) = \begin{cases} 0, \text{ если } v(m-2) = 0, \ a(m-2) = 0 \text{ и } V(m-2) \neq 0, \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что для $t = m$ верна верхняя граница из условия в).

В момент $m - 1$ (после вброса) ребро $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$ содержит вещество массы не более $V' + \sum\limits_{i=1}^{m-2} a(i) - 2^{l-1}rk(m-1) + a(m-1)$, но в этот же момент происходит выброс вещества массы $(2^{l-1}r)p(m-1)$, где

$$p(m-1) = \begin{cases} 0, & \text{если } v(m-1)=0,\ a(m-1)=0 \text{ и } V(m-1)\neq 0, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тем самым получаем $a(m) \leqslant \delta V - V' - (\sum\limits_{i=1}^{m-2} a(i) - 2^{l-1}rk(m-1) + a(m-1) - (2^{l-1}r)p(m-1))$,

$$a(m) \leqslant \delta V - V' - \sum_{i=1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}r(k(m-1)+p(m-1)),$$

$$a(m) \leqslant \delta V - V' - \sum_{i=1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m), \text{ где } k(m) = k(m-1)+p(m-1).$$

Таким образом, получили верхние границы значений из области допустимых значений (ОДЗ) для $a(2),\ldots,a(m)$ слова α^m. Найдем теперь их нижние границы.

Заметим, что значение нижней границы ОДЗ $a(t)$ зависит только от $v(t)$ и $V(t)$.

Если $v(t)=0$ и $V(t)=0$, то $a(t) \geqslant 2^{l-1}r$. В противном случае $a(t) < 2^{l-1}r$ и слово $\alpha^m = a(1)\ldots a(t)\ldots a(m)$ не является предельно допустимым, поскольку $a(t)$ можно мажорировать при сохранении значений остальных $m-1$ букв, полагая $a(t)=2^{l-1}r$.

Если $v(t)=0$ и $V(t)\neq 0$, то для $a(t)$ возможны два случая. Либо можно подать нагрузку, равную нулю, тогда в момент t произойдет переброс с большей по номеру ворсинки на ворсинку с меньшим номером, если последняя имеет нулевую нагрузку, а выброс в среду не произойдет. Либо можно подать $a(t) \geqslant 2^{l-1}r$. В противном случае $a(t) < 2^{l-1}r$ и слово $\alpha^m = a(1)\ldots a(t)\ldots a(m)$ не является предельно допустимым, поскольку $a(t)$ можно мажорировать при сохранении значений остальных $m-1$ букв, полагая $a(t)=2^{l-1}r$.

Если $0 < v(t) < 2^{l-1}r$, то $a(t) \geqslant 2^{l-1}r - v(t)$. В противном случае $a(t) < 2^{l-1}r - v(t)$ и слово $\alpha^m = a(1)\ldots a(t)\ldots a(m)$ не является предельно допустимым, поскольку $a(t)$ можно мажорировать при сохранении значений остальных $m-1$ букв, полагая $a(t) = 2^{l-1}r - v(t)$.

Если $v(t) \geqslant 2^{l-1}r$, то, очевидно, $a(t) \geqslant 0$.

Теперь заметим, что $a(m)$ должно быть максимально возможным при фиксированных $a(1),\ldots,a(m-1)$, то есть $a(m) = \delta V - V' -$

$\sum\limits_{i=1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m)$, иначе слово α^m не было бы предельно допустимым для ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$.

Значит, если $V' \in \{1, 2, \ldots, \delta V\}$ и слово $\alpha^m = a(1), \ldots, a(m)$ предельно допустимое для ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$, то оно обязательно имеет вид, указанный в формулировке леммы 3.

Тем самым мы установили необходимость выполнения условий а), б) и в) для предельной допустимости слова α^m.

Покажем, что всякое слово α^m со свойствами а), б) и в) является предельно допустимым.

Пусть α^m такое слово и $a(1)$ в нем принимает любое значение из а), а при $t \geqslant 2a(t)$ — любое значение из б) и в), соответственно. Из рекуррентного построения α^m по правилам а), б) и в) видно, что слово α^m допустимое.

Пусть $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$ — множество всех таких слов. Покажем, что все они попарно несравнимы. Отсюда, очевидно, будет следовать, что все слова из $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$ предельно допустимые.

Путь слово $\tilde{\alpha}^m = \tilde{a}(1)\tilde{a}(2)\ldots\tilde{a}(m)$ такое, что $\tilde{\alpha}^m \in \mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$ и для некоторого t^*, из $\{1, 2, \ldots, m\}$, выполнено $a(t^*) \neq \tilde{a}(t^*)$.

Если $a(t) \geqslant \tilde{a}(t)$ для всех t из $\{1, \ldots, m-1\} \setminus t^*$, и $a(t^*) > \tilde{a}(t^*)$, при $t^* \in \{1, \ldots, m-1\}$, то $\delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m) < \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{m-1} \tilde{a}(i) + 2^{l-1}rk(m)$. Отсюда $a(m) < \tilde{a}(m)$.

Если $a(t) \geqslant \tilde{a}(t)$ для всех t из $\{2, \ldots, m\} \setminus t^*$, и $a(t^*) > \tilde{a}(t^*)$, при $t^* \in \{2, \ldots, m\}$, то будет выполнена такая система соотношений

$$\begin{cases} \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1}rk(m) \geqslant \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{m-1} \tilde{a}(i) + 2^{l-1}rk(m), \\ a(t) \geqslant \tilde{a}(t) \text{ при } t \in \{2, \ldots, m\} \setminus t^*, \\ a(t^*) > \tilde{a}(t^*) \text{ при } t^* \in \{2, \ldots, m\}. \end{cases}$$

Значит, $a(1) + \sum\limits_{i=2}^{m-1} a(i) \leqslant \tilde{a}(1) + \sum\limits_{i=2}^{m-1} \tilde{a}(i) < \tilde{a}(1) + \sum\limits_{i=2}^{m-1} \tilde{a}(i)$. Отсюда $a(1) < \tilde{a}(1)$.

Если $a(t) \geqslant \tilde{a}(t)$ для всех t из $\{1, \ldots, t'-1, t'+1, \ldots, m\} \setminus t^*$, и любого t' из $\{2, \ldots, m-1\}$, $t^* \in \{1, \ldots, t'-1, t'+1, \ldots, m\}$, то будет выполнена такая система соотношений

$$\begin{cases} \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t'-1} a(i) - a(t') - \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} a(i) + 2^{l-1} rk(m) \geqslant \\ \qquad\qquad \geqslant \delta V - V' - \sum\limits_{i=1}^{t'-1} \tilde{a}(i) - \tilde{a}(t') - \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} \tilde{a}(i) + 2^{l-1} rk(m), \\ a(t) \geqslant \tilde{a}(t) \text{ при } t \in \{1, \ldots, t'-1, t'+1, \ldots, m\} \setminus t^*, \\ a(t^*) > \tilde{a}(t^*) \text{ при } t^* \in \{1, \ldots, t'-1, t'+1, \ldots, m\}. \end{cases}$$

Значит, $\sum\limits_{i=1}^{t'-1} a(i) + a(t') + \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} a(i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{t'-1} \tilde{a}(i) + \tilde{a}(t') + \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} \tilde{a}(i) < \sum\limits_{i=1}^{t'-1} a(i) + \tilde{a}(t') + \sum\limits_{i=t'+1}^{m-1} a(i)$. Отсюда $a(t') < \tilde{a}(t')$.

Таким образом, если какие-нибудь $(m-1)$ значений букв слова α^m не меньше значений соответствующих букв слова $\tilde{\alpha}^m$, и среди них существует хотя бы одна буква слова α^m, значение которой строго больше значения соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$, то значение оставшейся буквы слова α^m будет меньше значения соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$.

В силу симметрии этих слов, если какие-нибудь $(m-1)$ значений букв слова α^m не больше значений соответствующих букв слова $\tilde{\alpha}^m$, и среди них существует хотя бы одна буква слова α^m, значение которой строго меньше значения соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$, то значение оставшейся буквы слова α^m будет больше значения соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$.

Очевидно, если какие-нибудь $(m-1)$ значений букв слова α^m равны значениям соответствующих букв слова α^m, то и значение оставшейся буквы слова α^m будет равно значению соответствующей буквы слова $\tilde{\alpha}^m$.

Значит, слова α^m и $\tilde{\alpha}^m$ либо несравнимы, либо совпадают.

Следовательно, описаны все предельно допустимые слова длины m, $m > 1$, для ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. По лемме 1 все утверждения для ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$ остаются верными и для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$. Из леммы 2 и леммы 3 вытекает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. По лемме 1 все утверждения для ребра $R(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, nl; V')$ остаются верными и для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$.

Из определения предельных префиксов и суффиксов следует, что они являются предельно допустимыми словами. Из определения их минимальности следует, что и у минимальных предельных префиксов, и у минимальных предельных суффиксов только последняя, и, может быть, первая буквы являются максимально возможными, а остальные буквы таковыми не являются. Это значит, что все буквы, начиная со второй и заканчивая предпоследней, не должны достигать своих максимальных значений. Леммы 2 и 3 определяют вид всех предельных префиксов и суффиксов заданной длины, а чтобы из них выделить только минимальные предельные префиксы и суффиксы, надо вычесть единицу из максимальной границы промежутка изменения значений букв, начиная со второй и заканчивая предпоследней буквой. Таким образом получим вид минимальных предельных префиксов и суффиксов указанной длины. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.

а) Покажем, что любое квазислово из множества $\Im$ будет предельно допустимым для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$.

Из определения минимального предельного префикса следует, что он является предельно допустимым словом. Из определений минимального предельного суффикса и множества $\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r)$ следует, что любая конечная (для слов) или счетная (для сверхслов) конкатенация таких суффиксов является предельно допустимым словом или сверхсловом, соответственно. Следовательно, конкатенация слов из множества $\bar{P}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, V')$ и квазислов из множества $(\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r) \cdot \{e, 2^{l-1}r\})^* \cup (\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r) \cdot \{e, 2^{l-1}r\})^\omega$ является предельно допустимым квазисловом. А конкатенация множеств $\bar{P}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, V')\cdot (\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r) \cdot \{e, 2^{l-1}r\})^* \cup (\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r) \cdot \{e, 2^{l-1}r\})^\omega$, очевидно, не нарушает свойства предельности и допустимости слова.

Таким образом, если квазислово принадлежит множеству $\Im$, то оно обязательно является предельно допустимым для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$.

б) Покажем, что любое предельно допустимое для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$ квазислово принадлежит множеству $\Im$.

Заметим, что у любого предельно допустимого слова конечное множество максимально возможных букв, а у любого предельно допустимого сверхслова — счетное множество максимально возможных букв. Таким образом, у предельно допустимого квазислова всегда можно однозначно выделить минимальный предельный префикс из множества $\bar{P}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, V')$, а также конечную (для слов) или счетную (для сверхслов) конкатенацию минимальных предельных суффиксов из множества $(\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r) \cdot \{e, 2^{l-1}r\})^* \cup (\bar{S}(2^{l-1}b, 2^{l-1}r, V, \delta, \delta V - 2^{l-1}r) \cdot \{e, 2^{l-1}r\})^{\omega}$. Так как длина минимального допустимого суффикса больше единицы, то у предельно допустимых слов может остаться одна буква в конце слова, не входящая в последний минимальный допустимый суффикс. Но тогда значение этой буквы должно быть $2^{l-1}r$. Так как перед этой буквой стоит максимально возможная буква, то к следующему моменту объем I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$ будет равен $\delta V - 2^{l-1}r$, а, следовательно, сможем забросить вещество массой не более $2^{l-1}r$. Но так как рассматриваемое слово является предельно допустимым, то его последняя координата должна быть максимально возможной, а именно, $2^{l-1}r$.

Таким образом, если квазислово является предельно допустимым для I-дерева $D_l^{-1}(b, r, n; V')$, то оно обязательно принадлежит множеству $\Im$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 3. Пусть $\alpha^{\omega} = a(1)a(2)\ldots a(t)\ldots$ — сверхслово из $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$. Покажем, что тогда либо $\alpha^{\omega} \in \mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$, либо существует β^{ω} из $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$ такое, что $\alpha^{\omega} \leqslant \beta^{\omega}$.

Если $a(t)$ не является максимально возможной, то заменяем ее на $\tilde{a}(t)$, где $\tilde{a}(t)$ — максимально возможная буква, при этом остальные буквы фиксированные. Таким образом получили сверхслово $a(1)a(2)\ldots a(t-1)\tilde{a}(t)a(t+1)\ldots$ Если это сверхслово из $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$, то переходим к следующей букве $a(t+1)$ и проделываем с ней все то же самое. Если полученное сверхслово не из $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$, то снова заменяем $\tilde{a}(t)$ на $a(t)$ и переходим к следующей букве. Такой алгоритм применяем к каждой букве сверхслова α^{ω}. В итоге получим, что если ни одну букву сверхслова α^ω не удалось заменить на максимально возможную, то сверхслово $\alpha^\omega \in \mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$ по определению предельно допустимого сверхслова. А если в α^ω заменили некоторые буквы на максимально возможные (можем изменять бесконечное число букв на максимально возможные), и при этом полученное сверхслово $\tilde{\alpha}^\omega$ осталось допустимым, то по построению оно является предельно допустимым. Значит, мы построили такое сверхслово $\tilde{\alpha}^\omega$, что $\alpha^\omega < \tilde{\alpha}^\omega$ и $\tilde{\alpha}^\omega \in \mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, \omega)$. Заметим, что сверхслово $\tilde{\alpha}^\omega$ не может оказаться недопустимым, поскольку тогда существовала бы буква, которая была бы больше своего максимально возможного значения, но это невозможно по построению. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 4.

а) Сначала рассмотрим случай определения слова α^m на принадлежность множеству $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$.

Заметим, что для определения слова α^m на принадлежность множеству $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$ достаточно вычислить только верхнюю границу интервала. Такое вычисление происходит за один шаг.

Если значение текущей буквы больше значения верхней границы интервала, то слово α^m уже не является допустимым, то есть не принадлежит множеству $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$. Если значение текущей буквы не превосходит верхней границы своего интервала, то это слово является претендентом на принадлежность этому множеству. Это сравнение выполняется за один шаг.

Переход к следующей букве также занимает один шаг. Заметим, что для проверки $a(m)$ нам потребуется только два шага, так как переход к следующей букве не нужен. Заметим, что для определения принадлежности допустимого слова множеству $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$ необходимо «обработать» все буквы слова. Следовательно, минимально достаточное число шагов, необходимых для определения принадлежности слова α^m множеству $\mathbf{Q}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$, равно $3(m-1)+2$. Таким образом, $L_{\mathbf{Q}}(m, D_l^{-1}(b, r, n; V')) = 3m - 1$.

б) Теперь рассмотрим случай определения слова α^m на принадлежность множеству $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$.

В этом случае нам необходимо вычислять обе границы интервала. Эти вычисления происходят за 2 шага.

Если значение текущей буквы больше значения верхней границы интервала, то слово α^m уже не является предельно допустимым, то есть не принадлежит множеству $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$. Если значение текущей буквы меньше значения нижней границы интервала, то слово α^m уже не является предельно допустимым, то есть не принадлежит этому множеству. Если значение текущей буквы принадлежит своему интервалу, то слово α^m является претендентом на принадлежность множеству $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$. Эти сравнения происходят за 2 шага.

Переход к следующей букве занимает один шаг. Заметим, что для $a(m)$ потребуется вычислить только верхнюю границу и проверить $a(m)$ на равенство верхней границы, так как последняя буква в предельно допустимом слове должна быть максимально возможной. Значит, для проверки $a(m)$ нам потребуется только два шага. Заметим, что для определения принадлежности предельно допустимого слова множеству $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$ необходимо «обработать» все буквы слова. Следовательно, минимально достаточное число шагов, необходимых для определения принадлежности слова α^m множеству $\mathbf{T}(\delta V, V', 2^{l-1}r, m)$, равно $5(m-1)+2$. Таким образом, $L_{\mathbf{T}}(m, D_l^{-1}(b, r, n; V')) = 5m - 3$. Теорема доказана.

В заключение автор благодарит академиков В.Б. Кудрявцева и А.Г. Чучалина за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

[1] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2002.

[2] Гераськина Ю.Г. Модель самоочищения легочных структур // Интеллектуальные системы. Т 7. Вып. 1–4. 2002–2003. С. 41–54.