

# О приложениях некоторых линейных процедур распознавания

Азар Шайеб

В классе метрических алгоритмов распознавания выделяется подкласс линейных метрических алгоритмов. Типичным представителем этого класса является алгоритм  $H$  [6], основанный на метрике Хэмминга в пространстве бинарных признаков.

Усиленным вариантом такого алгоритма является предлагаемый в статье алгоритм  $A$ . Помимо самой процедуры распознавания, этот алгоритм также включает в себя процедуру проверки и формирования свойств слабой и сильной  $A$ -отделимости эталонных множеств. Он определяет число ошибок, при которых распознавание остается устойчивым, а также включает в себя процедуру сокращения исходного пространства признаков.

## Введение

Создание вычислительных машин и связанное с этим ускоренное развитие математических теорий, в том числе математической кибернетики и дискретной математики позволило ставить и решать новые задачи, до недавнего времени находившиеся исключительно в компетенции человека. Одной из таких фундаментальных задач является рассматриваемая в настоящей работе задача распознавания образов.

В общем виде эта задача может быть сформулирована следующим образом: необходимо отнести предъявленный объект, определяемый некоторой совокупностью своих признаков, к одному из нескольких непересекающихся классов-образов. В том или ином виде данная задача решается человеком практически во всех сферах его деятельности.

Первые математические работы по данной задаче и реализованные на их основе технические системы появились во второй половине XX века и с тех пор активно используются во многих областях науки и техники, таких как геология, медицина, военное дело, социально-политические исследования и многое другое.

В работах по теории распознавания образов рассматриваются различные подходы к этой задаче. В частности, распознающие системы могут делиться по тому, доступны ли системе примеры объектов, принадлежащих к тому или иному классу (такие системы называются системами распознавания с обучением) или нет (системы распознавания без обучения). Другим критерием, по которому можно классифицировать такие системы, является принцип построения решающего правила. Исторически одними из первых и интуитивно наиболее понятных распознающих систем являлись линейные распознающие системы. В таких системах каждый объект представляется как точка в некотором многомерном пространстве, а решающее правило представляется в виде совокупности поверхностей, отделяющих области этого пространства, соответствующие различным классам. Простейшим случаем такой разделяющей поверхности является гиперплоскость. Системы, основанные на таком подходе, в литературе принято называть линейными распознающими системами.

В настоящей работе рассматривается линейная распознающая система с обучением.

Дальнейшее изложение будет организовано следующим образом.

В §1 будут изложены необходимые определения и обозначения. В §2 будет коротко описан базовый алгоритм распознавания  $H$ . В §3 будет предложен усовершенствованный алгоритм  $A$ , позволяющий, помимо прочего, производить сокращение пространства признаков, не ухудшающее качество распознавания. Завершает работу описание приложений данного алгоритма, направления дальнейших исследований и список литературы.

## 1. Основные определения и обозначения

Введем некоторые обозначения, которые понадобятся нам для дальнейшего изложения:

$E = \{0, 1\}$ ;  $D = \{-1, 1\}$ ;  $\bar{D} = [-1, 1]$ ;  $E^n, D^n, \bar{D}^n$  — соответствующие  $n$ -мерные кубы в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ;

$\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  — метрика, порожденная нормой  $|\bar{x}| = \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ;

$\|\bar{x}\|$  — евклидова норма для  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ;

$(\bar{x}, \bar{y})$  — скалярное произведение векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  в  $\mathbb{R}^n$ .

$|M|$  — мощность множества  $M$ .

Сформулируем теперь необходимые определения. Всюду далее в этом разделе, если не оговаривается противное, предполагается, что  $\tilde{\alpha} \in E^n$ ,  $\tilde{\beta} \in E^n$ ,  $M, M_1, M_2 \subseteq E^n$ .

*Величина*

$$d(M) = \max_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in M} \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

называется *диаметром* множества  $M$ .

*Величина*

$$\rho(M_1, M_2) = \min_{\tilde{\alpha} \in M_1, \tilde{\beta} \in M_2} \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

называется *расстоянием* между множествами  $M_1$  и  $M_2$ .

Пусть  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E^n$ . Положим

$$\gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = n - \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).$$

Очевидно, что  $\gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  равно числу координат, в которых наборы  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  совпадают.

*Величина*

$$\gamma(\tilde{\alpha}, M) = \sum_{\tilde{\beta}_i \in M} \gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i)$$

называется *числом голосов* набора  $\tilde{\alpha}$  относительно множества  $M$ .

*Величина*

$$\Gamma(\tilde{\alpha}, M) = \frac{\gamma(\tilde{\alpha}, M)}{|M|}$$

называется *средним числом голосов* набора  $\tilde{\alpha}$  относительно множества  $M$ .

Величина

$$\rho(\tilde{\alpha}, M) = \sum_{\tilde{\beta}_i \in M} \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i)$$

называется расстоянием между набором  $\tilde{\alpha}$  и множеством  $M$ .

Величина

$$\mathcal{P}(\tilde{\alpha}, M) = \frac{\rho(\tilde{\alpha}, M)}{|M|}$$

называется средним расстоянием от набора  $\tilde{\alpha}$  до множества  $M$ .

Очевидно, что при  $\tilde{\alpha} \in E^n$  и  $M \subseteq E^n$  имеет место

$$\Gamma(\tilde{\alpha}, M) = n - \mathcal{P}(\tilde{\alpha}, M).$$

## 2. Постановка задач и основные алгоритмы

Перейдем теперь к формальной постановке задачи классификации с эталонами в рамках комбинаторно-логического подхода к решению задач типа распознавания [1], [2].

### 2.1. Задача распознавания

Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — два класса строк вида  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in E$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Номер  $i$  величины  $x_i$  будем называть признаком.

Пусть  $L_1 = \{\tilde{\alpha}_1^{(1)}, \dots, \tilde{\alpha}_{m_1}^{(1)}\} \subseteq K_1$ ,  $L_2 = \{\tilde{\alpha}_1^{(2)}, \dots, \tilde{\alpha}_{m_2}^{(2)}\} \subseteq K_2$ . Множества  $L_1$  и  $L_2$  называем материалом обучения.

Требуется, исходя из множеств  $L_1$  и  $L_2$ , указать решающее правило  $\rightarrow$ , такое, что при  $\tilde{\alpha} \in K_1 \cup K_2$  выполнено

$$\tilde{\alpha} \rightarrow \begin{cases} K_1, & \text{если } \tilde{\alpha} \in K_1; \\ K_2, & \text{если } \tilde{\alpha} \in K_2. \end{cases}$$

Эта задача называется задачей распознавания с обучением.

Если  $\tilde{\alpha} \rightarrow K_1$ , но  $\tilde{\alpha} \notin K_1$  или  $\tilde{\alpha} \rightarrow K_2$ , но  $\tilde{\alpha} \notin K_2$ , говорят, что произошла ошибка распознавания.

## 2.2. *H*-отделимость

Рассмотрим алгоритм *H*, задаваемый следующим правилом:

$$\tilde{\alpha} \rightarrow \begin{cases} K_1, & \text{если } \Gamma(\tilde{\alpha}, L_1) > \Gamma(\tilde{\alpha}, L_2) \\ K_2, & \text{если } \Gamma(\tilde{\alpha}, L_1) < \Gamma(\tilde{\alpha}, L_2) \\ \text{не определено,} & \text{если } \Gamma(\tilde{\alpha}, L_1) = \Gamma(\tilde{\alpha}, L_2) \end{cases} \quad (*)$$

Эти условия, соответственно, эквивалентны таким

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tilde{\alpha}, L_1) &< \mathcal{P}(\tilde{\alpha}, L_2); \\ \mathcal{P}(\tilde{\alpha}, L_1) &> \mathcal{P}(\tilde{\alpha}, L_2); \\ \mathcal{P}(\tilde{\alpha}, L_1) &= \mathcal{P}(\tilde{\alpha}, L_2). \end{aligned}$$

Множества  $K_1$  и  $K_2$  называются слабо *H*-разделимыми (посредством  $L_1$  и  $L_2$ ), если для  $L_1 \subseteq K_1$  и  $L_2 \subseteq K_2$  алгоритм *H* все элементы из множества  $L_1 \cup L_2$  правильно относит к  $L_1$  и  $L_2$ .

Множества  $K_1$  и  $K_2$  называются сильно *H*-разделимыми, если для любых непустых  $L_1 \subseteq K_1$ ,  $L_2 \subseteq K_2$  множества  $K_1$  и  $K_2$  слабо *H*-разделимы (посредством  $L_1$  и  $L_2$ ).

Можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 1 ([6]).** Если  $M_1, M_2 \subseteq E^n$ ,  $|M_i| = m_i$ , то

а)  $M_1$  и  $M_2$  слабо *H*-разделимы, при

$$\frac{d(M_i)}{\rho(M_1, M_2)} < \frac{m_i}{m_i - 1}, \quad i = 1, 2;$$

б)  $M_1$  и  $M_2$  сильно *H*-разделимы, при

$$\frac{d(M_i)}{\rho(M_1, M_2)} < 1, \quad i = 1, 2.$$

## 2.3. Линейная отделимость

Пусть в  $E^n$  задана гиперплоскость  $G$  вида  $(\tilde{\alpha}, x + \tilde{\beta}) = 0$ ,  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^n$ .

Будем говорить, что  $\tilde{\gamma} \in E^n$  лежит в верхнем полупространстве, если  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} + \tilde{\beta}) > 0$ ; в нижнем полупространстве, если  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} +$

$\tilde{\beta}) < 0$ . В том случае, если  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} + \tilde{\beta}) = 0$ , считаем, что положение  $\tilde{\gamma}$  не определено.

Говорят, что множества  $M_1, M_2 \in E^n$  линейно отделимы, если существует гиперплоскость  $G$ , такая что  $M_1$  и  $M_2$  лежат в разных полупространствах по отношению к  $G$ , то есть эта гиперплоскость определяет решающее правило для точек из этих полупространств.

Замечание. В линейной отделимости без ограничения общности можно ограничиться рассмотрением только гиперплоскостей, проходящих через начало координат, то есть гиперплоскостей вида  $(\tilde{\alpha}, x) = 0$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2 ([6]).** Если для  $M_1, M_2 \in E^n$  выполнено правило (\*), то  $M_1$  и  $M_2$  линейно отделимы.

## 2.4. Сокращение поля признаков

Наряду с  $n$ -мерным кубом  $E^n$  нам будет удобно рассматривать  $n$ -мерный куб  $D^n = \{-1, 1\}^n$ .

Для множеств  $M_1, M_2 \subseteq D^n$  положим  $M = M_1 \cup (-M_2)$ . Этому множеству можно сопоставить  $(-1, 1)$ -матрицу, строками которой являются вектора из множества  $M$ . В дальнейшем мы будем обозначать ее той же буквой, что и соответствующее множество.

Пусть  $M_1 = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_{m_1}\}$ ,  $M_2 = \{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_{m_2}\}$ ;  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j \in \bar{D}^n$ .

Вектор

$$\bar{p}(M) = \frac{1}{|M|} \sum_{\tilde{\alpha}_i \in M} \tilde{\alpha}_i$$

называется информационным вектором множества  $M$ .

Вектор

$$\bar{q}(M_1, M_2) = \frac{\bar{p}(M_1) - \bar{p}(M_2)}{2}$$

называется характеристическим вектором множеств  $M_1$  и  $M_2$ .

Будем предполагать, что множества  $M_1$  и  $M_2$  слабо  $H$ -разделимы, то есть существует такая разделяющая гиперплоскость  $G$  вида  $(\bar{q}, \tilde{x}) = 0$ , что при  $\tilde{\alpha} \in M_1$  и  $\tilde{\beta} \in M_2$  выполнено  $(\bar{q}, \tilde{\alpha}) > 0$  и  $(\bar{q}, \tilde{\beta}) < 0$ .

Другими словами, для всех векторов  $\tilde{\alpha}$  из эталонного множества  $M$  выполняются неравенства  $(\bar{q}, \tilde{\alpha}) > 0$ .

Не ограничивая общности, можно считать, что все компоненты  $q_i$  вектора  $\bar{q}$  положительные,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Кроме того, достаточно рассмотреть лишь случай  $|M_1| = |M_2|$  (при этом вектор  $\bar{q}$  коллинеарен весовому вектору  $\bar{d} = \sum_{\tilde{\alpha}_i \in M} \alpha_i$ ).

*Величина*

$$B = \min_{\tilde{\alpha} \in M} (\tilde{\alpha}, \bar{d})$$

называется *порогом распознавания для эталонного множества  $M$* .

Пусть  $\Pi = \{1, 2, \dots, n\}$  — исходное множество признаков.

Если  $\Pi' = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \Pi$  есть некоторое (упорядоченное по возрастанию) подмножество признаков, то для  $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n\} \in D^n$  через  $\tilde{\alpha}' \in D^k$  обозначим вектор, составленный из компонент  $i_1, \dots, i_k$  вектора  $\tilde{\alpha}$ .

Будем говорить, что вектор  $\tilde{\alpha}'$  получен из  $\tilde{\alpha}$  путем проектирования (удаления компонент, или удаления признаков). Аналогично, для множества векторов  $M = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m\}$  через  $M'$  будем обозначать множество векторов  $\{\tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \dots, \tilde{\alpha}'_m\}$ , полученных указанным проектированием. Будем также говорить, что множество  $M'$  получено проектированием множества  $M$  на множество признаков  $\Pi'$ .

Задача сокращения поля признаков может быть сформулирована следующим образом.

*Для данного эталонного множества  $M$  с порогом распознавания  $B > 0$  и некоторого фиксированного числа  $c \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq c \leq B$ , найти минимальное (по мощности) подмножество признаков  $\Pi'$  такое, что порог распознавания для  $M'$  (проекции  $M$  на  $\Pi'$ ) будет не менее, чем  $c$ .*

Можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 3 ([7], [8]).** *Задача сокращения поля признаков является NP-полной [10].*

### 3. Алгоритм распознавания с обучением $\mathcal{A}$

Здесь мы рассмотрим новый алгоритм распознавания  $\mathcal{A}$ . Этот алгоритм, помимо собственно процедуры распознавания, включает в себя процедуру проверки и формирования свойств слабой и сильной разделимости эталонных множеств, а также процедуру сокращения исходного множества признаков.

Опишем подробнее этапы алгоритма  $\mathcal{A}$ .

#### 3.1. Подготовительный этап

Заданные эталонные множества  $M_1$  и  $M_2$  ( $|M_1| = |M_2| = m$ ) представляются в виде  $(-1, 1)$ -матриц размера  $m \times n$ , из которых образуется матрица  $M = M_1 \cup (-M_2)$  размера  $2m \times n$  и вычисляется ее информационный вектор  $\bar{q}(M) = (q_1, \dots, q_n)$  (он совпадает с характеристизационным вектором для эталонных множеств  $M_1$  и  $M_2$ ).

В случае  $q_i = 0$  из матрицы  $M$  удаляется (посредством массива  $M_{asst}(n)$ ) столбец с номером  $i$ , при этом сам номер запоминается в массиве  $M_{zap}(n)$ .

Если для некоторого  $i$  имеем  $q_i < 0$ , то такой номер  $i$  также запоминается в массиве  $M_{zap}(n)$ , а в матрице  $M$  все знаки в столбце с номером  $i$  заменяются на противоположные [7]. Все операции также синхронно проводятся с вектором  $\bar{q}(M)$ , в результате чего оставшиеся его компоненты становятся положительными. Эти компоненты вектора  $\bar{q}(M)$  выписываются в порядке убывания.

Соответствующая перестановка столбцов матрицы  $M$  приводит к разбиению ее столбцов на группы, на каждой из которых значение компоненты вектора  $\bar{q}(M)$  постоянно.

#### 3.2. Проверка (формирование) слабой $\mathcal{A}$ -разделимости

После умножения матрицы  $M$  на вектор  $\bar{q}(M)$  определяются величины

$$SV(I) = \min_{1 \leq i \leq m} (\bar{q}(M), a_i), \quad SN(J) = \min_{m+1 \leq j \leq 2m} (\bar{q}(M), a_j),$$

где  $a_i, a_j$  — строки матрицы  $M$ , а  $I, J$  — номера строк в  $M$ , на которых достигается соответствующий минимум. Если теперь  $\min(SV(I), SN(J)) > 0$ , то множества  $M_1$  и  $M_2$  слабо  $\mathcal{A}$ -разделимы; в противном случае удаляем из  $M$  строки с номерами  $I$  и  $J$  (возможно несколько раз), до тех пор, пока не придем к выполнению условия слабой  $\mathcal{A}$ -разделимости.

*Будем называть распознавание устойчивым на матрице  $M$ , если удаление строки из  $M$  не уменьшает порога распознавания.*

На этом шаге мы также можем вычислить число ошибочных строк, относительно которых распознавание является устойчивым [4].

### 3.3. Проверка (формирование) сильной $\mathcal{A}$ -разделимости

Образуем матрицу (массив)  $M_{raz}(n)$  размера  $m^2 \times n$  (соответствующую множеству  $M = \{\bar{a} - \bar{b} | \bar{a} \in M_1, \bar{b} \in M_2\}$ ).

После умножения матрицы  $M$  на транспонированную матрицу  $M_{raz}^T$  аналогично шагу 3.2 можем вычислить величины  $M_{imssv}(I)$ ,  $M_{imssv}(J)$ . Если  $\min(M_{imssv}(I), M_{imssv}(J)) > 0$ , то матрицы  $M_1$  и  $M_2$  сильно  $\mathcal{A}$ -разделимы [7]. В противном случае удаляем из матрицы  $M$  строки с номерами  $I$  и  $J$  (возможно, несколько раз) до тех пор, пока не придем к выполнению условия сильной  $\mathcal{A}$ -разделимости (запоминание номеров удаляемых из  $M$  строк происходит в массиве  $M_{ASKA}$ ).

### 3.4. Сокращение множества признаков I (построение 1-тупиковой матрицы)

Введем следующие понятия.

*Матрицу назовем тупиковой, если удаление любой группы столбцов не является допустимым, то есть приводит к снижению порога распознавания.*

*Матрицу назовем l-тупиковой, если удаление любой группы столбцов в количестве не более l не является допустимым, то есть приводит к снижению порога распознавания.*

Замечание. Очевидно, что из  $l$ -тупиковости матрицы не следует ее тупиковость.

На этапах 3.4 и 3.5 множество признаков обрабатывается (сокращается) для полученной матрицы  $M$ .

Для матрицы  $M$ , столбцы которой разбиты на группы, пусть  $q_{(i)}$  обозначает общее значение компонент вектора  $\bar{q}(M)$  на столбцах  $i$ -ой группы.

Используем следующие обозначения:

$D$  — порог распознавания для  $M$ ;

$\Sigma(I)$  — скалярное произведение  $I$ -ой строки матрицы  $M$  на вектор  $\bar{q}(M)$ .

$SB(I)$  — часть  $\Sigma(I)$  на номерах столбцов из  $I$ -ой группы;

$\Sigma_M(I) = \Sigma(I) - SB(I)$ .

Подмножество номеров строк  $S \subseteq \{1, 2, \dots, t\}$  будем называть *граничным множеством для матрицы  $M$* , если при  $i \in S$  имеет место  $d \sum(\tilde{\alpha}_i) = B$ , то есть  $\sum(\tilde{\alpha}_i) = \frac{B}{d}$ , где  $B$  — порог распознавания,  $d = \sum_{\tilde{\alpha} \in M} \tilde{\alpha}$ .

С учетом этих обозначений строка с номером  $I$  принадлежит граничному множеству  $S$  тогда и только тогда, когда

$$D - \Sigma_M(I) \leq SB(I) < D - \Sigma_M(I) + q_{(i)}.$$

Пусть  $I_{GRAN}$  — массив, состоящий из номеров строк граничного множества  $S$ .

Среди столбцов  $i$ -ой группы отыскиваются такие, у которых в пересечении со строками из граничного множества  $S$  стоит  $-1$ . Пусть  $L$  — номер первого такого столбца из  $i$ -ой группы (если таких столбцов нет, то осуществляется переход к рассмотрению  $(i + 1)$ -ой группы).

Удаляем из матрицы  $M$  столбец с номером  $L$ . Можно показать, что порог распознавания для сокращенной матрицы не меньше, чем исходный порог  $D$ .

Полагаем  $M_{asst}(L) = 1$  (в массиве  $M_{asst}$  запоминаются номера удаленных столбцов) и заменяем  $SB(I)$  на  $SB(I) - \text{sign}(M(I, L))q_{(i)}$ .

Описанный процесс удаления столбцов матрицы  $M$  (без уменьшения порога распознавания) в результате циклического просмотра всех групп столбцов осуществляется до тех пор, пока еще возможно удаление какого-либо столбца хотя бы из одной группы.

В итоге будем иметь 1-тупиковую подматрицу матрицы  $M$ .

### 3.5. Сокращение множества признаков II (построение 2-тупиковой матрицы)

Для простоты осуществляется построение 2-тупиковой на группах столбцов матрицы исходной матрицы  $M$ , то есть возможность удаления пары столбцов проверяется только на имеющихся группах столбцов. Такая проверка осуществляется вполне аналогично описанному в пункте 3.4 с тремя изменениями:

- А)  $D - \Sigma_M(I) \leq SB(I) < D - \Sigma_M(I) + 2q_{(i)}$ ;
- Б) Среди пар столбцов  $i$ -ой группы отыскиваются такие, у которых в пересечении со строками из граничного множества стоят либо противоположные по знаку числа, либо оба отрицательные.
- В)  $SB(I) = SB(I) + \sigma q_{(i)}$ , где  $\sigma$  есть 2 либо  $-2$ , в зависимости от того, какой случай имеет место в предыдущем пункте.

Таким образом, в результате применения шага 3.5 получаем 2-тупиковую подматрицу матрицы  $M$ .

В заключение отметим следующую возможную схему обработки информации, представленной эталонными множествами  $M_1$  и  $M_2$ .

При движении по данной блок-схеме происходит сжатие (как по строкам, так и по столбцам) исходной информации об эталонных множествах, при этом порог распознавания может только увеличиваться, что позволяет ожидать повышения качества распознавания и таким образом может рассматриваться как самоусовершенствование представленного алгоритма распознавания.

## 4. Практические приложения и направления дальнейших исследований

Эта работа реализована в нескольких областях в геологии и в социально-экономических областях [3], [4] и [5]. Анализ результатов распознавания показал, что процедуру распознавания самоорганизация алгоритма  $\mathcal{A}$ , заложенная в него, приводит к повышению качества распознавания.

Интересным обобщением данной задачи является рассмотрение обучающих множеств, в которых присутствуют ошибки. Интерес



представляет модификации предложенных алгоритмов для решения практических задач, а также теоретические оценки качества распознавания для таких моделей.

## Список литературы

- [1] Константинов Р.М., Королева З.Е., Кудрявцев В.Б. О комбинаторно-логическом подходе к задачам прогноза рудоносности // Проблемы кибернетики. Вып. 31. М.: Наука, 1976. С. 5–33.
- [2] Журавлев Ю.И. Алгебраический подход к задачам распознавания // Проблемы кибернетики. Вып. 33. М.: Наука, 1978. С. 5–68.

- [3] Переяславский В.И. Об одном линейном методе распознавания образов // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во ГГУ, 1982. С. 89–121.
- [4] Сиротинская С.В. Метод вариационных рядов и его применение к исследованию некоторых геологических особенностей оловянно-вольфрамовых месторождений // Логико-информационные решения геологических задач. М.: Наука, 1975. С. 5–82.
- [5] Кудрявцев Вит.Б., Чижова И.А. Дифференцированная оценка рекреационных территорий // Математические методы в биологии. М.: Изд-во МГУ, 1985.
- [6] Шайб А. Об одном алгоритме распознавания типа голосования // Дискретная математика и ее приложения. М.: Изд-во МГУ, 1985.
- [7] Шайб А. Болотов А.А. О линейных метрических алгоритмах распознавания // Тезисы VI всесоюзной конференции по математической кибернетике. Саратов, 1983.
- [8] Шайб А. К задаче сокращения признакового пространства в алгоритмах распознавания // Дискретная математика и ее приложения. М.: Изд-во МГУ, 1985.
- [9] Шайб А. Болотов А.А. О метрических алгоритмах классификации // ДАН. 1987. Т. 292. № 3.
- [10] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. С. 416.

