Метод расчета числа пакетов, проходящих через ATM коммутатор, на основе Z-преобразования

М.В. Симонов, А.Н. Назаров

На построение коммутационных устройств для широкополосных сетей интегрального обслуживания (ШЦСИО) на технологии ATM существенное влияние оказывают два основных фактора:

- высокая скорость работы коммутатора;
- стохастический характер потоков пакетов ATM (ячеек), обслуживаемых коммутационной системой.

Перенос пакета ATM внутри коммутатора от входа к выходу (коммутация) может сочетаться с концентрацией (мультиплексированием) или деконцентрацией (демультиплексированием) трафика пакетов ATM.

Таким образом, основными функциями коммутационного оборудования в широкополосных сетях интегрального обслуживания являются:

- коммутация;
- концентрация (мультиплексирование);
- деконцентрация (демультиплексирование).

Под термином «коммутация» будем понимать передачу (транспортирование) пакетов ATM от входящего логического канала коммутатора к исходящему логическому каналу, требующую выбора нужного логического канала из множества исходящих логических каналов.

При этом логический канал характеризуется:

- физическим входом или выходом, определяемым номером физического порта;
- логическим каналом физического порта, определяемым идентификатором виртуального канала и идентификатором виртуального пути.

Для обеспечения коммутации физический вход и идентификаторы входящего виртуального канала и входящего виртуального пути должны соотноситься с физическим выходом и идентификаторами исходящего виртуального канала и исходящего пути.

Таким образом, в коммутационной системе ATM должны быть реализованы две функции, которые можно условно сравнить с функциями, выполняемыми классическими коммутационными системами.

Первую функцию можно сравнить с пространственной коммутацией.

Второй функцией современных коммутаторов в цифровых сетях является обмен временными интервалами, то есть временна́я коммутация.

Так как в коммутационных системах ATM концепция заранее установленного временного интервала отсутствует, то при одновременном соревновании ячеек двух и более логических каналов за один временной интервал, естественно, возникает ситуация состязания. Она может быть решена путем организации очередей из пакетов ATM. Поэтому организация и ведение очередей является второй важнейшей функцией коммутаторов ATM.

Если количество входов превышает количество выходов, то информация мультиплексируется в меньшее количество выходов.

При технологии ATM разница между мультиплексированием и концентрацией достаточно условна. При использовании термина «концентрация» подчеркивается, что число выходов коммутационного устройства меньше числа входов. При использовании термина «мультиплексирование» акцент ставится на статистическое слияние потоков ячеек от различных пользователей в единый поток пакетов ATM в цифровом тракте.

Если при пространственной коммутации может возникать эффект блокировок, приводящий к потере пакетов, то основными характеристиками, которые определяются организацией и дисциплиной ведения очередей, является производительность коммутатора, то есть пропускная способность, временные задержки и вариации задержки пакетов, а также потеря пакетов из-за конечной емкости буферных устройств.

Статистическое мультиплексирование множества логических каналов, транспортирующих трафик различных пользователей в едином цифровом тракте, повышает эффективность использования цифровых трактов, а перенос всех видов информации в виде пакетов АТМ фиксированной длины делает коммутационное оборудование ШЦСИО однородным.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ в выходной очереди находилось q_0 пакетов АТМ. Пусть пакеты, находящиеся в очереди, пронумерованы по порядку, начиная с «головы» очереди, номерами $1, 2, \ldots, q_0$. Предположим, кроме того, что началось обслуживание пакета с номером 1. Обслуживание производится в порядке поступления по правилу «первым пришел — первым обслужен».

За время передачи пакета в очередь могут поступить пакеты с номерами $q_0 + 1$, $q_0 + 2$ и т.д. Обозначим через q_n число пакетов, находящихся в очереди в момент окончания обслуживания n-го пакета, и через ξ_n — число требований, поступивших за время передачи в линию пакета с номером n. Величины q_n и ξ_n являются случайными величинами. Очевидно, что $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Более того, ξ_n не зависит от $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$.

Последовательность $\{q_n\}$ может быть задана соотношением [1]

$$q_{n+1} = \begin{cases} q_n - 1 + \xi_{n+1}, & q_n > 0, \\ \xi_{n+1}, & q_n = 0. \end{cases}$$

Первое равенство для $q_n > 0$ означает, что очередь, оставленная при передаче $(n+1)$-го пакета, складывается из очереди из n пакетов, уменьшенной на единицу (пакет с номером $n+1$) и увеличенную на число пакетов, которые поступят за время передачи $(n+1)$-го пакета. Равенство для $q_n = 0$ основывается на соображении, что если $(n+1)$-й пакет застает выход свободным, то очередь, которую он оставляет, состоит только из тех пакетов ξ_{n+1}, которые поступят за время его передачи.

При использовании ступенчатой функции

$$u(x) = \begin{cases} 1, & (x > 0) \\ 0, & (x \leqslant 0) \end{cases}$$

оба равенства для q_{n+1} могут быть объединены в одно [1]

$$q_{n+1} = q_n - u(q_n) + \xi_{n+1}. \tag{1}$$

Чтобы найти стационарное распределение длины очереди, обозначим производящую функцию случайной величины q_{n+1} через $Q(Z) = M[Z^q_{n+1}]$. В этом случае, согласно соотношению (1) и так как ξ_{n+1} не зависит от q_n

$$Q(Z) = M[Z^{q_n - u(q_n) + \xi_{n+1}}] = P(Z)M[Z^{q_n - u(q_n)}], \tag{2}$$

где $P(Z)$ — производящая функция случайной величины ξ_{n+1} [1].

При нагрузке в системе меньшей 1 существует стационарное распределение вероятностей $\{\pi_k\}$, то есть существует предел на интервале наблюдения T

$$\lim_{T\to\infty} P\{q_n = k\} = \pi_k.$$

Вероятности π_k имеют наглядную интерпретацию, а именно: среди большого числа обслуженных требований доля тех, которые оставляют позади себя очередь длиною k, равна π_k. Более того, если случайная величина q_0 выбрана в соответствии со стационарным распределением вероятностей $\{\pi_k\}$, то

$$P\{q_n = k\} = \pi_k$$

для всех n. Это значит, что процесс, описывающий поведение очереди, стационарен.

Чтобы определить стационарное распределение вероятностей, воспользуемся основным соотношением (1) и свойствами случайных величин ξ_n. В стационарном режиме вероятностные свойства величин q_{n+1} и q_n одинаковы. Следовательно, в частности, $M[q_n] = M[q_{n+1}]$, и, проведя операцию математического ожидания выражения (1), получаем

$$M[u(q_n)] = M[\xi_{n+1}] = P'(1). \tag{3}$$

Но $M[u(q_n)]$ численно совпадает с $P\{q_n \neq 0\}$, так что в случае стационарной очереди вероятность события, что пакет, покидающий систему оставит обслуживающий прибор свободным (или вероятность того, что в момент освобождения обслуживающего прибора к нему не будет очереди), равна π_0.

Очевидно, что

$$M[Z^{q_n-u(q_n)}] = \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n Z^{n-1} = \pi_0 + \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi_n Z^n}{Z} =$$

$$= \pi_0 + \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pi_n Z^n - \pi_0}{Z} = \left[1 - P'(1)\right] + \frac{Q(Z) - [1 - P'(1)]}{Z}. \quad (4)$$

Если данное выражение подставить в (2) и произвести элементарное преобразование, то получим Z-преобразование числа пакетов ATM в системе

$$Q(Z) = \left[1 - P'_\xi(1)\right] \frac{(1 - Z)P(Z)}{P(Z) - Z}. \quad (5)$$

Введем следующие обозначения:

$$A(Z) = (1 - Z)P(Z); \quad \lim_{Z\to 1} A(Z) = A(1) = 0; \quad (6)$$

$$B(Z) = P(Z) - Z; \quad \lim_{Z\to 1} B(Z) = B(1) = 0. \quad (7)$$

В этом случае

$$A'(Z) = (1 - Z)P'(Z) - P(Z); \quad \lim_{Z\to 1} A'(Z) = A'(1) = -1; \quad (8)$$

$$B'(Z) = P'(Z) - 1; \quad \lim_{Z\to 1} B'(Z) = B'(1) = -[1 - P'(1)]. \quad (9)$$

В этом случае первая производная по Z от $Q(Z)$ имеет вид

$$Q'(Z) = \left[1 - P'(1)\right] \frac{A'(Z)B(Z) - A(Z)B'(Z)}{[B(Z)]^2}. \quad (10)$$

Первый начальный момент количества пакетов АТМ в системе [1] может быть получен из (10) как предел при $Z \to 1$

$$M[q] = q_1 = \lim_{Z\to 1} Q'(Z) = \\ = \lim_{Z\to 1} \left[1 - P'(1)\right] \frac{A'(Z)B(Z) - A(Z)B'(Z)}{[B(Z)]^2}. \quad (11)$$

Однако при подстановке найденных соотношений (6), (7), (8) и (9) в (11), получаем неопределенность типа 0/0. Раскрывая данную неопределенность с помощью правила Лопиталя, получаем

$$M[q] = q_1 = Q'(1) = P'(1) + \frac{1}{2}\frac{P''(1)}{1 - P'(1)}. \quad (12)$$

Аналогично может быть найдена и вторая производная по Z от $Q(Z)$ и ее предел при $Z \to 1$.

$$Q''(1) = \frac{1}{3}\frac{P'''(1)}{1 - P'(1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{P''(1)}{1 - P'(1)}\right]^2 + P''(1) + \frac{P'(1)P''(1)}{1 - P'(1)}. \quad (13)$$

Второй начальный момент количества ячеек может быть найден как сумма первой и второй производных от $Q(Z)$ при $Z \to 1$.

$$q_2 = Q''(1) + Q'(1) = \frac{1}{3}\frac{P'''(1)}{1 - P'(1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{P''(1)}{1 - P'(1)}\right]^2 + \\ + P''(1) + \frac{P'(1)P''(1)}{1 - P'(1)} + P'(1) + \frac{1}{2}\frac{P''(1)}{1 - P'(1)}. \quad (14)$$

Из соотношений (12) и (14) может быть получено искомое соотношение для дисперсии числа ячеек в системе

$$D[q] = q_2 - q_1^2 = \frac{1}{3}\frac{P'''(1)}{1 - P'(1)} + \frac{1}{4}\left[\frac{P''(1)}{1 - P'(1)}\right]^2 + \\ + P''(1)[1 - P'(1)] + \frac{1}{2}\frac{P''(1)[3 - 2P'(1)]}{1 - P'(1)}. \quad (15)$$

Таким образом при моделировании процесса прохождения ячеек в АТМ коммутаторе с помощью формализма производящей функции разработан общий метод на основе Z-преобразований, с помощью которого для конкретных производящих функций могут быть получены аналитические соотношения для среднего значения и дисперсии числа ячеек, находящихся в системе для стационарного режима. Данные соотношения позволяют производить расчет необходимой емкости буферных устройств и времени задержки в них ячеек ATM. При достаточно общих предположениях могут быть получены расчетные соотношения для концентраторов, мультиплексоров и сетевого коммутационного оборудования ATM.

Список литературы

[1] 1 Назаров А.Н., Симонов М.В. ATM: технология высокоскоростных сетей. М.: Эко-Трендз, 1997.