О линейных метрических алгоритмах распознавания образов

Азар Шайеб

В работе рассматривается подход к задаче распознавания образов, основанный на идее потенциальных функций [4].

В работе даются понятия метрического, линейного метрического и метрического линейного типа алгоритмов; изучаются свойства этих понятий и их взаимосвязь. Доказана теорема о совпадении при определенных условиях понятий линейного метрического и метрического линейного типа алгоритмов.

Введение

В многообразии алгоритмов распознавания образов выделяются метрические алгоритмы такого рода. Они возникли одними из первых и продолжают играть важную роль в теории распознавания.

В предлагаемой работе рассматривается два подхода к понятию «линейности» метрического алгоритма и изучается взаимосвязь этих подходов. Показано, что при некоторых условиях эти понятия совпадают, однако существуют ситуации, в которых они приводят к различным результатам.

1. Основные понятия и результаты

Рассматривается следующий вариант постановки задачи классификации с эталонами [1]. Пусть имеются два класса объектов или явлений K_1 и K_2, и некоторые представители (эталоны) $M_1 \subseteq K_1$ и $M_2 \subseteq K_2$ этих классов, которые описываются рядом числовых признаков, номера которых образуют множество $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть D

обозначает множество $\{-1,1\}$, а $\bar{D}$ есть сегмент числовой оси $[-1,1]$. Тогда описание объекта доставляют векторы $\tilde{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \bar{D}$ определяет меру выраженности признака i у объекта A, $1 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, информация о классах K_1 и K_2 представляется множествами $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ описаний эталонных объектов из M_1 и M_2, соответственно. Предполагается, что в качестве эталонов выбираются только такие, для которых справедливо $\tilde{M}_1 \subseteq D^n$ и $\tilde{M}_2 \subseteq D^n$, где D^n — множество вершин n-мерного куба $\bar{D}^n$, то есть наличие (отсутствие) признака кодируется числом 1 (-1). Исходя из имеющейся информации, требуется указать решающее правило (алгоритм), которое по описанию $\bar{x} \in \bar{D}^n$ произвольного объекта x правильно относило бы этот объект к тому из классов, который его содержит.

Для решения поставленной задачи предлагается и изучается следующая модель алгоритмов, основанная на известной идее потенциальных функций [4]. Пусть $\Phi_{\tilde{\alpha}}(\bar{x})$ обозначает потенциал поля, создаваемого вершиной $\tilde{\alpha}$ в точке $\bar{x}$ пространства $\bar{D}^n$. Будем предполагать, что потенциал $\Phi_{\tilde{\alpha}}(\bar{x})$ является

1) центрально-симметричным (относительно точки $\tilde{\alpha}$), то есть
$$\Phi_{\tilde{\alpha}}(\bar{x}) = f_\Phi(\rho(\tilde{\alpha}, \bar{x})),$$
где f_Φ — некоторая действительная функция (в качестве функции ρ далее будет рассматриваться метрика ρ_H, порожденная нормой
$\|\bar{x}\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ и полуметрика ρ_E^n, где ρ_E — евклидова метрика);
2) аддитивным, то есть потенциал $\Phi_M(\bar{x})$, создаваемый в точке $\bar{x}$ множеством вершин M, вычисляется по формуле: $\Phi_M(\bar{x}) = \sum\limits_{\tilde{\alpha} \in M} \Phi_{\tilde{\alpha}}(\bar{x})$;
3) убывающим, то есть потенциальная функция f_Φ из пункта 1 является монотонно убывающей.

Потенциал Φ такого типа будем называть метрическим. Каждый такой потенциал определяет метрический алгоритм распознавания G_Φ со следующим решающим правилом R_0:

1) объект x относится к классу K_1 (K_2), если

$$R_0(\bar{x}) = \frac{1}{|M_1|}\Phi_{M_1}(\bar{x}) - \frac{1}{|M_2|}\Phi_{M_2}(\bar{x}) > 0 \quad (R_0(\bar{x}) < 0); \tag{1}$$

2) в случае $R_0(\bar{x}) = 0$ решение не принимается.

Отметим, что многие алгоритмы, известные и в практике (например, алгоритм голосования по всем выборкам длины k [1]), и в теории (например, алгоритмы, описываемые в рамках Г-моделей [2]) могут быть описаны в терминах подходяще выбранных метрических потенциалов и соответствующих правил.

Обозначим через A класс всех метрических алгоритмов распознавания. Пусть $G_1 \in A$, $G_2 \in A$ и $R_0^{(1)}$, $R_0^{(2)}$ обозначают решающие правила алгоритмов G_1 и G_2, определяемые в соответствии с соотношением (1).

Будем говорить, что алгоритмы G_1 и G_2 эквивалентны, если при $\bar{x} \in \bar{D}^n \quad \operatorname{sign}(R_0^{(1)}(\bar{x})) = \operatorname{sign}(R_0^{(2)}(\bar{x}))$, то есть для любого $\bar{x} \in \bar{D}^n$ алгоритмы G_1 и G_2 «работают» одинаково (при фиксированных эталонных множествах).

Укажем одно простое преобразование потенциальных функций, сохраняющее введенное выше отношение эквивалентности.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две функции действительного переменного. Скажем, что они подобны, если существуют такие числа a, b из $\mathbb{R}$, причем $a > 0$, что для всех x из $\mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$g(x) = a \cdot f(x) + b.$$

Замечание 1. Очевидно, что любые две убывающие линейные функции подобны.

Два метрических потенциала Φ_1 и Φ_2 назовем подобными, если соответствующие им потенциальные функции f_{Φ_1} и f_{Φ_2} подобны.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если метрические потенциалы Φ_1 и Φ_2 подобны, то алгоритмы распознавания G_{Φ_1} и G_{Φ_2} — эквивалентны.*

В общем случае уравнение $R_0(\bar{x}) = 0$ определяет в гиперкубе $\bar{D}^n$ некоторую гиперповерхность, которую будем называть разделяющей.

Выясним вид разделяющих гиперповерхностей для некоторого подкласса метрических алгоритмов. Более точно, нас будут интересовать случаи, когда разделяющая гиперповерхность оказывается гиперплоскостью. Сформулируем предварительно вспомогательные леммы.

Для потенциальной функции $f_\Phi(x) = -x$ метрический алгоритм G_Φ будем обозначать в случае $\rho = \rho_H$ через H, а в случае $\rho = \rho_E^2$ через E.

Лемма 2. *Алгоритм H строит в качестве разделяющей гиперповерхности гиперплоскость.*

В случае алгоритма E имеет место аналогичное утверждение.

Лемма 3. *Алгоритм E строит в качестве разделяющей гиперповерхности гиперплоскость.*

Метрический алгоритм распознавания G_Φ, потенциал Φ которого определяется посредством линейной потенциальной функции f_Φ, будем называть линейным метрическим алгоритмом.

Обозначим через $\mathcal{L}$ подкласс линейных метрических алгоритмов.

Алгоритмы H и E, как уже отмечалось выше, для любых двух множеств M_1 и M_2 вершин куба $\bar{D}^n$ в качестве разделяющей гиперповерхности строят гиперплоскость (в случае, когда характеризационный вектор $\bar{q}$ для множеств M_1 и M_2 совпадает с нулевым вектором, гиперплоскость вырождается во все пространство).

В общем случае для произвольных метрических алгоритмов распознавания (без учета возможного вырождения гиперплоскости во все пространство) метрический алгоритм, определяющий для любых двух множеств M_1 и M_2 вершин куба D^n в качестве разделяющей гиперповерхности гиперплоскость, будем называть метрическим алгоритмом линейного типа.

Из лемм 2 и 3 и замечания 1 вытекает такое утверждение.

Теорема 1. *Линейные метрические алгоритмы распознавания являются метрическими алгоритмами линейного типа.*

Оказывается, между двумя введенными здесь понятиями линейности метрического алгоритма (по форме и содержанию его работы) существует более непосредственная связь: в классе метрических алгоритмов с дважды дифференцируемыми потенциальными функциями теорема 1 допускает обращение.

Теорема 2. *При $n \geqslant 3$ любой метрический алгоритм линейного типа с дважды дифференцируемой потенциальной функцией является линейным метрическим алгоритмом.*

Отметим, что в случае $n = 2$ можно указать такую нелинейную (и дважды дифференцируемую) функцию f_Φ, для которой метрический алгоритм G_Φ будет алгоритмом распознавания линейного типа. Например, метрический алгоритм G_Φ с потенциалом Φ, определяемым потенциальной функцией $f(x) = (2 - x)^3$ (в качестве метрики ρ используется метрика пространства ρ_H), будет для любых множеств вершин M_1 и M_2 квадрата $\bar{D}^2$ определять (в невырожденном случае) в качестве разделяющей линии некоторую прямую. Так, например, для множеств $M_1 = \{(-1, 1)\}$ и $M_2 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ уравнение разделяющей линии $(x, y) \in \bar{D}^2$:

$$\Phi_{M_1}((x, y)) = \frac{1}{2}\Phi_{M_2}((x, y))$$
$$2f(\rho((x, y), (-1, 1))) = f(\rho((x, y), (1, 1))) + f(\rho((x, y), (1, -1)))$$
$$2(-x + y)^3 = (x + y)^3 + (x - y)^3$$
$$3(y - x)^3 = (x + y)^3$$
$$\sqrt[3]{3}(y - x) = x + y$$

будет уравнением прямой линии $y = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}-1}x$ (так что этот алгоритм линейного типа G_Φ не только не является линейным алгоритмом, но и не эквивалентен никакому линейному алгоритму).

Замечание 3. Вместо свойства 2 метрического потенциала Φ может рассматриваться соотношение

$$2'.\Phi_M(\bar{x}) = f_\Phi\left(\sum_{\bar{\alpha} \in M} \rho(\bar{\alpha}, \bar{x})\right),$$

где в качестве потенциальных функций $f_\Phi(x)$ выбираются функции $e^{-\alpha x}$, $\frac{c_1}{c_2x+c_3}$ и т.д. [2]. Кроме того, вместо правила R_0 может использоваться решающее правило R_1, определяющее разделяющую гиперповерхность уравнением $R_1(\bar{x}) = \Phi_{M_1}(\bar{x}) - \Phi_{M_2}(\bar{x}) = 0$.

Опираясь на доказательство теоремы 1, нетрудно показать, что в случае произвольной (строго) убывающей функции f_Φ, алгоритм распознавания, определяемый потенциалом со свойствами $1, 2', 3$ и правилом R_0, является алгоритмом линейного типа и по существу сводится к алгоритму из класса $\mathcal{L}$; в случае же правила R_1 разделяющая гиперповерхность будет в общем случае гиперсферической (для указанных выше функций ρ).

2. Доказательство основных утверждений

Приведем теперь доказательства сформулированных в предыдущем разделе утверждений.

Доказательство Леммы 1.

Из подобия Φ_1 и Φ_2 для любого $\bar{x} \in \bar{D}^n$ получим

$$R_0(\bar{x}) = \frac{1}{m_1}\Phi_{1,M_1}(\bar{x}) - \frac{1}{m_2}\Phi_{1,M_2}(\bar{x}) = \frac{1}{m_1}\sum_{\tilde{\alpha}\in M_1}\Phi_{1,\tilde{\alpha}}(\bar{x}) -$$

$$-\frac{1}{m_2}\sum_{\tilde{\beta}\in M_2}\Phi_{1,\tilde{\beta}}(\bar{x}) = \frac{1}{m_1}\sum_{\tilde{\alpha}\in M_1} f_{\Phi_1}(\rho(\tilde{\alpha},\bar{x})) - \frac{1}{m_2}\sum_{\tilde{\beta}\in M_2} f_{\Phi_1}(\rho(\tilde{\beta},\bar{x})) =$$

(при некоторых $a > 0$ и b из $\mathbb{R}$)

$$= \frac{1}{m_1}\sum_{\tilde{\alpha}\in M_1}\Big[a f_{\Phi_2}(\rho(\tilde{\alpha},\bar{x})) + b\Big] - \frac{1}{m_2}\sum_{\tilde{\beta}\in M_2}\Big[a f_{\Phi_2}(\rho(\tilde{\beta},\bar{x})) + b\Big] =$$

$$= a\left[\frac{1}{m_1}\sum_{\tilde{\alpha}\in M_1} f_{\Phi_2}(\rho(\tilde{\alpha},\bar{x})) + b - \frac{1}{m_2}\sum_{\tilde{\beta}\in M_2} f_{\Phi_2}(\rho(\tilde{\beta},\bar{x})) - b\right] =$$

$$= a\left(\frac{1}{m_1}\sum_{\tilde{\alpha}\in M_1}\Phi_{2,\tilde{\alpha}}(\bar{x}) - \frac{1}{m_2}\sum_{\tilde{\beta}\in M_2}\Phi_{2,\tilde{\beta}}(\bar{x})\right) =$$

$$= a\left(\frac{1}{m_1}\Phi_{2,M_1}(\bar{x}) - \frac{1}{m_2}\Phi_{2,M_2}(\bar{x})\right) = R_0(\bar{x}).$$

В этой цепи второе и предпоследнее выражения соответствуют последовательно алгоритмам G_{Φ_1} и G_{Φ_2}.

Из того, что $a > 0$ и из определения следует, что алгоритмы эквивалентны.

Лемма 1 доказана.

Доказательство Леммы 2.

Действительно, пусть M_1 и M_2 — произвольные множества вершин куба $\bar{D}^n$, $M_1 = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m_1}\} \subseteq \bar{D}^n$, $M_2 = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{m_2}\} \subseteq \bar{D}^n$, и $\bar{x}$ — произвольная точка куба $\bar{D}^n$.

Имеем

$$\rho(\bar{x}, M_1) = \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1}\rho_H(\bar{x}, \bar{a}_i) =$$

$$= \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{n}|x_j - a_{ij}| = \frac{1}{m_1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_1}|x_j - a_{ij}| =$$

$$= \frac{1}{m_1}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1,(a_{ij}=1)}^{m_1}(1 - x_j) + \sum_{i=1,(a_{ij}=-1)}^{m_1}(1 + x_j)\right) =$$

$$= \frac{1}{m_1}\sum_{j=1}^{n}\left[m_1\frac{p_j + 1}{2}(1 - x_j) + m_1\frac{1 - p_j}{2}(1 + x_j)\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[1 - x_j\left(\frac{1 + p_j}{2} - \frac{1 - p_j}{2}\right)\right] = \sum_{j=1}^{n}(1 - x_j, p_j) = n - (\bar{x}, \bar{p}_1),$$

где $\bar{p}_1 = (p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{m_1}\sum\limits_{i=1}^{m_1}\bar{a}_i$ — информационный вектор (центр тяжести) множества M_1.

Аналогично, $\rho(\bar{x}, M_2) = n - (\bar{x}, \bar{p}_2)$, где $\bar{p}_2 = \frac{1}{m_2}\sum\limits_{i=1}^{m_2} \bar{b}_i$ — информационный вектор (центр тяжести) множества M_2.

Теперь видно, что $R_0(\bar{x}) = \frac{1}{m_1}\Phi_{M_1}(\bar{x}) - \frac{1}{m_2}\Phi_{M_2}(\bar{x}) = \rho(\bar{x}, M_2) - \rho(\bar{x}, M_1) = = n - (\bar{x}, \bar{p}_2) - n + (\bar{x}, \bar{p}_1) = (\bar{x}, \bar{p}_1 - \bar{p}_2) = 2(\bar{x}, \bar{q})$, где $q = \frac{1}{2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ — характеризационный вектор для множеств M_1 и M_2. Отсюда следует, что алгоритм H строит гиперплоскость $(\bar{x}, \bar{q}) = 0$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство Леммы 3.

Пусть $M_1 = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m_1}\}$, $M_2 = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{m_2}\}$ — два произвольных множества из $\bar{D}^n$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная точка из $\bar{D}^n$. Вычислим среднее расстояние от точки $\bar{x}$ до множества M_1 (будем использовать при этом обозначения, введенные при доказательстве леммы 2).

$$\rho(\bar{x}, M_1) = \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1} \rho_E^2(\bar{a}_i, \bar{x}) = \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1} \|\bar{a}_i - \bar{x}\|^2 =$$

$$= \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1} \|\bar{a}_i - \bar{p}_1 + \bar{p}_1 - \bar{x}\|^2 = \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1} (\bar{a}_i - \bar{p}_1 + \bar{p}_1 - \bar{x}, \bar{a}_i - \bar{p}_1 + \bar{p}_1 - \bar{x}) =$$

$$= \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1} [(\bar{a}_i - \bar{p}_1, \bar{a}_i - \bar{p}_1) + 2(\bar{p}_1 - \bar{x}, \bar{a}_i - \bar{p}_1) + (\bar{p}_1 - \bar{x}, \bar{p}_1 - \bar{x})] =$$

$$= \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1}(\bar{a}_i, \bar{a}_i) - \frac{2}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1}(\bar{a}_i, \bar{p}_1) + (\bar{p}_1, \bar{p}_1) + 2\left(\bar{p}_1 - \bar{x}, \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1}(\bar{a}_i, \bar{p}_1)\right) +$$

$$+ (\bar{p}_1, \bar{p}_1) - 2(\bar{p}_1, \bar{x}) + (\bar{x}, \bar{x}) = (\text{так как } \tfrac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1} \bar{a}_i = \bar{p}_1) =$$

$$= \frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1} \|\bar{a}_i\|^2 - 2(\bar{p}_1, \bar{p}_1) + (\bar{p}_1, \bar{p}_1) + (\bar{p}_1, \bar{p}_1) - 2(\bar{p}_1, \bar{x}) + \|x\|^2 =$$

$$= (\text{так как } \|\bar{a}_i\|^2 = n, \quad i = 1, \ldots, m_1) = n - 2(\bar{p}_1, \bar{x}) + \|x\|^2.$$

Аналогично, $\rho(\bar{x}, M_2) = n - 2(\bar{p}_2, \bar{x}) + \|x\|^2$.

Решающее правило алгоритма E определяется в соответствии со знаком выражения: $R_0(\bar{x}) = \frac{1}{m_1}\Phi_{M_1}(\bar{x}) - \frac{1}{m_2}\Phi_{M_2}(\bar{x}) = \rho(\bar{x}, M_2) -$

$\rho(\bar{x}, M_1) = n - 2(\bar{p}_2, \bar{x}) + \|x\|^2 - n + 2(\bar{p}_1, \bar{x}) - \|x\|^2 = 4(\bar{q}, \bar{x})$, а это определяет разделяющую гиперплоскость с уравнением

$$(\bar{q}, \bar{x}) = 0.$$

Лемма 3 доказана.

Замечание 2. Из доказательства лемм 2 и 3 непосредственно видно, что алгоритмы распознавания H и E эквивалентны.

Доказательство Теоремы 2.

Пусть G_Φ — метрический алгоритм линейного типа, метрический потенциал Φ которого определяется посредством дважды дифференцируемой потенциальной функции f. Так как алгоритм G_Φ строит в качестве разделяющей гиперповерхности для любых двух множеств M_1 и M_2 гиперплоскость, то, в частности, для множеств $M_1 = \{\bar{a}, \bar{b}\}$, $M_2 = \{\bar{c}\}$, где $\bar{a} = (-1, 1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-2})$, $\bar{b} = (1, -1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-2})$, $\bar{c} = (1, 1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-2})$, алгоритм G_Φ строит гиперплоскость π_1, уравнение которой определяется в соответствии с решающим правилом алгоритма G_Φ

$$\Phi_{\bar{a}}(\bar{x}) + \Phi_{\bar{b}}(\bar{x}) - 2\Phi_{\bar{c}}(\bar{x}) = 0.$$

Рассмотрим сечение куба $\bar{D}^n$ двумерной плоскостью $\pi^{(2)}$, определяемой соотношениями $x_3 = t-1, x_4 = t-1, \ldots, x_n = t-1$, где $t \in [0, 2]$ — некоторый параметр. Введем в плоскости $\pi^{(2)}$ декартову систему координат Oxy так, что точка $\bar{x} = (x, y, t-1, \ldots, t-1)$ плоскости $\pi^{(2)}$ имеет в этой системе координаты (x, y). Легко проверяется, что точка $(0, 0)$ плоскости $\pi^{(2)}$ принадлежит гиперплоскости π_1, а, например, точка $(1, 1)$ ей не принадлежит. Отсюда следует, что двумерная плоскость $\pi^{(2)}$ и гиперплоскость π_1 пересекаются по некоторой прямой l (проходящей через начало системы координат, введенной в плоскости $\pi^{(2)}$). рассмотрим теперь два случая.

Случай I. $\rho = \rho_E^2$.

В этом случае область определения потенциальной функции f есть отрезок $[0, 4n]$. Покажем вначале, что на отрезке $[2, 4n-6], (n \geqslant 3)$, функция f является линейной функцией.

Пусть это не так. Тогда в некоторой точке $T \in [2, 4n-6]$ имеем $f''(T) \neq 0$. Заметим, что тогда и $f'(T) \neq 0$ (так как f — убывающая функция). Пусть $\bar{x} = (x, y)$ — произвольная точка плоскости $\pi^{(2)}$ (в первоначальной системе координат имеем $\bar{x} = (x, y, t-1, \ldots, t-1)$, где параметр t выбран удовлетворяющим равенству $2+(n-2)t^2 = T$).

Имеем:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \rho_E^2(\bar{a}, \bar{x}) = (x+1)^2 + (y-1)^2 + (n-2)t^2 \\ B(x, y) &= \rho_E^2(\bar{b}, \bar{x}) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (n-2)t^2 \\ C(x, y) &= \rho_E^2(\bar{c}, \bar{x}) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (n-2)t^2 \end{aligned}$$

Отметим, что $A(0,0) = B(0,0) = C(0,0) = T$.

Уравнение прямой линии l (возникающей в пересечении плоскости $\pi^{(2)}$ и гиперплоскости π_1) будет следующим:

$$\Phi_{\bar{a}}(\bar{x}) + \Phi_{\bar{b}}(\bar{x}) - 2\Phi_{\bar{c}}(\bar{x}) = 0$$

или

$$f(A(x, y)) + f(B(x, y)) - 2f(C(x, y)) = 0$$

или, если обозначить левую часть последнего неравенства через $F(x, y)$,

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Заметим, что $F(0,0) = 0$.

Проведем вспомогательные вычисления частных производных:

$$\begin{array}{llll} A'_x = 2(x+1), & A'_x(0,0) = 2, & A'_y = 2(y-1), & A'_y(0,0) = -2 \\ B'_x = 2(x-1), & B'_x(0,0) = -2, & B'_y = 2(y+1), & B'_y(0,0) = 2 \\ C'_x = 2(x-1), & C'_x(0,0) = -2, & C'_y = 2(y-1), & C'_y(0,0) = -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &F'_x(0,0) = \\ &= f'(A(0,0)) \cdot A'_x(0,0) + f'(B(0,0)) \cdot B'_x(0,0) - 2f'(C(0,0)) \cdot C'_x(0,0) = \\ &\qquad = f'(T) \cdot 2 + f'(T) \cdot (-2) - 2f'(T) \cdot (-2) = 4f'(T) \end{aligned}$$

$$F'_y(0,0) =$$
$$= f'(A(0,0)) \cdot A'_y(0,0) + f'(B(0,0)) \cdot B'_y(0,0) - 2f'(C(0,0)) \cdot C'_y(0,0) =$$
$$= f'(T) \cdot (-2) + f'(T) \cdot 2 - 2f'(T) \cdot (-2) = 4f'(T)$$

Отсюда следует, что по теореме о неявной функции [3] соотношение (2) определяет в окрестности точки $(0,0)$ функцию $y = y(x)$, производная которой в точке $x = 0$ вычисляется следующим образом:

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0,0)}{F'_y(0,0)} = -1.$$

Вычислим вторые частные производные:

$$A''_{xx} = 2; \quad B''_{xx} = 2; \quad C''_{xx} = 2;$$
$$A''_{yy} = 2; \quad B''_{yy} = 2; \quad C''_{yy} = 2;$$

$$F''_{xx}(0,0) = f''(T) \cdot 4 + f'(T) \cdot 2 + f''(T) \cdot 4 + f'(T) \cdot 2-$$
$$- 2f''(T) \cdot 4 - 2f'(T) \cdot 2 = 0;$$

$$F''_{yy}(0,0) = f''(T) \cdot 4 + f'(T) \cdot 2 + f''(T) \cdot 4 + f'(T) \cdot 2-$$
$$- 2f''(T) \cdot 4 - 2f'(T) \cdot 2 = 0;$$

$$F''_{xy}(0,0) = f''(T) \cdot (-4) + f''(T) \cdot (-4) - 2f''(T) \cdot 4 = -16f''(T) \neq 0.$$

Имеем теперь для значения второй производной функции в точке $x = 0$:

$$y''(0) = -\frac{F''_{xx}(0,0) + 2y'(0)F''_{xy}(0,0) + y'^2(0)F''_{yy}(0,0)}{F'_y(0,0)} =$$
$$= -\frac{-32f''(T)}{4f'(T)} = -8\frac{f''(T)}{f'(T)} \neq 0$$

(по выбору T), что противоречит тому, что $y = y(x)$ есть уравнение в системе координат плоскости $\pi^{(2)}$ (по крайней мере в окрестности начала координат) прямой линии l.

Итак, на участке $[2, 4n-6]$ из области определения потенциальная функция f линейна. Обозначим ее продолжение по линейности на всю область определения $[0, 4n]$ через $\tilde{f}$ и покажем, что функции f и $\tilde{f}$ совпадают на всей области определения.

Рассмотрим следующие два множества вершин куба $\bar{D}^n$:

$$M_1 = \{\bar{a}, \bar{b}\}, \quad M_2 = \{\bar{c}, \bar{d}\},$$

где

$$a = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}), \quad b = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-2}, -1, -1),$$
$$c = (-1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}), \quad d = (1, -1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-2}), n \geqslant 3.$$

Так как по условию алгоритм G_Φ — линейного типа, то для множеств M_1 и M_2 он строит (невырожденную) гиперплоскость π'.

Обозначим через $\tilde{G}_{\tilde{\Phi}}$ линейный метрический алгоритм, потенциал $\tilde{\Phi}$ которого определяется посредством потенциальной функции $\tilde{f}$, введенной выше. Согласно теореме 1, он также строит для множеств M_1 и M_2 некоторую (невырожденную) гиперплоскость π''.

Легко видеть, что гиперплоскости π' и π'' совпадают. Действительно, по доказанному потенциальные функции f и $\tilde{f}$ совпадают на отрезке $[2, 4n-6]$, следовательно, в частности, в некоторой окрестности начала координат совпадают создаваемые множествами M_1 и M_2 потенциалы, то есть $\Phi_{M_1} = \tilde{\Phi}_{M_1}$ и $\Phi_{M_2} = \tilde{\Phi}_{M_2}$, и поэтому в этой же окрестности начала координат должны совпадать и гиперплоскости π' и π''. Отсюда следует совпадение гиперплоскостей (а также и решающих правил алгоритмов G_Φ и $\tilde{G}_{\tilde{\Phi}}$). Таким образом, алгоритмы G_Φ и $\tilde{G}_{\tilde{\Phi}}$ работают одинаково, в частности при $\bar{x} \in \pi'(\pi'')$ выполнено:

$$\frac{1}{2}\Phi_{M_1}(\bar{x}) - \frac{1}{2}\Phi_{M_2}(\bar{x}) = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_{M_1}(\bar{x}) - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_{M_2}(\bar{x}). \tag{3}$$

Пусть $\bar{x}_t$ — точка вида $(\underbrace{-1+t, -1+t, \ldots, -1+t}_{n})$, где $t \in [0, 2]$ — некоторый параметр. Отметим, что при любом $t \in [0, 2]$ точка $\bar{x}_t$ принадлежит гиперплоскости π'' (а значит, и π').

Введем обозначения:

$$a(t) = \rho_E^2(\bar a, \bar x_t) = (2-t)^2 n$$
$$b(t) = \rho_E^2(\bar b, \bar x_t) = (2-t)^2(n-2) + 2t^2$$
$$c(t) = \rho_E^2(\bar c, \bar x_t) = (2-t)^2(n-1) + t^2$$
$$d(t) = \rho_E^2(\bar d, \bar x_t) = (2-t)^2(n-1) + t^2$$

Рассмотрим два случая. 1. $n \geqslant 4$. В таком случае имеем:

$$2 < 4 \leqslant b(t) \leqslant 4(n-2) < 4n-6$$
$$2 < 3 \leqslant c(t), d(t) \leqslant 4(n-1) \tag{4}$$

Предположим теперь, что функции f и $\tilde f$ не совпадают при некотором $x \in [0,2) \cup (4n-6, 4n]$, то есть $f(x) \neq \tilde f(x)$.

Если а) $x \in [0,2)$, то получаем противоречие с (3). Действительно, пусть t такое, что $a(t) = x$. Очевидно, что выбранное значение $t > 1$ и для него

$$2 < c(t), d(t) \leqslant n < 4n-6. \tag{5}$$

Вычислим левую и правую части равенства (3) для точки $\bar x_t$:

$$\Phi_{M_1}(\bar x_t) - \Phi_{M_2}(\bar x_t) =$$
$$= f(\rho_E^2(\bar a, \bar x_t)) + f(\rho_E^2(\bar b, \bar x_t)) - f(\rho_E^2(\bar c, \bar x_t)) - f(\rho_E^2(\bar d, \bar x_t)) =$$
$$= f(a(t)) + f(b(t)) - f(c(t)) - f(d(t)).$$

Аналогично, $\tilde\Phi_{M_1}(\bar x_t) - \tilde\Phi_{M_2}(\bar x_t) = \tilde f(a(t)) + \tilde f(b(t)) - \tilde f(c(t)) - \tilde f(d(t))$.

Приравнивая полученные выражения, получим с учетом (4), (5) и выбора точки x:

$$f(x) + f(b(t)) - f(c(t)) - f(d(t)) = \tilde f(x) + \tilde f(b(t)) - \tilde f(c(t)) - \tilde f(d(t)).$$

Отсюда $f(x) = \tilde f(x)$. Противоречие.

Если б) $x \in (4n-6, 4n]$, то, не ограничивая общности, будем считать, что на множестве $[0, x-2]$ функции f и $\tilde f$ совпадают. Отметим, что при любом t таком, что $a(t) \in (4n-6, 4n]$

$$a(t) - c(t) \geqslant 2 \tag{6}$$

Пусть t — такое, что $a(t) = x$. Тогда, используя (6) при этом значении t имеем $c(t) = d(t) \leqslant x - 2$. С учетом (4) и выбора точки x получим:

$$f(a(t)) = f(x) \neq \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a(t));$$

$$f(b(t)) = \tilde{f}(b(t)), \quad f(c(t)) = \tilde{f}(c(t)), \quad f(d(t)) = \tilde{f}(d(t)).$$

Проверяя, как и в случае а) равенство (3) для точки $\bar{x}_t$, опять получим противоречие.

2). $n = 3$. В этом случае надо показать совпадение функций f и $\tilde{f}$ на множестве $[0, 2) \cup (6, 12]$.

а) Если $f(x) \neq \tilde{f}(x)$, при $x \in (6, 12]$, то, не ограничивая общности, можно считать, что на множестве $[2, x - 1.6]$ функции $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ совпадают. Пусть t — такое, что $a(t) = x$. Очевидно, что $t < 2 - \sqrt{2}$.

При этом:

$$2 < f(t) \leqslant 4, \quad 2 < c(t) = d(t) \leqslant 8$$
$$c(t) < x - 1.6 \Leftrightarrow a(t) - c(t) = 4(1 - t) > 1.6 \quad (7)$$

С учетом (6), (7) и выбора точки x получим:

$$f(a(t)) = f(x) \neq \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a(t))$$
$$f(b(t)) = \tilde{f}(b(t)), f(c(t)) = \tilde{f}(c(t)), f(d(t)) = \tilde{f}(d(t))$$

Проверяя, как и в случае 1) равенство (3) для точки $\bar{x}_t$, получим противоречие.

б) Если $f(x) \neq \tilde{f}(x)$ при $x \in [0, 2)$, то при t таком, что $a(t) = x, (t > 1)$, имеем: $2 < b(t) \leqslant 8; \quad 2 < c(t) = d(t) \leqslant 4$.

В частности, учитывая доказанное в п. 2а, получим:

$$f(b(t)) = \tilde{f}(b(t))$$
$$f(c(t)) = f(d(t)) = \tilde{f}(c(t)) = \tilde{f}(d(t))$$
$$f(a(t)) = f(x) \neq \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a(t))$$

Опять проверяя для точки $\bar{x}_t$ равенство (3), получим противоречие.

Таким образом, функции f и $\tilde{f}$ совпадают на всей области определения $[0, 4n]$, то есть потенциальная функция f линейна на всей своей области определения.

Случай II. $\rho = \rho_H$

Доказательство аналогично доказательству в случае I, поэтому, сохраняя все приведенные ранее обозначения (и рассуждения), проведем его вкратце, отмечая лишь необходимые различия.

Областью определения потенциальной функции в этом случае будет отрезок $[0, 2n]$. Покажем, что на отрезке $[2, 2n-2], (n \geqslant 3)$ функция f будет линейной. Пусть это не так и $T \in [2, 2n-2]$ такое, что $f''(T) \neq 0$.

Выберем параметр t удовлетворяющим равенству

$$2 + (n-2)t = T.$$

В нашем случае имеем:

$$A(x,y) = \rho(\bar{a}, \bar{x}) = (x+1) + (1-y) + (n-2)t = x - y + T$$
$$B(x,y) = \rho(\bar{b}, \bar{x}) = (1-x) + (y+1) + (n-2)t = y - x + T$$
$$C(x,y) = \rho(\bar{c}, \bar{x}) = (1-x) + (1-y) + (n-2)t = -x - y + T$$

Уравнением прямой линии l будет уравнение (2).

Для частных производных имеем следующие значения:

$$A'_x = 1 = A'_x(0,0); \quad A'_y = -1 = A'_y(0,0);$$
$$B'_x = -1 = B'_x(0,0); \quad B'_y = 1 = B'_y(0,0);$$
$$C'_x = -1 = C'_x(0,0); \quad C'_y = -1 = C'_y(0,0);$$
$$F'_x = f'(A) \cdot A'_x + f'(B) \cdot B'_x - 2f'(C) \cdot C'_x$$
$$F'_x(0,0) = f'(T) - f'(T) + 2f'(T) = 2f'(T)$$
$$F'_y = f'(A) \cdot A'_y + f'(B) \cdot B'_y - 2f'(C) \cdot C'_y$$
$$F'_y(0,0) = -f'(T) + f'(T) + 2f'(T) = 2f'(T) \neq 0.$$

Так как $F'_r(0,0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции соотношение (2) определяет в окрестности точки $(0,0)$ функцию $y = y(x)$ и

$$y'(0) = -\frac{F'_x(0,0)}{F'_y(0,0)} = -1.$$

Все вторые частные производные функции A, B и C равны нулю, для вторых частных производных функции F имеем:

$$F''_{xx}(0,0) = 0; \quad F''_{yy}(0,0) = 0$$
$$F''_{xy}(0,0) = f''(T)\cdot(-1) + f''(T)\cdot(-1) - 2f''(T) = -4f''(T) \neq 0.$$

Для значения $y''(x)$ при $x = 0$ получим:

$$y''(0) = -\frac{(-2)\cdot(-4f''(T)}{2f'(T)} = -4\frac{f''(T)}{f'(T)} \neq 0,$$

что противоречит тому, что уравнение $y = y(x)$ в окрестности начала координат является уравнением прямой линии l.

Итак, на отрезке $[2, 2n-2]$ функция f линейна. Пусть $\tilde{f}$ — ее продолжение по линейности на всю область определения $[0, 2n]$. Покажем, что $f = \tilde{f}$. Повторяя дословно (с очевидными изменениями) рассуждения из случая I придем и в этом случае к равенству (3).

Далее, в нашем случае:

$$a(t) = \rho(\bar{(}a), \bar{x}_t) = (2-t)n$$
$$b(t) = \rho(\bar{(}b), \bar{x}_t) = (2-t)(n-2) + 2t$$
$$c(t) = \rho(\bar{(}c), \bar{x}_t) = (2-t)(n-1) + t$$
$$d(t) = \rho(\bar{(}d), \bar{x}_t) = (2-t)(n-1) + t.$$

Легко видеть, что при $t \in [0,2]$ значения функций $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ принадлежат отрезку $[2, 2n-2]$, $(n \geqslant 3)$. Поэтому, если предположить, что при некотором $x \in [0,2) \cup (2n-2, 2n]$ выполнено $f(x) \neq \tilde{f}(x)$ и выбрать t так, чтобы выполнялось $a(t) = x$, то будем иметь:

$$f(a(t)) = f(x) \neq \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a(t))$$
$$f(b(t)) = \tilde{f}(b(t)), \quad f(c(t)) = f(d(t)) = \tilde{f}(d(t)) = \tilde{f}(c(t)).$$

Проверяя, как и раньше, равенство (3) для точки $x(t)$ получим противоречие. Таким образом, потенциальная функция f линейна на всей своей области определения и в случае II.

Итак, показано, что потенциальная функция алгоритма линейного типа G_Φ линейна. Следовательно, алгоритм G_Φ является линейным метрическим алгоритмом.

Теорема 2 доказана.

Автор выражает благодарность В.Б. Кудрявцеву, А.А. Болотову и А.Б. Холоденко за помощь в подготовке этой статьи.

Список литературы

[1] Константинов Р.М., Королева З.Е., Кудрявцев В.Б. О комбинаторно-логическом подходе к задачам прогноза рудоносности // Проблемы кибернетики. Вып. 31. М.: Наука, 1976. С. 5–33.

[2] Журавлев Ю.И. Алгебраический подход к задачам распознавания // Проблемы кибернетики. Вып. 33. М.: Наука, 1978. С. 5–68.

[3] Никольский С.М. Курс математического анализа. Том 1. М.: Наука, 1983.

[4] Айзерман М.А., Бфавермае Э.М., Розоноер Л. Теоретические основы метода потенциальных функций в задаче об обучении автоматов разделению входных ситуаций на классы.