Неопределенные нечеткие модели и их применения*

Ю.П. Пытьев

В предлагаемой работе по неопределенной нечеткой математике рассмотрены математические методы и средства, предназначенные как для построения математических моделей сложных объектов[1], средств их наблюдения, измерения и регистрации, так и для выражения субъективных суждений о достоверности этих моделей (и основанных на них выводов), их адекватности реальному порядку вещей и, в частности, — для представления возможной эволюции модальностей этих суждений, обусловленной результатами наблюдений, измерений и другой поступающей в ходе исследований информации.

Такие модели, называемые неопределенными нечеткими (НН), как правило, основаны на сложной, неточной, противоречивой и недостоверной информации. В рассматриваемых НН моделях нечеткость, неточность формулировок, свойственных моделям сложных объектов и средств их исследования, охарактеризована в терминах значений мер возможности и (или) необходимости, причем в порядковой шкале, в которой содержательно истолкованы могут быть лишь отношения «$<$», «$>$» или «$=$» [1]. Соответственно достоверность формулировок, которая не может быть абсолютной в силу принципиальной неполноты знания свойств моделируемых объектов и средств их исследования, охарактеризована в терминах значений мер правдоподобия и (или) доверия, также в порядковой шкале; значения этих мер характеризуют субъективные высказывания по поводу адекватности тех или иных аспектов модели, обусловленные их неясностью и неопределенностью.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №02-01-00424.

[1] физических, технических, социальных, биологических и др.

В первой части рассмотрены понятия нечеткого, неопределенного и неопределенного нечеткого (НН) элементов и множеств, НН функций, НН событий и т.д. Определены конструкции меры правдоподобия возможности и интеграла. Даны выражения для правдоподобия возможности простейших событий. В следующей части рассмотрена теория меры правдоподобия возможности и интеграла, в третьей, завершающей, даны методы оптимального оценивания и принятия решений.

Часть I. Неопределенные, нечеткие и неопределенные нечеткие элементы и множества

Предисловие

При «стандартном» построении математической модели исследователь не имеет средств для формального выражения своего мнения по поводу адекватности модели изучаемого объекта, средств его изучения и основанных на модели выводов. Его суждение по поводу адекватности может быть сформулировано лишь тогда, когда наблюдения противоречат основанным на модели предсказаниям, и модель должна быть отвергнута как неадекватная. В противном случае его суждение не определено, ибо, с одной стороны, возможно, что какие-либо другие наблюдения будут противоречить предсказаниям модели, а, с другой стороны, результаты наблюдений могут лучше согласовываться с какой-либо другой моделью.

В первой части работы рассмотрены основные понятия, используемые при построении НН модели — понятия нечеткого, неопределенного, неопределенного нечеткого (НН) элементов, НН множества, НН функции, НН события и т.д. Определены конструкции меры правдоподобия возможности и интеграла. Даны выражения для правдоподобия возможности некоторых событий, например, — для правдоподобия возможности покрытия НН элемента НН множеством.

Во второй и третьей частях рассмотрены соответственно:

- мера правдоподобия возможности, интеграл и их свойства;
- методы оптимального оценивания.

§ 1. Нечеткие элементы

Как известно[1], любое пространство с возможностью можно представить как совокупность $(Y, \mathcal{P}(Y), P_Y)$ трех объектов: множества Y, элементы (точки) которого называются элементарными событиями, σ-алгебры $\mathcal{P}(Y)$ *всех* подмножеств Y, называемых событиями, и функции $P_Y(\cdot)$, определенной на $\mathcal{P}(Y)$, принимающей значения в $[0, 1]$ и называемой мерой возможности, или короче — возможностью; ее значение $P_Y(A)$ называется возможностью события $A \in \mathcal{P}(Y)$. Функция $P_Y(\cdot) : \mathcal{P}(Y) \to [0, 1]$ характеризуется следующими свойствами:

- $P_Y(A \cup B) = \max(P_Y(A), P_Y(B)),\ A, B \in \mathcal{P}(Y)$, (аддитивность);
- $P_Y(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup\limits_i P_Y(A_i),\ A_i \in \mathcal{P}(Y),\ i = 1, 2, \ldots$, (счетная аддитивность[2]);
- $A \subset B \Rightarrow P_Y(A) \leqslant P_Y(B)$ (монотонность);
- $P_Y(\varnothing) = 0,\ P_Y(Y) = 1$ (нормировка);
- $P_Y(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i \geqslant n} A_i) \leqslant \sup\limits_n \inf\limits_{i \geqslant n} P_Y(A_i)$ (полунепрерывность снизу).

Возможность $P_Y(\cdot)$ определяется ее значениями

$$f(y) \triangleq P_Y(\{y\}), \qquad y \in Y, \tag{1.1}$$

на одноточечных подмножествах $\{y\} \subset Y$, а именно,

$$P_Y(A) = \sup_{y \in A} f(y), \qquad A \in \mathcal{P}(Y). \tag{1.2}$$

Функция $f(\cdot) : Y \to [0, 1]$ называется распределением возможности $P_Y(\cdot)$.

Для наших целей сказанное удобно переформулировать в терминах понятия нечеткого элемента (обозначим его η), определенного на $(Y, \mathcal{P}(Y), P_Y)$ и принимающего значения в Y. Возможность $P_Y(A)$ события $A \in \mathcal{P}(Y)$ определим как возможность включения η в A,

$$P^\eta(\eta \in A) \equiv P^\eta(A) \triangleq P_Y(A), \qquad A \in \mathcal{P}(Y), \tag{1.3}$$

[1] См., например, [1].

[2] В [1] операция сложения «+» определена как «max», умножения — как «min».

а значение $f(y)$ в (1.1) — как возможность равенства $\eta = y$, определив

$$f^{\eta}(y) \stackrel{\triangle}{=} P^{\eta}(\eta \in \{y\}), \qquad y \in Y. \tag{1.4}$$

Нечеткий элемент η назовем каноническим для $(Y, \mathcal{P}(Y), P^{\eta})$, а пространство $(Y, \mathcal{P}(Y), P^{\eta})$ — моделью η, функцию $f^{\eta}(\cdot) : Y \to [0,1]$ назовем распределением возможности $P^{\eta}(\cdot)$ (определяющим последнюю согласно равенству $P^{\eta}(A) = \sup_{y \in A} f^{\eta}(y),\ A \in \mathcal{P}(Y)$), или — распределением возможностей значений η, короче — распределением нечеткого элемента η.

Если X — произвольное множество, то любая функция $q(\cdot) : Y \to X$ определит нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$, принимающий значения в $(X, \mathcal{P}(X), P_X)$, где для любого[3] $A \in \mathcal{P}(X)$ $\quad P_X(A) \equiv P^{\xi}(A) \stackrel{\triangle}{=} P^{\xi}(\xi \in A) = P^{\eta}(\eta \in q^{-1}(A))$; $P^{\xi}(X) = 1$. Возможность $P^{\xi}(\cdot)$ определена распределением $f^{\xi}(x) \stackrel{\triangle}{=} P^{\xi}(\{\xi = x\}) = P^{\eta}(\eta \in q^{-1}(\{x\}))$, $x \in X$, а именно, $P^{\xi}(A) = \sup_{x \in A} f^{\xi}(x),\ A \in \mathcal{P}(X)$.

Функция $f^{\xi}(\cdot) :\ X \to [0,1]$ является распределением возможности $P^{\xi}(\cdot)$ и распределением нечеткого элемента ξ, канонического для $(X, \mathcal{P}(X), P^{\xi})$.

Замечание 1.1. В сказанном выше существенно использован тот факт, что в случае любого пространства с возможностью $(Y, \mathcal{B}, P_Y)$, где $\mathcal{B}$ — σ-алгебра подмножеств Y, возможность $P_Y(\cdot) : \mathcal{B} \to [0,1]$ может быть продолжена на класс $\mathcal{P}(Y)$ всех подмножеств Y [1]. Пусть, например, $\mathcal{B}$ – минимальная σ-алгебра подмножеств Y, содержащая все множества $Y_1, Y_2, \ldots$, образующие разбиение $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i, \quad Y_i \cap Y_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots$, причем среди множеств $Y_1, Y_2, \ldots$ нет одноточечных. Тогда возможность $P_Y(\cdot)$ в $(Y, \mathcal{B}, P_Y)$ не может быть задана распределением (1.1), поскольку значения $P_Y(\{y\}),\ y \in Y$ не определены. В этом случае канонический нечеткий элемент будет охарактеризован не распределением, а возможностями включений $P^{\eta}(\eta \in A),\ A \in \mathcal{B}$, так как среди всех множеств $A \in \mathcal{B}$ нет одноточечных.

В то же время, если $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и функция $q(\cdot) :\ Y \to X$ такова, что $q(y) = x_i,\ y \in Y_i,\ i = 1,2,\ldots$, то нечеткий элемент $\xi =$

[3] $q^{-1}(A) \stackrel{\triangle}{=} \{y \in Y,\ q(y) \in A\},\ q^{-1}(X) = Y$.

$q(\eta)$, канонический для $(X, \mathcal{P}(X), P^{\xi})$, и возможность $P^{\xi}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ имеют распределение $f^{\xi}(x_i) = P^{\xi}(\xi \in \{x_i\}) = P^{\eta}(\eta \in Y_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

Поскольку для любого события $A \in \mathcal{P}(X)$ возможности $P^{\xi}(A)$ и $P^{\xi}(X \backslash A)$ априори связаны лишь условием нормировки $1 = P^{\xi}(X) = \max(P^{\xi}(A), P^{\xi}(X \backslash A))$, в теории возможностей любое событие $A \in \in \mathcal{P}(X)$ охарактеризовано значениями двух мер — возможности $P^{\xi}(A)$ и дуальной возможности P^{ξ} необходимости N^{ξ},

$$N^{\xi}(A) \stackrel{\triangle}{=} \theta(P^{\xi}(X \backslash A)), \quad A \in \mathcal{P}(X).$$

Здесь и далее $\theta(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ — произвольная непрерывная, строго монотонно убывающая функция, удовлетворяющая условиям $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, $\theta(\theta(a)) = a$, $a \in [0,1]$. Мера $N^{\xi}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ обладает следующими свойствами:

- $N^{\xi}(A \bigcap B) = \min(N^{\xi}(A),\ N^{\xi}(B))$, $A, B \in \mathcal{P}(X)$;
- $N^{\xi}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \inf\limits_{i} N^{\xi}(A_i)$, $A_i \in \mathcal{P}(X)$, $i = 1, 2, \ldots$;
- $A \subset B \Rightarrow N^{\xi}(A) \leqslant N^{\xi}(B)$;
- $N^{\xi}(\varnothing) = 0$, $N^{\xi}(X) = 1$;
- $N^{\xi}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i \geqslant n} A_i) \geqslant \inf\limits_{n} \sup\limits_{i \geqslant n} N^{\xi}(A_i)$, $A_i \in \mathcal{P}(X)$, $i = 1, 2, \ldots$

Для любого $A \in \mathcal{P}(X)$

$$P^{\xi}(A) < 1 \Rightarrow N^{\xi}(A) = 0 \quad \text{и} \quad N^{\xi}(A) > 0 \Rightarrow P^{\xi}(A) = 1 \ [1].$$

1.1. Множества P-меры ноль и N-меры единица

Пусть $(Y, \mathcal{P}(Y), P^{\eta})$ — пространство с возможностью, η — канонический нечеткий элемент, $f^{\eta}(\cdot) : Y \to [0,1]$ — его распределение, определяющее возможность $P^{\eta}(A) = \sup\limits_{y \in A} f^{\eta}(y)$, $A \in \mathcal{P}(Y)$, значение $f^{\eta}(y)$ — возможность равенства $\eta = y \in Y$. Рассмотрим разбиение $Y = Y_{(0)} \cup Y_{(1)}$, где $Y_{(0)} = \{y \in Y,\ f^{\eta}(y) = 0\}$, $Y_{(1)} = \{y \in Y,\ f^{\eta}(y) > 0\}$, $Y_{(0)} \cap Y_{(1)} = \varnothing$.

Отметим, что

- $Y_{(1)}$ — *минимальное* по включению множество в Y, для которого

$$N^\eta(Y_{(1)}) = \theta(P^\eta(Y\setminus Y_{(1)})) = 1. \tag{1.5}$$

Действительно, для любого[4] $A = Y_{(1)}\setminus\{y\}$, $y \in Y_{(1)}$, $N^\eta(A) = \theta(P^\eta(Y_{(0)} \cup \{y\}) = \theta \circ f^\eta(y) < 1$, ибо $f^\eta(y) > 0$; *любое множество, содержащее $Y_{(1)}$, назовем множеством N^η-меры единица*;

- $Y_{(0)}$ — *максимальное* по включению множество в Y, для которого

$$P^\eta(Y_{(0)}) = 0, \tag{1.6}$$

поскольку для любого $A = Y_{(0)} \cup \{y\}$, $y \in Y_{(1)}$, $P^\eta(A) = \max(P^\eta(Y_{(0)}), P^\eta(\{y\})) = f^\eta(y) > 0$; *любое множество, содержащееся в $Y_{(0)}$, назовем множеством P^η-меры ноль.*

Заметим, что $P(Y_{(1)}) = N(Y_{(1)}) = 1$ и $N(Y_{(0)}) = P(Y_{(0)}) = 0$.

Эти свойства множеств $Y_{(0)}$ и $Y_{(1)}$ можно принять в качестве их определения в общем случае, в частности и тогда, когда возможность $P(\cdot) : \mathcal{B} \to [0,1]$, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(Y)$ подмножеств Y, не имеет распределения $f^\eta(\cdot) : Y \to [0,1]$.

Лемма 1.1. *Пусть $Y_{(1)}$ — минимальное по включению множество в Y, для которого $N(Y_{(1)}) = 1$, а $Y_{(0)}$ — максимальное по включению множество в Y, для которого $P(Y_{(0)}) = 0$, тогда $Y = Y_{(0)} \cup Y_{(1)}, Y_{(0)} \cap Y_{(1)} = \varnothing$.*

Доказательство. Так как $1 = N(Y_{(1)}) = \theta(P(Y\setminus Y_{(1)}))$, то $P(Y\setminus Y_{(1)}) = 0$, то есть $Y\setminus Y_{(1)} \subset Y_{(0)}$, или иначе $Y_{(1)} \supset Y\setminus Y_{(0)}$. С другой стороны $N(Y\setminus Y_{(0)}) = \theta(P(Y_{(0)})) = 1$, то есть $Y\setminus Y_{(0)} \supset Y_{(1)}$. Следовательно, $Y\setminus Y_{(0)} = Y_{(1)}$.

Следующая лемма характеризует свойства разбиения $Y = Y_{(0)} \cup Y_{(1)}$.

Лемма 1.2. *Пусть $A \in \mathcal{P}(Y)$, $A_0 \subset Y_{(0)}$, $A_1 \supset Y_{(1)}$, тогда $P^\eta(A \cup A_0) = P^\eta(A)$, $P^\eta(A \cap A_0) = 0$, $N^\eta(A \cup A_0) = N^\eta(A)$, $N^\eta(A \cap A_0) = 0$, $P^\eta(A \cap A_1) = P^\eta(A)$, $N^\eta(A \cap A_1) = N^\eta(A)$.*

[4] $\vartheta \circ f^\eta(y) \triangleq \theta(f^\eta(y))$, $\eta \in Y$.

Доказательство. Действительно, $P^\eta(A \cup A_0) = \max(P^\eta(A), P^\eta(A_0)) = P^\eta(A)$, $P^\eta(A \cap A_0) \leqslant P^\eta(A_0) = 0$; $N^\eta(A) \leqslant N^\eta(A \cup A_0) = \theta(P^\eta((Y \backslash A) \cap (Y \backslash A_0))) \leqslant \theta(P^\eta((Y \backslash A) \cap Y_{(1)})) = N^\eta(A)$, ибо $Y \backslash A_0 \supset Y_{(1)}$, $N^\eta(A \cap A_0) = \min(N^\eta(A), N^\eta(A_0)) = N^\eta(A_0) = 0$ и наконец, $P^\eta(A \cap A_1) = \theta(N^\eta((Y \backslash A) \cup (Y \backslash A_1))) = \theta(N^\eta(Y \backslash A)) = P^\eta(A)$, $N^\eta(A \cap A_1) = \theta(P^\eta((Y \backslash A) \cup (Y \backslash A_1))) = \theta(P^\eta(Y \backslash A)) = N^\eta(A)$, ибо $Y \backslash A_1 \subset Y_{(0)}$.

1.2. Функции нечетких элементов. Равенство, эквивалентность

Если $q(\cdot) : Y \to X$ — заданная функция и нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$ — функция нечеткого элемента η, то

$$f^\xi(x) = P^\eta(\eta \in q^{-1}(x)) = \sup\{f^\eta(y) \mid y \in Y_{(1)}, q(y) = x\}, \quad x \in X, \tag{1.7}$$

— распределение[5] ξ, где

$$q^{-1}(x) \triangleq \{y \in Y,\ q(y) = x\}, \quad x \in X \tag{1.8}$$

Если $\bigcup\limits_{x \in X} q^{-1}(x) \supset Y_{(1)}$, то $\sup\limits_{x \in X} f^\xi(x) = 1$.

Определение 1.1. Пусть $q_i(\cdot) : Y \to X$, $i = 1, 2$. Нечеткие элементы $\xi_i = q_i(\eta)$, $i = 1, 2$, назовем

- равными (с необходимостью единица), $\xi_1 = \xi_2 \pmod{N^\eta}$, если $\{y \in Y,\, q_1(y) = q_2(y)\} \supset Y_{(1)}$;
- эквивалентными, $\xi_1 \simeq \xi_2$, если $f^{\xi_1}(x) = f^{\xi_2}(x)$, $x \in X$, где $f^{\xi_i}(x) = \sup\{f^\eta(y) \mid y \in Y,\ q_i(y) = x\}$, $x \in X$, — распределение ξ_i, $i = 1, 2$.

Если x_1 — некоторый фиксированный элемент X и $\xi_1 \triangleq q_1(\eta) = x_1 \pmod{N^\eta}$, то есть $\{y \in Y,\ q_1(y) = x_1\} \supset Y_{(1)}$, то нечеткий элемент ξ_1 назовем четким, равным $x_1 \pmod{N^\eta}$.

---

[5] Для любого $A \in \mathcal{P}(Y)$ $\sup\{f^\eta(y),\ y \in A\} = \sup\{f^\eta(y) \mid y \in A \cap Y_{(1)}\}$, см. лемму 1.2

Лемма 1.3. *Пусть* $\xi_i = q_i(\eta),\ i = 1, 2$. *Тогда*

- *если* $\xi_1 = \xi_2 \ (mod\ N^\eta)$, *то* $\xi_1 \simeq \xi_2$;
- *если* $\xi_1 \simeq \xi_2$, *то для любого* $A \in \mathcal{P}(X)$ $P^\eta(\xi_1 \in A) = P^\eta(\xi_2 \in A)$;
- *если* $\xi_1 = x_1 \ (mod\, N^\eta)$, *то* $\xi_1 \simeq x_1$ *и наоборот, если* $\xi_1 \simeq x_1$, *то* $\xi_1 = x_1 \ (mod\, N^\eta)$.

Доказательство. Если $\xi_1 = \xi_2$ (mod N^η), то $f^{\xi_1}(x) = \sup\{f^\eta(y)|y \in \in Y,\ q_1(y) = x\} = \sup\{f^\eta(y) \mid y \in Y_{(1)},\ q_1(y) = x\} = \sup\{f^\eta(y) \mid y \in \in Y_{(1)},\ q_2(y) = x\} = f^{\xi_2}(x),\ x \in X$.

Если $\xi_1 \simeq \xi_2$, то $P^\eta(\xi_1 \in A) = \sup\{f^\eta(y) \mid y \in Y_{(1)},\ q_1(y) \in \in A\} = \sup\{\sup\{f^\eta(y)|y \in Y_{(1)},\ q_1(y) = x\}|x \in A\} = \sup\{f^{\xi_1}(x)|x \in \in A\} = \sup\{f^{\xi_2}(x)|x \in A\} = P^\eta(\xi_2 \in A)$.

Наконец, если $\xi_1 = x_1(\text{mod } N^\eta)$, то согласно первому утверждению леммы $\xi_1 \simeq x_1(\text{mod } N^\eta)$, причем распределение ξ_1

$$f^{\xi_1}(x) = P^\eta(\xi_1 = x) = \\ = \sup\{f^\eta(y)|y \in Y_{(1)},\ q_1(y) = x\} = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_1, \\ 0, & \text{если } x \neq x_1, \end{cases} \quad x \in X.$$

С другой стороны, если это условие выполнено, то $P^\eta(\xi_1 = x_1) = 1$ и $P^\eta(\xi_1 \neq x_1) = 0$, то есть $\{y \in Y,\ q_1(y) \neq x_1\} \subset Y_{(0)}$, поэтому $\{y \in \in Y,\ q_1(y) = x_1\} \supset Y_{(1)}$, то есть $\xi_1 = x_1(\text{mod} N^\eta)$.

На рис. 1 приведен пример, показывающий, что из эквивалентности $\xi_1 \simeq \xi_2$ равенство $\xi_1 = \xi_2$ (mod N^η), вообще говоря, не следует.

1.3. Независимость нечетких элементов. Условное распределение. Переходная возможность

Пусть $q_i(\cdot) : Y \to X_i,\ i = 1, \ldots, n,$ — заданные функции.

Определение 1.2. Нечеткие элементы $\xi_i = q_i(\eta),\ i = 1, \ldots, n$, со значениями соответственно в X_i, $i = 1, \ldots, n$, назовем взаимно независимыми, или — независимыми в совокупности, если для любых $x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n$, возможность системы равенств $\xi_i = x_i,\ i = 1, \ldots, n$,

$$f^{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} f^{\xi_i}(x_i), \tag{1.9}$$

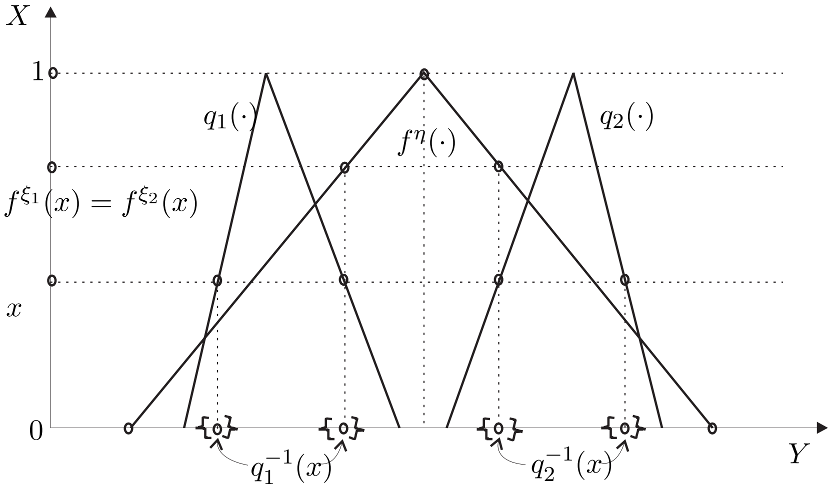

Рис. 1. В силу симметрии функций $f^{\eta}(\cdot)$, $q_1(\cdot)$ и $q_2(\cdot)$, показанной на рисунке, $f^{\xi_1}(x) = f^{\xi_2}(x)$, $x \in X$, в то время как $q_1(y) \neq q_1(y)$, $y \in Y$.

где

$$f^{\xi_i}(x_i) = \sup\{f^{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)|x_1 \in X_1,\ldots,x_{i-1} \in X_{i-1},$$
$$x_{i+1} \in X_{i+1},\ldots x_n \in X_n\},\ x_i \in X_i, \quad (1.10)$$

— маргинальное распределение ξ_i, $i = 1,\ldots,n$.

В общем случае, когда η — канонический нечеткий элемент для $(Y, \mathcal{B}, P_Y)$, нечеткие элементы $\xi_1 = q_1(\eta),\ldots,\xi_n = q_n(\eta)$ принимают значения соответственно в $(X_1, \mathcal{A}_1),\ldots,(X_n, \mathcal{A}_n)$, где $q_1(\cdot) : Y \to X_1,\ldots,q_n(\cdot) : Y \to X_n$ суть $\mathcal{B}, \mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{B}, \mathcal{A}_n$ -измеримые функции[6], тогда взаимная независимость $\xi_1,\ldots,\xi_n$ определяется следующим образом:

Определение 1.3. Нечеткие элементы $\xi_1,\ldots,\xi_n$, определенные на $(Y, \mathcal{B}, P_Y)$ и принимающие значения соответственно в $(X_1, \mathcal{A}_1),\ldots,(X_n, \mathcal{A}_n)$, называются взаимно независимыми, если для любых множеств $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 1,\ldots,n$,

[6]Функция $q_j(\cdot) : Y \to X_j$ $\mathcal{B}, \mathcal{A}_j$-измерима, то есть $\forall A_j \in \mathcal{A}_j$ $q_j^{-1}(A_j) \in \mathcal{B}$, $j = 1,\ldots,n$.

$$P_Y(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = \min(P_Y(\xi_1 \in A_1), \dots, P_Y(\xi_n \in A_n)). \tag{1.11}$$

Если $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{A}_j = \mathcal{P}(X_j)$, $j = 1, \dots, n$, то определения 1.2 и 1.3 эквивалентны. Действительно, в таком случае возможности в левой и правой частях равенства (1.11) могут быть заданы распределениями, и если равенство (1.9) выполнено, то $P_Y(\xi_1 \in \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = \sup \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{f^{\xi_i}(x_i) | x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup\limits_{x_i \in A_i} f^{\xi_i}(x_i) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} P_Y(\xi_i \in A_i)$, то есть выполнено условие (1.11). Наоборот, если для любых $A_j \in \mathcal{P}(X_j)$ выполнено условие (1.11), то для произвольных $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, выбрав в (1.11) $A_i = \{x_i\}, i = 1, \dots, n$, получим (1.9).

Лемма 1.4. *Пусть $z_i(\cdot) : X_i \to Z_i$, $i = 1, \dots, n$, — произвольные функции, и нечеткие элементы ξ_i, $i = 1, \dots, n$, взаимно независимы. Тогда взаимно независимы и нечеткие элементы $\zeta_i = z_i(\xi_i)$, $i = 1, \dots, n$, причем для любых $z_i \in Z_i$, $i = 1, \dots, n$, $f^{\zeta_1, \dots, \zeta_n}(z_1, \dots, z_n) = \sup\{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f^{\xi_i}(x_i) \mid x_i \in X_i,\ z_i(x_i) = z_i,\ i = 1, \dots, n\} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup\{f^{\xi_i}(x_i) \mid x_i \in X_i, z_i(x_i) = z_i\} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f^{\zeta_i}(z_i)$, где $f^{\zeta_i}(z_i) = \sup\{f^{\xi_i}(x_i) \mid x_i \in X_i,\ z_i(x_i) = z_i\}$, $z_i \in Z_i$, $i = 1, \dots, n$.*

В частности, если $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ и

$$f^{\eta}(y) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i^{\eta}(y_i), \quad y_i \in Y_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.12}$$

то при любых функциях $q_i(\cdot) : Y_i \to X_i$, $i = 1, \dots, n$, нечеткие элементы $\xi_i = q_i(\eta_i)$, $i = 1, \dots, n$, взаимно независимы, причем для любых $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$,

$$f^{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} f^{\xi_i}(x_i), \tag{1.13}$$

где

$$f^{\xi_i}(x_i) = \sup\{f^{\eta_i}(y_i) \mid y_i \in Y_i,\ q_i(y_i) = x_i\},\ x_i \in X_i,\ i = 1, \dots, n. \tag{1.14}$$

В дальнейшем, как правило, используется модель независимости (1.12), (1.13), (1.14), верная при *любых функциях* $q_i(\cdot) : Y_i \to X_i,\ i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.4. Вариантом условного распределения нечетких элементов $\xi_1, \ldots, \xi_k$ при условии $\xi_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, \xi_n = x_n$ называется любое решение $f^{\xi_1,\ldots,\xi_k|\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_k|\ x_{k+1}, \ldots, x_n)$ уравнения

$$\min(f^{\xi_1,\ldots,\xi_k|\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_k|x_{k+1},\ldots,x_n),\ f^{\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_{k+1},\ldots,x_n)) = \\ = f^{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n),\ x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n, \quad (1.15)$$

где

$$f^{\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \sup_{\substack{x_i \in X_i,\\ i=1,\ldots,k}} f^{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) \quad (1.16)$$

— маргинальное распределение $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$, [1].

Для упрощения формулировок обозначим $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \sim \zeta_1$, $(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) \sim \zeta_2$, $X_1 \times \ldots \times X_k) \sim Z_1$, $X_{k+1} \times \ldots \times X_n \sim Z_2$, $(x_1, \ldots, x_k) \sim z_1$, $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \sim z_2$ и рассмотрим уравнение (1.15) при условии (1.16), переписав их в виде

$$\min(f^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|z_2),\ f^{\zeta_2}(z_2)) = f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2),\ z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \quad (1.17)$$

где

$$f^{\zeta_2}(z_2) = \sup_{z_1 \in Z_1} f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2). \quad (1.18)$$

Поскольку в (1.17), (1.18) $f^{\zeta_2}(z_2) \geqslant f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2),\ z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2$, уравнение (1.17) всегда имеет решение. Любой вариант условного распределения ζ_1 при условии $\zeta_2 = z_2$ можно определить равенством

$$f^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|z_2) = \begin{cases} f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2), & \text{если } f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2) < f^{\zeta_2}(z_2), \\ q(f^{\zeta_2}(z_2)), & \text{если } f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2) = f^{\zeta_2}(z_2), \end{cases} \\ z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \quad (1.19)$$

где $q(\cdot) : [0, 1] \to [0, 1]$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $q(a) \geqslant a,\ a \in [0, 1]$.

Заметим, что при некоторых $z_2 \in Z_2$ среди вариантов условного распределения $f^{\zeta_1|\zeta_2}(\cdot|z_2)$ может и не быть распределения возможности. Действительно, если в (1.18) при $\bar{z}_2 \in Z_2$ точная верхняя грань не достигается, то $f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1,\bar{z}_2) < f^{\zeta_2}(\bar{z}_2),\ z_1 \in Z_1$, и, следовательно, в (1.17) (см. (1.19))

$$\min(f^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|\bar{z}_2), f^{\zeta_2}(\bar{z}_2)) = f^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|\bar{z}_2) = f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1,\bar{z}_2). \tag{1.20}$$

Если при этом $f^{\zeta_2}(\bar{z}_2) < 1$, то согласно (1.18), (1.20) $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} f^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|\bar{z}_2) = f^{\zeta_2}(\bar{z}_2) < 1$.

Нетрудно заметить, что вариант $f^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|\bar{z}_2),\ z_1 \in Z_1$, условного распределения будет распределением, если и только если либо $f^{\zeta_2}(\bar{z}_2) = 1$, либо $f^{\zeta_2}(\bar{z}_2) = \max\limits_{z_1 \in Z_1} f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1,\bar{z}_2)$ (см. ниже лемму 1.5).

Для определения условного распределения $f^{\zeta_1|\zeta_2}(\cdot|z_2)$ при каждом $z_2 \in Z_2$ необходимо знать совместное распределение $f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1,z_2),\ z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2$, нечетких элементов $\zeta_1,\ \zeta_2$. Формулами (1.17), (1.18) можно воспользоваться для определения $f^{\zeta_1,\zeta_2}(\cdot,\cdot)$, если ввести понятие переходной возможности и ее распределения[7].

Определение 1.5. Отображение $P(\cdot|\cdot) : \mathcal{P}(Z_1) \times Z_2 \to [0,1]$ называется переходной возможностью на $(Z_1, \mathcal{P}(Z_1)), (Z_2, \mathcal{P}(Z_2))$, если при каждом $z_2 \in Z_2$ $P(\cdot|z_2)$ есть возможность[8] на $(Z_1, \mathcal{P}(Z_1))$; функция $f(\cdot|\cdot) : Z_1 \times Z_2 \to [0,1]$ называется распределением переходной возможности $P(\cdot|\cdot) : \mathcal{P}(Z_1) \times Z_2 \to [0,1]$, если при каждом $z_2 \in Z_2$ $f(\cdot|z_2) : Z_1 \to [0,1]$ — распределение возможности $P(\cdot|z_2) : \mathcal{P}(Z_1) \to [0,1]$, то есть если для любого $A \in \mathcal{P}(Z_1)$ $P(A|z_2) = \sup\limits_{z_1 \in A} f(z_1|z_2)$, и, в частности, $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} f(z_1|z_2) = 1,\ z_2 \in Z_2$.

Непосредственным следствием определения 1.5 является тот факт, что для (произвольной) возможности $P_{Z_2}(\cdot) : \mathcal{P}(Z_2) \to [0,1]$ на $(Z_2, \mathcal{P}(Z_2))$, заданной любым распределением $f(\cdot) : Z_2 \to [0,1]$,

$$f(z_1,z_2) = \min(f(z_1|z_2), f(z_2)),\ z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \tag{1.21}$$

---

[7]Распределение переходной возможности обозначим так же, как обозначено условное распределение.

[8]то есть аддитивная, счетно-аддитивная и нормированная мера на $(Z_1, \mathcal{P}(Z_1))$.

— распределение возможности $P_{Z_1\times Z_2}(\cdot) : \mathcal{P}(Z_1\times Z_2)\to[0,1]$ на $(Z_1\times Z_2,\ \mathcal{P}(Z_1\times Z_2))$, определенной формулой

$$P_{Z_1\times Z_2}(C)=\sup_{(z_1,z_2)\in C} f(z_1,z_2),\ C\in\mathcal{P}(Z_1\times Z_2), \tag{1.22}$$

и при этом в (1.21)

$$f(z_2)=\sup_{z_1\in Z_1} f(z_1,z_2),\ z_2\in Z_2. \tag{1.23}$$

Действительно, аддитивность и счетная аддитивность $P_{Z_1\times Z_2}(\cdot)$ (см. (1.22)) очевидны и
$P_{Z_1\times Z_2}\ (Z_1\times Z_2)=\sup\limits_{z_2\in Z_2}\sup\limits_{z_1\in Z_1}\min(f(z_1|z_2),f(z_2))=\sup\limits_{z_2\in Z_2} f(z_2)=1$, ибо $\sup\limits_{z_1\in Z_1}\min(f(z_1|z_2),f(z_2))=\min(\sup\limits_{z_1\in Z_1} f(z_1|z_2),\ f(z_2))=f(z_2)$, $z_2\in$ $\in Z_2$.

В следующей лемме охарактеризован класс распределений $f(\cdot,\ \cdot)$, определенных формулой (1.21), в которой $f(\cdot|\cdot) : Z_1\times Z_2\to[0,1]$ — распределение переходной возможности и $f(\cdot) : Z_2\to[0,1]$ — распределение возможности.

Лемма 1.5. *Пусть* $Z_2=Z_{(0)}\bigcup Z_{(0,1)}\bigcup Z_{(1)}$, *где* $Z_{(0)}=\{z_2\in Z_2,$ $f(z_2)=0\}$, $Z_{(0,1)}=\{z_2\in Z_2,\ 0<f(z_2)<1\}$, $Z_{(1)}=\{z_2\in Z_2,\ f(z_2)=$ $1\}$ *— попарно непересекающиеся подмножества* Z_2. *Тогда для любого* $z_2\in Z_{(0)}\bigcup Z_{(1)}$ *существует функция* $f(\cdot|z_2) : Z_1\to[0,1]$, *удовлетворяющая уравнению* (1.21), *причем такая, что*

$$\sup_{z_1\in Z_1} f(z_1|z_2)=1. \tag{1.24}$$

Если $Z_{(0,1)}\neq\varnothing$, *то для существования функции* $f(\cdot|z_2) : Z_1\to[0,1]$, *удовлетворяющей уравнению* (1.21) *и условию* (1.24) *при любом* $z_2\in$ $\in Z_{(0,1)}$, *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $z_2\in Z_{(0,1)}$

$$Z_1(z_2)=\{z_1\in Z_1,\ f(z_1,z_2)=f(z_2)\overset{\triangle}{=}\sup_{\bar z_1\in Z_1} f(\bar z_1,z_2)\}\neq\varnothing. \tag{1.25}$$

Иначе говоря, для того, чтобы существовала функция $f(\cdot|z_2) : Z_1\to$ $[0,1]$, *удовлетворяющая уравнению* (1.21) *и условию* (1.24) *при любом*

$z_2 \in Z_2$, необходимо и достаточно, чтобы либо $Z_{(0,1)} = \varnothing$, либо при любом $z_2 \in Z_{(0,1)} \neq \varnothing$

$$f(z_2) = \max_{z_1 \in Z_1(z_2)} f(z_1, z_2).$$

Доказательство. Если $z_2 \in Z_{(0)}$, то $f(z_2) = 0$ и согласно (1.21) $f(z_1, z_2) = 0$, $z_1 \in Z_1$. Следовательно, для $z_2 \in Z_{(0)}$ функция $f(\cdot|\ z_2) : Z_1 \to [0,1]$, удовлетворяющая условиям (1.21) и (1.24), существует. Если $z_2 \in Z_{(1)}$, то $f(z_2) = 1$, и, поскольку в таком случае согласно (1.21) $f(z_1, z_2) = f(z_1|z_2)$, $z_1 \in Z_1$, то $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} f(z_1|z_2) = \sup\limits_{z_1 \in Z_1} f(z_1, z_2) = f(z_2) = 1$. Следовательно, и при $z_2 \in Z_{(1)}$ существует функция $f(\cdot|\ z_2) : Z_1 \to [0,1]$, удовлетворяющая (1.21) и (1.24). Поэтому, если $Z_{(0,1)} = \varnothing$, то такая функция существует при любом $z_2 \in Z_2$.

Если $Z_{(0,1)} \neq \varnothing$, $z_2 \in Z_{(0,1)}$ и $Z_1(z_2) = \varnothing$, то для любого $z_1 \in Z_1$ $f(z_1, z_2) < f(z_2)$ и согласно равенству (1.21) $f(z_1|z_2) = f(z_1,\ z_2)$, $z_1 \in$ $\in Z_1$. Поэтому в этом случае $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} f(z_1|z_2) = \sup\limits_{z_1 \in Z_1} f(z_1, z_2) = f(z_2) < 1$. Если же при любом $z_2 \in Z_{(0,1)}$ $Z_1(z_2) \neq \varnothing$, то для любого $z_2 \in Z_{(0,1)}$ и любого $z_1 \in Z_1(z_2)$ в (1.21) можно выбрать $f(z_1|z_2) > f(z_2) = f(z_1, z_2)$, причем, очевидно, так, чтобы $\max_{z_1 \in Z_1(z_2)} f(z_1|z_2) = 1$.

Замечание 1.2. Пусть $f(\cdot|\cdot) : Z_1 \times Z_2 \to [0,1]$ — некоторое распределение переходной возможности, $f(\cdot) : Z_2 \to [0,1]$ — некоторое распределение возможности, и $f(\cdot,\cdot)$ — отвечающая им левая часть равенства (1.21). Тогда, считая , что в (1.21) $f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2) \triangleq f(z_1, z_2)$ и соответственно в силу (1.23) $f^{\zeta_2}(z_2) \triangleq f(z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, и рассматривая (1.21) как уравнение относительно $f^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|z_2) \triangleq f(z_1|z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, найдем, что в таком случае существует вариант условного распределения $f^{\zeta_1|\zeta_2}(\cdot|z_2)$, являющийся распределением возможности при каждом $z_2 \in Z_2$. Таким вариантом является, в частности, переходная возможность, рассматриваемая как функция $f(\cdot|z_2) : Z_1 \to [0,1]$ при каждом фиксированном $z_2 \in Z_2$. Далее, говоря об условном распределении, будем иметь в виду такую его конструкцию.

§ 2. Нечеткие функции. Равенство, эквивалентность, независимость

Пусть $q_i(\cdot,\cdot) : Y \times T \to X$ и $\xi(t) = q(\eta,t)$, $t \in T$, — нечеткая функция, ее значением при каждом $t \in T$ является нечеткий элемент $\xi(t)$.

Что касается распределения нечеткой функции $\xi(\cdot)$, то[9]

$$f^{\xi(\cdot)}(x(\cdot)) = P^\eta(\forall t \in T\ \xi(t) = x(t)) =$$
$$= \sup\{f^\eta(y)|y \in \bigcap_{t\in T}\{\overline{y} \in Y,\ q(\overline{y},t) = x(t)\}\},\ x(\cdot) : T \to X, \quad (2.1)$$

— возможность равенства $\xi(\cdot) = x(\cdot)$. Распределение возможностей значения $\xi(t)$ при любом фиксированном $t \in T$ дается равенством $f^{\xi(t)}(x) = P^\eta(\xi(t) = x) = \sup\{f^\eta(y)|y \in Y,\ q(y,t) = x\}$, $x \in X$.

Определение 2.1. Нечеткие функции $\xi_1(\cdot)$ и $\xi_2(\cdot)$ назовем

- равными (с необходимостью единица), $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot) \pmod{N^\eta}$, если $\forall t \in T\ \{y \in Y,\ q_1(y,t) = q_2(y,t)\} \supset Y_{(1)}$, или, что то же самое,
$$\bigcap_{t\in T}\{y \in Y,\ q_1(y,t) = q_2(y,t)\} \supset Y_{(1)}. \quad (2.2)$$
- эквивалентными, $\xi_1(\cdot) \simeq \xi_2(\cdot)$, если $\forall x(\cdot) : T \to X$
$$f^{\xi_1(\cdot)}(x(\cdot)) = f^{\xi_2(\cdot)}(x(\cdot)). \quad (2.3)$$

Теорема 2.1. 1. *Равенство $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot)$ $(mod\ N^\eta)$ эквивалентно каждому из следующих условий*

$$P^\eta(\exists t \in T\ q_1(\eta,t) \neq q_2(\eta,t)) = 0 \quad (2.4)$$

или

$$N^\eta(\forall t \in T\ q_1(\eta,t) = q_2(\eta,t)) = 1. \quad (2.5)$$

[9] $x(\cdot) : T \to X$ — «обычная», «четкая» функция.

2. *Если* $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot)$ $(mod\ N^\eta)$, *то* $\xi_1(\cdot) \simeq \xi_2(\cdot)$, *если же* $\xi_1(\cdot) = x_1(\cdot)(mod\ N^\eta)$, *то эквивалентность* $\xi_1(\cdot) \simeq x_1(\cdot)$ *означает то же самое. Иначе говоря,* $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot)(mod\ N^\eta) \Rightarrow \xi_1(\cdot) \simeq \xi_2(\cdot)$, $\xi_1(\cdot) = x_1(\cdot)(mod\ N^\eta) \Leftrightarrow \xi_1(\cdot) \simeq x_1(\cdot)$.

Доказательство. 1. Действительно, условие (2.4) означает, что $\sup\{f^\eta(y)|\ y \in \bigcup_{t\in T}\{\overline{y} \in Y,\ q_1(\overline{y},t) \neq q_2(\overline{y},t)\}\} = 0$, что эквивалентно $\bigcup_{t\in T}\{y \in Y,\ q_1(y,t) \neq q_2(y,t)\} \subset Y_{(0)}$, а это включение эквивалентно включению (2.2).

С другой стороны равенство (2.4) эквивалентно (2.5), ибо $N^\eta(\forall t \in \in T\ q_1(\eta,t) = q_2(\eta,t)) = \theta(P^\eta(\exists t \in T\ q_1(\eta,t) \neq q_2(\eta,t))) = 1$.

2. Пусть выполнено условие (2.2), означающее, что $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot)$ (mod N^η). Тогда для любой функции $x(\cdot) : T \to X$ $f^{\xi_1(\cdot)}(x(\cdot)) = \sup\{f^\eta(y)|y \in \bigcap_{t\in T}\{\overline{y} \in Y_{(1)},\ q_1(\overline{y},t) = x(t)\}\} = \sup\{f^\eta(y)|y \in \bigcap_{t\in T}\{\overline{y} \in \in Y_{(1)},\ q_2(\overline{y},t) = x(t)\}\} = f^{\xi_2(\cdot)}(x(\cdot))$, ибо $\forall t \in T$ и $\forall y \in Y_{(1)}$ $q_1(y,t) = q_2(y,t)$.

Пусть теперь $\xi_1(\cdot) = x_1(\cdot)$ (mod N^η). Тогда

$$f^{\xi_1(\cdot)}(x(\cdot)) = \sup\{f^\eta(y)|\ y \in Y_{(1)},\ \forall t \in T\ q_1(y,t) = x(t)\} = \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } \forall t \in T\ x(t) = x_1(t), \\ 0, & \text{если } \exists t \in T\ x(t) \neq x_1(t). \end{cases} \tag{2.6}$$

Наоборот, если имеет место равенство (2.6), то есть если $\xi_1(\cdot) \simeq x_1(\cdot)$, то $\{y \in Y,\ \exists t \in T,\ q_1(y,t) \neq x_1(t)\} \subset Y_{(0)}$, или, что то же самое, $\{y \in Y,\ \forall t \in T,\ q_1(y,t) = x_1(t)\} \supset Y_{(1)}$, то есть $\xi_1(\cdot) = x_1(\cdot)$ (mod N^η).

Определение 2.2. Нечеткую функцию $\xi(\cdot)$ назовем нечеткой функцией с независимыми значениями, если для любой функции $x(\cdot) : T \to X$

$$f^{\xi(\cdot)}(x(\cdot)) = \inf_{t\in T} f^{\xi(t)}(x(t)), \tag{2.7}$$

где $f^{\xi(t)}(x(t)) = P^\eta(\xi(t) = x(t)) = \sup\{f^\eta(y)|y \in Y,\ q(y,t) = x(t)\}$ — возможность равенства $\xi(t) = x(t),\ t \in T$.

Согласно определениям 2.1, 2.2, если $\xi_1(\cdot)$ — нечеткая функция с независимыми значениями и $\xi_2(\cdot) \simeq \xi_1(\cdot)$, то и $\xi_2(\cdot)$ — нечеткая функция с независимыми значениями.

Теорема 2.2. *Пусть $\xi(\cdot) : T \to X$ — нечеткая функция с независимыми значениями, $f^{\xi(\cdot)}(x(\cdot))$, $x(\cdot) : T \to X$, — ее распределение и $Q_\cdot : T \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждому $t \in T$ множество $Q_t \in \mathcal{P}(X)$.*

Тогда

$$P^{\eta}(\xi(\cdot) \in Q_\cdot) = P(\forall t \in T\ \xi(t) \in Q_t) = \inf_{t \in T} \sup_{x \in Q_t} f^{\xi(t)}(x). \tag{2.8}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ множество $D_{t,\varepsilon} = \{x \in \in Q_t, f^{\xi(t)}(x) \geqslant \sup\limits_{\overline{x} \in Q_t} f^{\xi(t)}(\overline{x}) - \varepsilon\} \neq \neq \varnothing$, $t \in T$, поэтому для любого $x_{t,\varepsilon} \in D_{t,\varepsilon}$ $\inf\limits_{t \in T} \sup\limits_{x \in Q_t} f^{\xi(t)}(x) \geqslant \sup\{\inf\limits_{t \in T} f^{\xi(t)}(x(t)) | x(\cdot) : T \to X,\ \forall t \in \in T\ x(t) \in Q_t\} \geqslant \inf\limits_{t \in T} f^{\xi(t)}(x_{t,\varepsilon}) \geqslant \inf\limits_{t \in T} \sup\limits_{x \in Q_t} f^{\xi(t)}(x) - \varepsilon$. Равенство (2.8) следует отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 2.2.

Следствие 2.1. *Пусть $\xi(\cdot) : T \to X$ — нечеткая функция с независимыми значениями и $\overline{z}(\cdot) : X \to Z$ — произвольная функция. Тогда $\zeta(t) = \overline{z}(\xi(t))$, $t \in T$, — нечеткая функция с независимыми значениями, причем для любой функции $z(\cdot) : T \to Z$, $f^{\zeta(\cdot)}(z(\cdot)) = \inf\limits_{t \in T} f^{\zeta(t)}(z(t))$, где*[10] *$f^{\zeta(t)}(z) = \sup\limits_{x \in \overline{z}^{-1}(z)} f^{\xi(t)}(x)$, $z \in Z$. Действительно, $P(\zeta(\cdot) = z(\cdot)) = P(\xi(\cdot) \in \overline{z}^{-1}(z(\cdot))) = \sup\limits_{x \in Q_t} f^{\xi(t)}(x)$, где $Q_t = \overline{z}^{-1}(z(t)) \triangleq \{x \in X,\ \overline{z}(x) = z(t)\}$, $t \in T$, и согласно* (2.8) *$P(\zeta(\cdot) = z(\cdot)) = P(\xi(\cdot) \in Q_\cdot) = \inf\limits_{t \in T} \sup\limits_{x \in Q_t} f^{\xi(t)}(x) = \inf\limits_{t \in T} f^{\zeta(t)}(z(t))$, $z(\cdot) : T \to Z$.*

Следствие 2.2. *Пусть $Q_t = X$ при $t \in T \backslash \{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, $Q_{t_i} = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ — одноточечные множества в X и $\xi(\cdot) : T \to X$*

[10] По определению $\sup\limits_{x \in \varnothing} f^{\xi(t)}(x) = 0$, $t \in T$.

— нечеткая функция с независимыми значениями, распределенная согласно (2.7)*. Тогда согласно* (2.8)

$$P^\eta(\xi(\cdot) \in Q.) = P^\eta(\xi(t_i) = x_i,\ i = 1, 2, \ldots) = \\ = \inf_{i=1,2,\ldots} f^{\xi(t_i)}(x_i),\ x_i \in X,\ i = 1, 2, \ldots \quad (2.9)$$

Иными словами, сужение $\xi(\cdot) : T \to X$ *на* $\{t_1, t_2, \ldots\}$ *есть нечеткая функция с независимыми значениями, распределенная согласно* (2.9)*.*

Следствие 2.3. *Пусть нечеткий элемент* $\xi = \gamma(\eta)$ *— нечеткая функция* $\gamma(\cdot) : Y \to X$ *нечеткого аргумента* η*, причем нечеткие элементы* η *и* $\gamma(y)$ *независимы при любом* $y \in Y$*. Тогда распределение* ξ *дается равенством*

$$f^\xi(x) = P(\exists y \in Y,\ \eta = y,\ \gamma(y) = x) = \\ = \sup_{y \in Y} \sup\{\min(f^\eta(y), f^{\gamma(y)}(g(y)))|\ g(\cdot) : Y \to X,\ g(y) = x\},\ x \in X. \quad (2.10)$$

§ 3. Нечеткие множества

Пусть $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in Y$ множество $A^y \in \mathcal{P}(X)$, $A. : X \to \mathcal{P}(Y)$ — многозначное отображение, обратное к $A^{\cdot}$, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ множество

$$A_x \triangleq \{y \in Y,\ x \in A^y\},$$

и

$$\Gamma_A \triangleq \{(y, x) \in Y \times X,\ x \in A^y\},$$

множество в $Y \times X$, называемое графиком отображения $A^{\cdot}$, см. рис. 2.

Согласно данным определениям для любых $x \in X$ и $y \in Y$ включения $x \in A^y$, $y \in A_x$ и $(y, x) \in \Gamma_A$ эквивалентны.

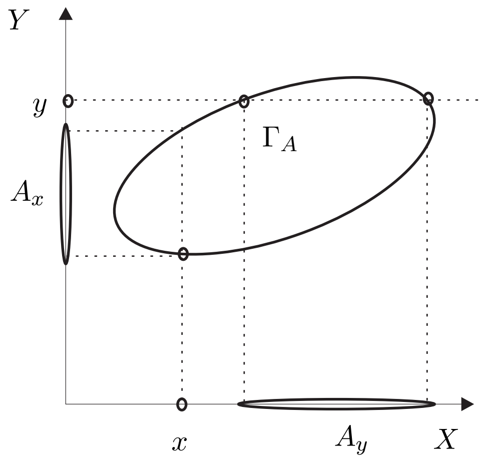

Рис. 2. Отображение $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$, его график $\Gamma_A \subset Y \times X$ и обратное к $A^{\cdot}$ отображение $A.: X \to \mathcal{P}(Y)$.

Пусть $*$ – произвольная бинарная операция над множествами — объединение $\bigcup$, пересечение $\bigcap$, или разность $\setminus$ множеств. Одноименная операция $*$ над многозначными отображениями $A^{\cdot}$ и $B^{\cdot}$ определяется равенством

$$(A * B)^y \triangleq A^y * B^y,\ y \in Y,$$

и, как следствие,

$$(A * B)_x \triangleq A_x * B_x,\ x \in X, \quad \Gamma_{A*B} = \Gamma_A * \Gamma_B.$$

Определение 3.1. Нечетким множеством, определенным на $(Y, \mathcal{P}(Y), P^\eta)$ и принимающим значения в $\mathcal{P}(X)$, назовем образ A^η нечеткого элемента η при отображении $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$, график Γ_A отображения $A^{\cdot}$ назовем графиком нечеткого множества A^η. Индикаторной функцией (одноточечного покрытия) A^η назовем функцию $f^{A^\eta}(x) = P^\eta(x \in A^\eta) \equiv P^\eta(\eta \in A_x),\ x \in X$, где $A_x = \{y \in Y,\ x \in \in A^y\},\ x \in X$, — многозначное отображение из X в $\mathcal{P}(Y)$, обратное $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$. Значение $f^{A^\eta}(x)$ — возможность покрытия $x \in X$ нечетким множеством A^η. Если $\bigcup\limits_{x \in X} A_x \supset Y_{(1)}$, то $\sup\limits_{x \in X} f^{A^\eta}(x) = 1$.

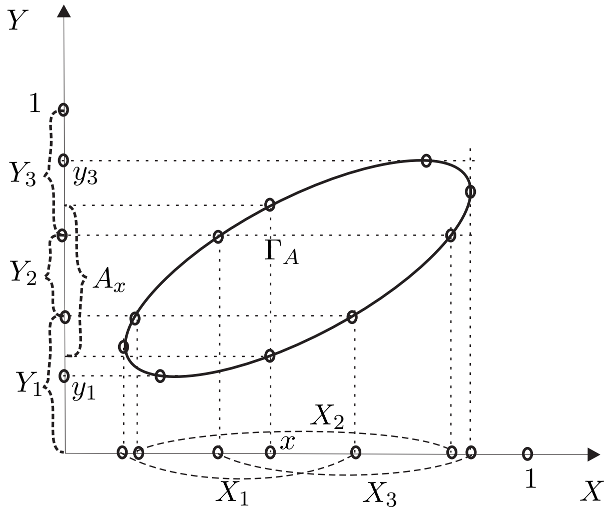

Рис. 3. График нечеткого множества, индикаторная функция которого не определена для любого $x \in X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3$, множества Y_1, Y_2, Y_3 образуют разбиение $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = [0,1]$, $X \in [0,1]$.

Замечание 3.1. Для существования индикаторной функции нечеткого множества A^η, определенной на всем X, существенен тот факт, что нечеткий элемент η определен на пространстве $(Y, \mathcal{P}(Y), P^\eta)$, в котором измеримы все подмножества Y. Действительно, если η определен на $(Y, \mathcal{B}, P^\eta)$, где $\mathcal{B}$ — σ алгебра, описанная в замечании 1.1, то может так случиться,что индикаторная функция $f^{A^\eta}(\cdot)$ не будет определена на любом $x \in X$. Такой случай представлен на Рис. 3, где $Y = Y_1 \bigcup Y_2 \bigcup Y_3 = [0,1]$, алгебра $\mathcal{B}$ состоит из восьми множеств: $\varnothing,\ Y,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_1 \bigcup Y_2,\ Y_2 \bigcup Y_3,\ Y_3 \bigcup Y_1$, и, поскольку возможность P^η определена только на этих восьми множествах, то для любого $x \in X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3 \subset X = [0,1]$, где $X_i = A^{Y_i}$ — образ Y_i при отображении $A^\cdot : Y \to \mathcal{P}(X)$, $i = 1,2,3, \quad A_x \notin \mathcal{B}$, и, следовательно, возможность $f^{A^\eta}(x) = P^\eta(\eta \in A_x)$ не определена.

Между тем, $\mathcal{B}$ — измеримы[11] $Y_i = \{y \in Y,\ A^y \subset X_i\}$, $Y_i \bigcup Y_j = \{y \in Y,\ A^y \subset X_i \bigcup X_j\}$, $i,j = 1,2,3$.

[11]Если учесть, что $A^y = \varnothing \subset X_1,\ y \in [0, y_1)$, и $A^y = \varnothing \subset X_3,\ y \in (y_3, 1]$.

3.1. Включение, равенство, эквивалентность нечетких множеств

Определение 3.2. Нечеткое множество A_1^η

- содержится в нечетком множестве A_2^η, $A_1^\eta \subset A_2^\eta \pmod{N^\eta}$, если $\{y \in Y,\ A_1^y \subset A_2^y\} \supset Y_{(1)}$;
- равно нечеткому множеству A_2^η, $A_1^\eta = A_2^\eta \pmod{N^\eta}$, если $\{y \in \in Y,\ A_1^y = A_2^y\} \supset Y_{(1)}$, или, что то же самое, если $A_1^\eta \subset A_2^\eta$ и $A_1^\eta \supset A_2^\eta \pmod{N^\eta}$;
- эквивалентно нечеткому множеству A_2^η (в смысле возможностей одноточечного покрытия), $A_1^\eta \simeq A_2^\eta$, если $f^{A_1^\eta}(x) = f^{A_2^\eta}(x),\ x \in \in X$;
- наконец, будем писать $A_1^\eta \tilde{\subset} A_2^\eta$ (включение с точностью до эквивалентности), если
  $f^{A_1^\eta}(x) \leqslant f^{A_2^\eta}(x)$, $x \in X$. При этом $A_1^\eta \tilde{\subset} A_2^\eta$ и $A_1^\eta \tilde{\supset} A_2^\eta \Leftrightarrow A_1^\eta \simeq A_2^\eta$.

Ясно, что $A_1^\eta = A_2^\eta \pmod{N^\eta} \Rightarrow A_1^\eta \simeq A_2^\eta$, $A_1^\eta \subset A_2^\eta \pmod{N^\eta} \Rightarrow A_1^\eta \tilde{\subset} A_2^\eta$.

Обратные импликации в общем случае, разумеется, не верны.

Пусть $A^\eta = A \pmod{N^\eta}$, то есть пусть $\{y \in Y,\ A^y = A\} \supset Y_{(1)}$, где $A \in \mathcal{P}(X)$. *Нечеткое множество* A^η, *равное* $A \pmod{N^\eta}$, *назовем четким, равным* A. Его индикаторная функция

$$f^{A^\eta}(x) = \sup\{f^{A^\eta}(y) | y \in Y_{(1)},\ x \in A\} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \in X \backslash A, \end{cases} \quad x \in X, \tag{3.1}$$

равна индикаторной функции $\chi_A(\cdot)$ множества A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \in X \backslash A, \end{cases} \quad x \in X.$$

Иначе говоря, $A^\eta \simeq A$. Однако в отличие от нечеткого элемента, для которого $\xi \simeq x_0 \Leftrightarrow \xi = x_0 \pmod{N^\eta}$, $x_0 \in X$, в случае нечеткого множества эквивалентность $A^\eta \simeq A$, вообще говоря, не влечет равенство $A^\eta = A \pmod{N^\eta}$. Действительно, в силу (3.1), если $A^\eta \simeq A$, то

$$P^\eta(x \in A^\eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \in X \backslash A. \end{cases}$$

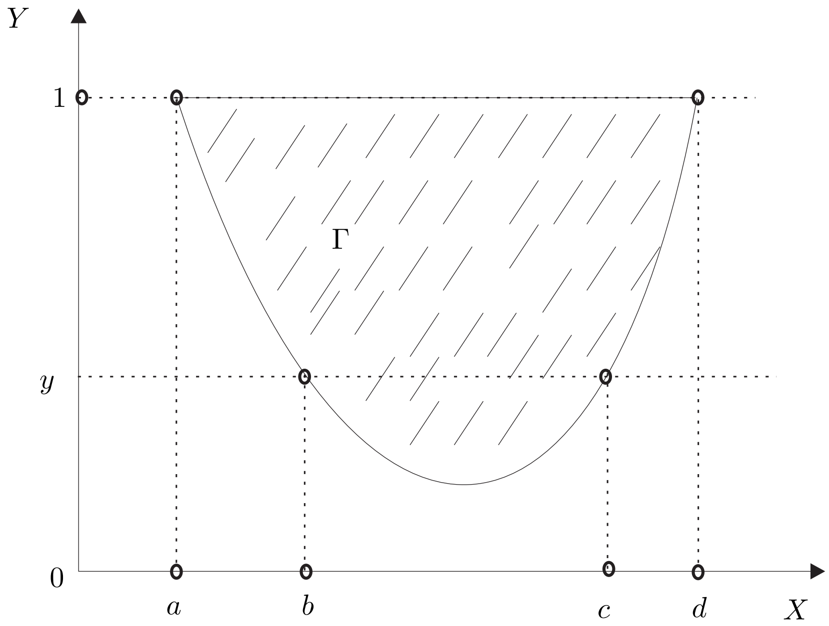

Рис. 4. Если $Y = [0,1]$, $f^\eta(y) = y$, $y \in [0,1]$, $\Gamma \subset Y \times X$ — график многозначного отображения $A^{\boldsymbol{\cdot}} : Y \to \mathcal{P}(X)$, то множество $A = [a,b] \supset A^\eta \pmod{N^\eta}$, ибо для любого $y \in (0,1] = Y_{(1)}$ $A^y = [c,d] \subset [a,b] = A$, $P^\eta(x \in A^\eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus A, \end{cases}$ $x \in X$, то есть $A^\eta \simeq A$, в то время как $P^\eta(A^\eta \neq A) = \sup\{y \in Y,\ A^y \neq A\} = 1$, и множество $\{y \in Y,\ A \subset A^y\} = \{1\}$ не содержит $Y_{(1)} = (0,1]$, то есть включение $A \subset A^\eta (\mathrm{mod}\ N^\eta)$ не имеет места.

Отсюда следует, что $\{y \in Y,\ (X \setminus A) \cap A^y \neq \varnothing\} \subset Y_{(0)}$, или, что то же самое, $\{y \in Y,\ A^y \subset A\} \supset Y_{(1)}$. Следовательно, $A^\eta \simeq A \Rightarrow A^\eta \subset A \pmod{N^\eta}$.

На рис. 4 приведен пример нечеткого множества $A^\eta \simeq A$, для которого включение $A^\eta \supset A(\mathrm{mod} N^\eta)$, а следовательно и равенство $A^\eta = A \pmod{N^\eta}$ не имеют места.

3.2. Независимость нечетких множеств, нечетких множеств и нечетких элементов

Пусть $A_i^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, — многозначные отображения, $q_j(\cdot) : Y \to X_j^{'}$, $j = 1, \dots, m$, — функции.

Определение 3.3. Нечеткие множества A_i^{η}, $i = 1, \dots, n$, и нечеткие элементы $\xi_j = q_j(\eta)$, $j = 1, \dots, m$, назовем

- взаимно независимыми, если для любых множеств $A_i \in \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, и $A_j^{'} \in \mathcal{P}(X_j^{'})$, $j = 1, \dots, m$,

$$\begin{gathered} P^{\eta}(A_1^{\eta} \cap A_1 = \varnothing, A_1^{\eta} \neq \varnothing; A_2^{\eta} \cap A_2 \neq \varnothing; \dots; A_n^{\eta} \cap A_n = \varnothing, A_n^{\eta} \neq \varnothing, \\ \xi_1 \in A_1^{'}, \dots, \xi_m \in A_m^{'}) = \min(P^{\eta}(A_1^{\eta} \cap A_1 = \varnothing,\ A_1^{\eta} \neq \varnothing), \\ P^{\eta}(A_2^{\eta} \cap A_2 \neq \varnothing), \dots, P^{\eta}(A_n^{\eta} \cap A_n = \varnothing,\ A_n^{\eta} \neq \varnothing)), \\ P^{r}(\xi_1 \in A_1^{'}), \dots, P^{\eta}(\xi \in A_m^{'})) \end{gathered} \tag{3.2}$$

  при любых комбинациях «$= \varnothing$», «$\neq \varnothing$»[12];

- взаимно независимы в смысле одноточечного покрытия, если для любых $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $x_j^{'} \in X_j^{'}$, $j = 1, \dots, m$,

$$\begin{gathered} P^{\eta}(x_1 \in A_1^{\eta}, x_2 \notin A_2^{\eta}, \dots, x_n \in A_n^{\eta}; \xi_1 = x_1^{'}, \dots, \xi_m = x_m^{'}) = \\ \min(f^{A_1^{\eta}}(x_1), f^{X_2 \setminus A_2^{\eta}}(x_2^{'}), \dots, f^{A_n^{\eta}}(x_n), f^{\xi_1}(x_1^{'}), \dots, f^{\xi_m}(x_m^{'})) \end{gathered} \tag{3.3}$$

  для любых комбинаций «$\in$» и «$\notin$».

Ясно, что взаимно независимые нечеткие множества и нечеткие элементы взаимно независимы и в смысле одноточечного покрытия.

Теорема 3.1. *Пусть $q(\cdot) : Y \to X$, $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$ и $\xi = q(\eta)$. Тогда $P^{\eta}(\xi \in A^{\eta}) = \sup\{f^{\eta}(y) |\ y \in Y_{(1)},\ q(y) \in A^{y}\}$, а если нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$ и нечеткое множество A^{η} независимы в смысле одноточечного покрытия, то*

[12] Заметим, что $\{y \in Y,\ A^y \cap B = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\} = Y \setminus \bigcup\limits_{x \in B} A_x$, $\{y \in Y,\ A^y \cap B \neq \varnothing\} = \bigcup\limits_{x \in B} A_x$ где $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\}$, $x \in X$.

$$P^\eta(\xi \in A^\eta) = \sup_{x\in X} \min(f^\xi(x), f^{A^\eta}(x)). \tag{3.4}$$

Доказательство. Действительно, событие $\{\xi \in A^\eta\} = \bigcup_{x\in X}\{\xi = x,\ x \in A^\eta\}$, так как $\{y \in Y,\ q(y) \in A^y\} = \bigcup_{x\in X}\{y \in Y,\ q(y) = x, x \in \in A^y\}$. Отсюда следует равенство (3.4).

Если $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, причем нечеткие элементы $\eta_1, \ldots, \eta_n$ взаимно независимы, то есть $f^\eta(y) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} f^{\eta_i}(y_i)$, $y \in Y$, то нечеткие множества $A_1^{\eta_1}, \ldots, A_n^{\eta_n}$ взаимно независимы, в частности, и в смысле одноточечного покрытия, *при любых* многозначных отображениях $A_i^{\cdot} : Y_i \to \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, а нечеткие элементы $\xi_1 = q_1(\eta_1), \ldots, \xi_n = q_n(\eta_n)$ взаимно независимы при любых функциях $q(\cdot) : Y_i \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Более того, если $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ и независимы нечеткие элементы η_1 и η_2, то для любой функции $q(\cdot) : Y_1 \to X_1$ и любого многозначного отображения $A^{\cdot} : Y_2 \to \mathcal{P}(X_2)$ нечеткий элемент $\xi = q(\eta_1)$ и нечеткое множество A^{η_2} независимы, так как для любого $x \in X_1$ и $A \in \mathcal{P}(X_2)$ $P^\eta(\xi = x,\ A^{\eta_2} \cap A = \varnothing,\ A^{\eta_2} \neq \varnothing) = \min(P^\eta(\xi = x),\ P^\eta(A^{\eta_2} \cap A = \varnothing,\ A^{\eta_2} \neq \varnothing))$; $P^\eta(\xi = x,\ A^{\eta_2} \cap A \neq \varnothing) = \min(P^\eta(\xi = x),\ P^\eta(A^{\eta_2} \cap A \neq \varnothing))$. В частности, если $X_1 = X_2 = X$, то $\forall x \in \in X$ $P^\eta(\xi = x,\ x \in A^{\eta_2}) = \min(f^\xi(x), f^{A^{\eta_2}}(x))$ и соответственно[13], $P^\eta(\xi \in A^{\eta_2}) = P^\eta(\exists x \in X\ \xi = x,\ x \in A^{\eta_2})) = \sup_{x\in X} \min(f^\xi(x),\ f^{A^{\eta_2}}(x))$.

Пусть $A_t^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$, $t \in T$, — семейство многозначных отображений.

Определение 3.4. Семейство нечетких множеств A_t^η, $t \in T$, назовем нечетким многозначным отображением, ставящим в соответствие каждому $t \in T$ нечеткое множество A_t^η, принимающее значения в $\mathcal{P}(X)$.

Если для любой функции $x(\cdot) : T \to X$ $P^\eta(A^\eta_{\cdot} \ni x(\cdot)) \triangleq P^\eta(\forall t \in \in T\ A_t^\eta \ni x(t)) = \inf_{t\in T} P^\eta(A_t^\eta \ni x(t))$, то нечеткое многозначное отобра-

[13]Разумеется, в общем случае $P^\eta(\xi \in A^\eta) = \sup_{x\in X} P^\eta(\xi = x,\ x \in A^\eta)$.

жение $A^{\eta}_{\cdot}$ назовем нечетким многозначным отображением с независимыми (в смысле одноточечного покрытия) значениями.

3.3. Шкала значений возможности. Принцип относительности

В теории возможностей [1] одним из фундаментальных понятий является понятие шкалы $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \bullet)$ значений возможности, определенной как интервал $[0,1]$ с естественной упорядоченностью, заданной неравенством $\leqslant$, и с двумя коммутативными, ассоциативными и взаимно дистрибутивными бинарными операциями: сложением $+ : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, определенным равенством $a + b \stackrel{\Delta}{=} \max(a,b)$, $a, b \in [0,1]$, и умножением $\bullet : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, определенным равенством $a \bullet b \stackrel{\Delta}{=} \min(a,b)$, $a, b \in [0,1]$. Обе операции изотонны[14] по каждому аргументу: для любых $a, b, c \in [0,1]$, $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$, $a \bullet c \leqslant b \bullet c$; 0 и 1 являются нейтральными элементами $\mathcal{L} : a + 0 = a$, $a \bullet 0 = 0$, $a \bullet 1 = a$, $a + 1 = 1$.

Свойство шкалы $\mathcal{L}$, определяющее содержательное толкование вазможности [1], обусловлено наличием у $\mathcal{L}$ обширной группы Γ автоморфизмов. Элементами Γ являются все непрерывные строго изотонные[15] функции $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, оставляющие неподвижными нейтральные элементы: $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$; групповая операция $\gamma' \circ \gamma(\cdot)$ определена как композиция[16]: $\gamma' \circ \gamma(a) \stackrel{\Delta}{=} \gamma'(\gamma(a))$, $a \in$ $\in [0,1]$, $\gamma'(\cdot)$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$. Каждая функция $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ определяет отображение[17] $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, которое является автоморфизмом (по определению[18]), поскольку для любой функции $\gamma(\cdot) \in \Gamma$

1. $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, $a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$, $a, b \in [0,1]$;

---

[14] то есть сохраняют упорядоченность

[15] $a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$, $a, b \in [0,1]$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

[16] Нетрудно видеть, что функции $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ имеют обратные $\gamma^{-1}(\cdot) \in \Gamma$, откуда следует, что Γ — группа.

[17] Далее Γ обозначает как множество функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, так и множество соответствующих отображений $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

[18] $\mathcal{L}$ — полная дистрибутивная решетка, Γ — группа решеточных автоморфизмов [7], что следует из соотношений 1., 2., 3; бинарные операции $+$ как max и $\bullet$ как min — единственные в классе непрерывных симметричных функций $[0,\ 1] \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$, удовлетворяющих условиям 2., 3., см [1].

2. $\gamma(a+b)=\gamma(a)+\gamma(b)$, $\gamma(a\bullet b)=\gamma(a)\bullet\gamma(b)$, $a,b\in[0,1]$;
3. $\gamma(\underset{\lambda\in\Lambda}{+} f_\lambda)=\underset{\lambda\in\Lambda}{+}\gamma(f_\lambda)$, $\gamma(\underset{\lambda\in\Lambda}{\bullet} f_\lambda)=\underset{\lambda\in\Lambda}{\bullet}\gamma(f_\lambda)$, $f_\lambda\in[0,1]$, $\lambda\in[0,1]$, где $\underset{\lambda\in\Lambda}{+} f_\lambda \stackrel{\Delta}{=} \sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\bullet} f_\lambda \stackrel{\Delta}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$.

Эти соотношения между преобразованиями $\gamma(\cdot):[0,1]\to[0,1]$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, с одной стороны, и упорядоченностью, сложением и умножением, с другой, характеризуют Γ как группу автоморфизмов $\gamma:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$.

Соотношения 1., 2., 3. можно рассматривать как свойства преобразования шкалы $\mathcal{L}$ в изоморфную, эквивалентную ей шкалу $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\in\Gamma$, согласно которым
1) шкала $\gamma\mathcal{L}$ имеет те же нейтральные элементы и ту же упорядоченность, что и шкала $\mathcal{L}$;
2) операции «$+$» и «$\bullet$» инвариантны относительно преобразования $\mathcal{L}\to\gamma\mathcal{L}$, поскольку, вообще говоря, $\gamma(a+b)=\gamma(a)+_{(\gamma)}\gamma(b)$, $\gamma(a\cdot b)=\gamma(a)\bullet_{(\gamma)}\gamma(b)$, но в данном случае согласно 2. $+_{(\gamma)}=+$, $\bullet_{(\gamma)}=\bullet$.
3) это же относится и к операциям $\underset{\lambda\in\Lambda}{+}$ и $\underset{\lambda\in\Lambda}{\bullet}$.

На этих свойстах преобразований $\mathcal{L}\to\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\in\Gamma$, в теории возможностей основан принцип относительности, согласно которому каждый исследователь при построении и изучении теоретико-возможностной модели использует свою шкалу $\mathcal{L}$, совпадающую со шкалой любого другого исследователя с точностью до преобразования $\mathcal{L}\to\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\in\Gamma$, и, следовательно, — эквивалентную шкале любого другого исследователя. Поскольку Γ является группой, шкалы всех исследователей взаимно эквивалентны. Поэтому любые определения, доводы, утверждения, задачи, данные и т.п., формулировки которых в некоторых шкалах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ различны, считаются *эквивалентными*, если *существует шкала*[19] $\mathcal{L}=\gamma_1\mathcal{L}_1=\gamma_2\mathcal{L}_2$, в которой их формулировки *совпадают*, если же формулировки *совпадают во всех шкалах*, то соответствующие определения, доводы, и т.д. могут быть *содержательно истолкованы*, ибо их смысл не зависит от шкалы, и, следовательно, одинаков для всех исследователей.

[19]то есть если существуют такие преобразования $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$, при которых $\gamma_1\mathcal{L}_1=\gamma_2\mathcal{L}_2$.

Например, равенства $P_1(A_1) = a_1$ в $\mathcal{L}_1$ и $P_2(A_2) = a_2$ в $\mathcal{L}_2$ эквивалентны, если $a_1 \in (0,1)$ и $a_2 \in (0,1)$, ибо в этом случае существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, при которых $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) = a \in (0,1)$; эти равенства эквивалентны равенству $P(A) = a$ в шкале $\mathcal{L}$, где a — любое значение из $(0,1)$. Вместе с тем, если $P_1(A_1) = 1$, а $P_2(A_2) = 0$, то эти равенства не эквивалентны, ибо равенства нулю и единице остаются таковыми в любой шкале и, следовательно, каждое из них имеет один и тот же смысл для любого исследователя. Точно также неравенства $P(A) \neq P(B)$ или $P(A) > P(B)$ в шкале $\mathcal{L}$ сохраняют свой смысл в любой шкале $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$.

Однако для того, чтобы установить эквивалентность или инвариантность более сложных утверждений сказанного недостаточно. Следует использовать еще и законы преобразований других конструкций, а именно, при преобразовании $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$

- значения $a \in [0,1]$ преобразуются по правилу $a \to \gamma(a)$;
- функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ из класса всех функций $f(\cdot) : X \to \mathcal{L}$ преобразуются по правилу $f(\cdot) \to \gamma \circ f(\cdot)$, где $\gamma \circ f(x) \triangleq \gamma(f(x))$, $x \in X$;
- функции (интегралы) $p(\cdot)$ из класса $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ всез функций $p(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$, линейных: $p((a \bullet f) \dotplus (b \bullet g)(\cdot)) = a \bullet p(f(\cdot)) \dotplus b \bullet p(g(\cdot))$, $a, b \in [0,1]$, $f(\cdot)$, $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, и счетно-аддитивных: $p\left(\mathop{\dotplus}\limits_{j=1}^{\infty} f_j(\cdot)\right) = \mathop{\dotplus}\limits_{j=1}^{\infty} p(f_j(\cdot))$, $f_j(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $j = 1, 2, \ldots$, преобразуются по правилу $p(f(\cdot)) \to \gamma * p(f(\cdot))$, где $\gamma * p(f(\cdot)) \triangleq \gamma(p(\gamma^{-1} \circ f(\cdot)))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, см. [1].

Воспользовавшись этим, нетрудно убедиться, что все данные в §§ 1–3, формулировки определений, лемм, теорем и замечений звучат одинаково в любой шкале $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$, и, следовательно, имеют один и тот же смысл для любого исследователя.

§ 4. Неопределенный элемент

Неопределенный элемент охарактеризуем в терминах высказываний относительно его свойств, истинность и ложность которых не абсолютны[20] и определены в ранговой шкале значениями мер правдоподобия и доверия, формально идентичных мерам возможности и необходимости, определящими нечеткий элемент. В отличие от нечеткого элемента, моделирующего все то, что относится к содержательной интерпретации свойств моделируемого объекта (или явления), *неопределенный элемент моделирует неполноту знания этих свойств, формально представляя априорные сомнения по поводу их адекватности.*

Обозначим $\widetilde{u}$ неопределенный элемент[21], U — множество его значений, $g^{\widetilde{u}}(\cdot) : \mathrm{U} \to [0,\, 1]$ — распределение правдоподобий его значений, значение $g^{\widetilde{u}}(u)$ распределения $g^{\widetilde{u}}(\cdot)$ определяет правдоподобие истинности утверждения, согласно которому $\widetilde{u} = u \in \mathrm{U}$, или короче — правдоподобие равенства $\widetilde{u} = u$. Это утверждение (высказывание) назовем элементарным, его правдоподобие $\mathrm{Pl}(\widetilde{u} = u) \overset{\triangle}{=} g^{\widetilde{u}}(u), u \in \mathrm{U}$. Далее функция $g^{\widetilde{u}}(\cdot)$ называется распределением $\widetilde{u}$. Правдоподобие истинности утверждения, согласно которому $\widetilde{u} \in A \subset \mathrm{U}$, выражается через правдоподобия истинности элементарных высказываний $\widetilde{u} = u \in A,\ u \in \mathrm{U}$, каждое из которых влечет включение $\widetilde{u}$ в A,

$$\mathrm{Pl}(\widetilde{u} \in A) \equiv \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A) \overset{\triangle}{=} \sup_{u \in A} g^{\widetilde{u}}(u),\ A \in \mathcal{P}(\mathrm{U}). \tag{4.1}$$

Вследствие определения (4.1),

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A \cup B) = \max(\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A),\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(B)),$$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A \cap B) \leqslant \min(\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A),\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(B)),\ A,\ B \in \mathcal{P}(\mathrm{U}),$$

и для любой последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup_i \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A_i),$$

---

[20] Иногда, при некоторых обстоятельствах, как правило, и т.д.; свойства имеют место, иногда отчасти, иногда — нет, и т.п.

[21] Нечеткие элементы будем обозначать строчными греческими буквами, неопределенные — строчными латинскими с волной, значения тех и других — просто строчными латинскими; неопределенные нечеткие (НН) элементы — строчными греческими с волной.

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \inf_i \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A_i).$$

Поскольку U — множество значений $\widetilde{u}$, то истинность $\widetilde{u} \in \mathrm{U}$ — абсолютна: $\mathrm{Pl}(\widetilde{u} \in \mathrm{U}) = \sup\limits_{u \in \mathrm{U}} g^{\widetilde{u}}(u) = 1$. Поэтому $\forall A \in \mathcal{P}(\mathrm{U})$ $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}) = \max(\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}\backslash A)) = 1$.

Далее высказывания, правдоподобие которых равно единице, будем называть *вполне правдоподобными*, высказывания, правдоподобие которых меньше единицы, но больше нуля — *сомнительными*, равно нулю — *неправдоподобными*[22].

Меру доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(\cdot)$ истинности утверждения, согласно которому $\widetilde{u} \in A$, определим равенством

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(A) \equiv \mathrm{Bel}(\widetilde{u} \in A) = \vartheta(\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}\backslash A)), \quad A \in \mathcal{P}(A), \tag{4.2}$$

где функция $\vartheta(\cdot) : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ непрерывна, строго монотонно убывает, $\vartheta(0) = 1$, $\vartheta(1) = 0$, причем $\vartheta(\vartheta(a)) = a,\ a \in [0,\, 1]$.

Между правдоподобием и доверием имеют место следующие связи: $\forall A \in \mathcal{P}(\mathrm{U})$

$$\max(\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}\backslash A)) = 1 \ \Leftrightarrow \min(\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(A), \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}\backslash A)) = 0,$$
$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A) < 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}\backslash A) = 1 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(A) = 0,$$
$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(A) > 0 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}\backslash A) < 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A) = 1$$

и как следствие $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(A) \leqslant \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A)$.

Тройку $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(\mathrm{U}), \mathrm{Pl})$ назовем измеримым пространством с мерой правдоподобия, или короче — с правдоподобием, в котором мера $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}$ определена равенством (4.1), неопределенный элемент $\widetilde{u}$ назовем каноническим для $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(A), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$.

4.1. Множества $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}$-меры ноль и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}$-меры единица

Рассмотрим разбиение $\mathrm{U} = \mathrm{U}_{(0)} \bigcup \mathrm{U}_{(1)}$, в котором $\mathrm{U}_{(0)} = \{u \in \in \mathrm{U},\ g^{\widetilde{u}}(u) = 0\}$, $\mathrm{U}_{(1)} = \{u \in \mathrm{U},\ g^{\widetilde{u}}(u) > 0\}$, $\mathrm{U}_{(0)} \bigcap \mathrm{U}_{(1)} = \varnothing$.

[22]Такая градация истинности высказываний не зависит от выбора шкалы значений правдоподобия.

Всякое множество, содержащееся в $\mathrm{U}_{(0)}$, назовем множеством $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}$-меры ноль, всякое множество, содержащее $\mathrm{U}_{(1)}$, — множеством $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}$-меры единица. Следующая лемма характеризует свойства разбиения $\mathrm{U} = \mathrm{U}_{(0)} \bigcup \mathrm{U}_{(1)}$.

Лемма 4.1. 1. $\mathrm{U}_{(0)}$ —*максимальное по включению множество в* U*, для которого правдоподобие*[23] $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}_{(0)}) = 0$. $\mathrm{U}_{(1)}$ *— минимальное по включению множество в* U*, для которого доверие*[24] $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}_{(1)}) = \vartheta(\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}\backslash\mathrm{U}_{(1)})) = 1$.

2. *Пусть* $A \in \mathcal{P}(\mathrm{U})$ *— произвольное высказывание,* $A_0 \subset \mathrm{U}_{(0)}$ *и* $A_1 \supset \mathrm{U}_{(1)}$*, тогда*

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A \bigcap A_1) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A \bigcup A_0) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A),\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(A \bigcap A_0) = 0,$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(A \bigcap A_1) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(A \bigcup A_0) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(A),\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(A \bigcap A_0) = 0.$$

Доказательство. См. лемму 1.2.

4.2. Функция неопределенного элемента. Независимость, равенство, эквивалентность

Пусть $\widetilde{u}$ неопределенный элемент со значениями в U, $s(\cdot) : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ — заданная функция и $\widetilde{v} = s(\widetilde{u})$. Если $g^{\widetilde{u}}(u),\ u \in \mathrm{U}$, — распределение $\widetilde{u}$, то

$$g^{\widetilde{v}}(v) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{v}}(\widetilde{v} = v) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\widetilde{u} \in s^{-1}(v)) = \sup_{u \in s^{-1}(v)} g^{\widetilde{u}}(u),\ v \in \mathrm{V}, \quad (4.3)$$

— распределение неопределенного элемента $\widetilde{v} = s(\widetilde{u})$; в (4.3) $s^{-1}(v) = \{u \in \mathrm{U},\ s(u) = v\}$.

Пусть $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n)$ — непределенный вектор, $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \times \ldots \times \mathrm{U}_n$ — множество его значений[25], $g^{\widetilde{u}}(u) = g^{\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_n}(u_1, \ldots, u_n)$ — правдоподобие системы равенств $\widetilde{u}_i = u_i,\ i = 1, \ldots, n,\ u = (u_1, \ldots, u_n) \in \in \mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \times \ldots \times \mathrm{U}_n$.

[23]следовательно, и доверие $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}_{(0)}) = 0$.

[24]следовательно, и правдоподобие $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{U}_{(1)}) = 1$.

[25]Далее, как правило, $\mathrm{U}_1 = \ldots = \mathrm{U}_n$.

Определение 4.1. Неопределенные элементы $\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n$ назовем взаимно независимыми, если

$$g^{\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_n}(u_1, \ldots, u_n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} g^{\widetilde{u}_i}(u_i),\ u_i \in \mathrm{U}_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{4.4}$$

где

$$g^{\widetilde{u}_i}(u_i) = \sup_{\substack{u_k \in \mathrm{U}_k, \\ k=1,\ldots,n, \\ k \neq i}} g^{\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_n}(u_1, \ldots, u_n),\ u_i \in \mathrm{U}_i, \tag{4.5}$$

— маргинальное распределение $\widetilde{u}_i,\ i = 1, \ldots, n$.

Лемма 4.2. *Если $\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n$ — взаимно независимые неопределенные элементы, принимающие значения в $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n$ соответственно, $\widetilde{v}_1 = s_1(\widetilde{u}_1), \ldots, \widetilde{v}_n = s_n(\widetilde{u}_n)$, где $s_1(\cdot), \ldots, s_n(\cdot)$ — произвольные функции, определенные соответсвенно на $\mathrm{U}_1,\ \ldots,\ \mathrm{U}_n$, то*

- *неопределенные элементы $\widetilde{v}_1,\ \ldots,\ \widetilde{v}_n$ взаимно независимы, причем*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pl}^{\widetilde{v}_1,\ \ldots,\ \widetilde{v}_n}(\widetilde{v}_1 = v_1,\ \ldots,\ \widetilde{v}_n = v_n) = \\
&\qquad = \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_n}(\widetilde{u}_1 \in s_1^{-1}(v_1), \ldots, \widetilde{u}_n \in s_n^{-1}(v_n)) = \\
&\qquad = \sup\Big\{ \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (g^{\widetilde{u}_i}(u_i) \Big|\ u_i \in s_i^{-1}(v_i),\ i = 1, \ldots, n \Big\} = \\
&\qquad = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (g^{\widetilde{v}_i}(v_i)),\ \text{где}\ g^{\widetilde{v}_i}(v_i) = \sup_{u_i \in s_i^{-1}(v_i)} g^{\widetilde{u}_i}(u_i),\ i = 1, \ldots, n;
\end{aligned}$$

- *для любых высказываний $A_i \subset \mathrm{U}_i,\ i = 1, \ldots, n$,*

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\widetilde{u}_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\widetilde{u}_i \in A_i).$$

Доказательство. См. лемму 1.4.

Условное распределение правдоподобия, понятие переходного правдоподобия и его распределения определяются как аналогичные конструкции для возможности (см. определения 1.3, 1.4) и обладают такими же свойствами.

Определение 4.2. Пусть $s_i(\cdot) : \mathrm{U} \to \mathrm{V},\ i = 1, 2$. Неопределенные элементы $\widetilde{v}_i = s_i(\widetilde{u}),\ i = 1, 2$, назовем

- равными с доверием единица, $\widetilde{v}_1 = \widetilde{v}_2 \pmod{\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$, если $\{u \in \in \mathrm{U},\ s_1(u) = s_2(u)\} \supset \mathrm{U}_{(1)}$;
- эквивалентными, $\widetilde{v}_1 \simeq \widetilde{v}_2$, если $g^{\widetilde{v}_1}(v) = g^{\widetilde{v}_2}(v),\ v \in \mathrm{V}$, где $g^{\widetilde{v}_i}(v) = \sup\{g^{\widetilde{u}}(u) \mid u \in \mathrm{U},\ s_i(u) = v\}$, $v \in \mathrm{V},\ i = 1, 2$.

Если функция $s(\cdot) : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ такова, что при $u \in \mathrm{U}_{(1)}$ $s(u) = v_0$, то $\widetilde{v} = s(\widetilde{u}) = v_0 \pmod{\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$. Такой неопределенный элемент, равный $v_0 \pmod{\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$ назовем *определенным.* Его распределение $g^{\widetilde{u}}(v) = \sup\{g^{\widetilde{u}}(u) \big| \ u \in \mathrm{U},\ s(u) = v\} = \begin{cases} 1, & \text{если } v = v_0, \\ 0, & \text{если } v \neq v_0,\ v \in \mathrm{V}. \end{cases}$

Лемма 4.3. *Пусть* $\widetilde{v}_i = s_i(\widetilde{u}_i),\ i = 1, 2$. *Тогда*

- *если* $\widetilde{v}_1 = \widetilde{v}_2 \pmod{\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$, *то* $\widetilde{v}_1 \simeq \widetilde{v}_2$;
- *если* $\widetilde{v}_1 \simeq \widetilde{v}_2$, *то для любого* $A \in \mathcal{P}(\mathrm{V})$ $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\widetilde{v}_1 \in A) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\widetilde{v}_2 \in \in A)$;
- *если* $\widetilde{v}_1 = v_1 \pmod{\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$, *то* $\widetilde{v}_1 \simeq v_1$, *и наоборот, если* $\widetilde{v}_1 \simeq v_1$, *то* $\widetilde{v}_1 = v_1 \pmod{\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$.

Доказательство. См. лемму 1.3.

Заметим, что из эквивалентности $\widetilde{v}_1 \simeq \widetilde{v}_2$ равенство $\widetilde{v}_1 = \widetilde{v}_2\ (\mathrm{mod}(\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}))$ в общем случае не следует.

4.3. Неопределенная функция

Пусть $\widetilde{u}(t),\ t \in T$, — семейство неопределенных элементов, или неопределенно-значная функция, короче — неопределенная функция, заданная на T, ее значения — неопределенные элементы, принимающие значения в U. Распределение значений неопределенной функции $\widetilde{u}(\cdot)$ в точке $t \in T$ есть $g^{\widetilde{u}(t)}(\cdot)$, значение $g^{\widetilde{u}(t)}(u)$ — правдоподобие истинности равенства $\widetilde{u}(t) = u \in \mathrm{U}$. Соответственно $g^{\widetilde{u}(t_1),\ldots,\widetilde{u}(t_n)}(u_1, \ldots, u_n)$ — правдоподобие истинности системы равенств $\widetilde{u}(t_i) = u_i,\ i = 1, \ldots, n$. Если для любых $u_i \in \mathrm{U},\ i = 1, \ldots, n$,

$$g^{\widetilde{u}(t_1),\ldots,\widetilde{u}(t_n)}(u_1, \ldots, u_n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} g^{\widetilde{u}(t_i)}(u_i), \tag{4.6}$$

то значения $\widetilde{u}(t_1), \ldots, \widetilde{u}(t_n)$ неопределеной функции $\widetilde{u}(\cdot)$ взаимно независимы.

Определение 4.3. Назовем $\widetilde{u}(\cdot)$ *неопределенной функцией с независимыми значениями*, если для любой функции $u(\cdot) : T \to \mathrm{U}$ правдоподобие истинности равенства $\widetilde{u}(\cdot) = u(\cdot)$[26] есть

$$\mathrm{Pl}(\widetilde{u}(\cdot) = u(\cdot)) = g^{\widetilde{u}(\cdot)}(u(\cdot)) = \inf_{t\in T} g^{\widetilde{u}(t)}(u(t)). \tag{4.7}$$

Далее нам понадобится следующий факт, см. § 2.

Теорема 4.1. *Пусть $A_\cdot : T \to \mathcal{P}(\mathrm{U})$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $t \in T$ множество $A_t \in \in \mathcal{P}(\mathrm{U})$, и $\widetilde{u}(\cdot)$ — неопределенная функция с независимыми значениями. Тогда:*

$$\mathrm{Pl}(\widetilde{u}(\cdot) \in A_\cdot) = \sup\left\{ \inf_{t\in T} g^{\widetilde{u}(t)}(u(t)) \mid u(\cdot) : T \to \mathcal{P}(\mathrm{U}),\ u(\cdot) \in A_\cdot \right\} = \\ = \inf_{t\in T} \sup_{u\in A_t} g^{\widetilde{u}(t)}(u), \tag{4.8}$$

где включение $u(\cdot) \in A_\cdot$ означает, что $\forall t \in T\ u(t) \in A_t$.

Доказательство. См. теорему 2.2.

В качестве следствий теоремы 4.1 отметим следующие результаты.

Следствие 4.1. *Пусть $\widetilde{u}(\cdot) : T \to \mathrm{U}$ — неопределенная функция с независимыми значениями, и $s(\cdot) : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ — произвольная функция, тогда $\widetilde{v}(\cdot) = s(\widetilde{u}(\cdot)) : T \to \mathrm{V}$ — неопределенная функция с независимыми значениями, причем*

$$\mathrm{Pl}(\widetilde{v}(\cdot) = v(\cdot)) = \inf_{t\in T} g^{\widetilde{v}(t)}(v(t)), \tag{4.9}$$

где[27]

$$g^{\widetilde{v}(t)}(v) = \sup_{u\in s^{-1}(v)} g^{\widetilde{u}(t)}(u),\ v \in \mathrm{V}. \tag{4.10}$$

---

[26] Равенство $\widetilde{u}(\cdot) = u(\cdot)$ означает, что $\forall t \in T,\ \widetilde{u}(t) = u(t)$.

[27] По определению, $\sup\limits_{u\in\varnothing} g^{\widetilde{u}(t)}(u) = 0$

Следствие 4.2. *Пусть* $A_t = \mathrm{U},\ t \in T \setminus \{t_1,\ldots,t_n\},\ A_{t_i} = \{u_i\},\ i = 1,\ldots,n,$ *— одноточечные подмножества* U, *и* $\widetilde{u}(\cdot)$ *— неопределенная функция с независимыми значениями в* U. *Тогда:*

$$\mathrm{Pl}(\widetilde{u}(\cdot) \in A.) = \mathrm{Pl}(\widetilde{u}(t_i) = u_i,\ i = 1,\ldots,n) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} g^{\widetilde{u}(t_i)}(u_i).$$

Следствие 4.3. *Пусть*[28] $\widetilde{v} = \widetilde{s}(\widetilde{u})$, *известны распределения* $g^{\widetilde{u}}(u),\ u \in \mathrm{U}$, *и* $g^{\widetilde{s}(u)}(v),\ u \in \mathrm{U},\ v \in \mathrm{V}$, *и при любом* $u \in \mathrm{U}$ *неопределенные элементы* $\widetilde{u}$ *и* $\widetilde{s}(u)$ *независимы, тогда*

$$g^{\widetilde{v}}(v) = \sup_{s(\cdot)\colon \mathrm{U}\to\mathrm{V}}\ \sup_{u\in s^{-1}(v)} \min(g^{\widetilde{u}}(u),\, g^{\widetilde{s}(u)}(v)) =$$
$$= \sup_{u\in\mathrm{U}}\sup\Big\{\min\big(g^{\widetilde{u}}(u),\, g^{\widetilde{s}(u)}(s(u))\big) \mid s(\cdot) : \mathrm{U}\to\mathrm{V},\ s(u) = v\Big\},\ v \in \mathrm{V},$$

где согласно условию независимости

$$\min\big(g^{\widetilde{u}}(u),\, g^{\widetilde{s}(u)}(v)\big) = \mathrm{Pl}(\widetilde{u} = u, \widetilde{s}(u) = v).$$

Пусть, например, $s_i(\cdot) : \mathrm{U} \to \mathrm{V},\ i = 1,2,\ s_1(u) \leqslant s_2(u),\ u \in \mathrm{U}$, — заданные функции, S_{12} — класс всех функций $s(\cdot) :\ \mathrm{U} \to \mathrm{V}$, удовлетворяющих условию $s_1(u) \leqslant s(u) \leqslant s_2(u), u \in \mathrm{U}$, и S — класс всех функций $s(\cdot) :\ \mathrm{U} \to \mathrm{V}$. Пусть

$$\mathrm{Pl}(\widetilde{s}(\cdot) = s(\cdot)) = g^{\widetilde{s}(\cdot)}(s(\cdot)) = \begin{cases} 1, & \text{если } s(\cdot) \in S_{12} \\ 0, & \text{если } s(\cdot) \in S \setminus S_{12}. \end{cases}$$

В частности,

$$\forall u \in \mathrm{U},\ g^{\widetilde{s}(u)}(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } s_1(u) \leqslant v \leqslant s_2(u), \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

В таком случае, если $\widetilde{u}$ и $\widetilde{s}(u)$ при любом $u \in \mathrm{U}$ независимы, то распределение $\widetilde{v} = \widetilde{s}(\widetilde{u})$ имеет вид (см. рис. 5):

$$g^{\widetilde{v}}(v) = \sup\Big\{g^{\widetilde{u}}(u) \mid s(\cdot) \in S_{12},\ u \in \mathrm{U},\ s(u) = v\Big\},\ v \in \mathrm{V}. \qquad (4.11)$$

[28] $\widetilde{s}(\widetilde{u})$ — неопределенная функция $\widetilde{s}(\cdot) : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ неопределенного элемента $\widetilde{u}$.

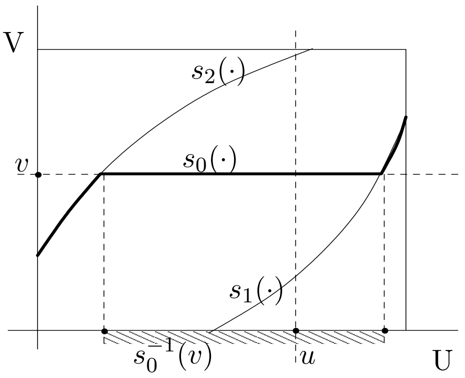

Рис. 5. Жирной линией выделена функция $s_0(\cdot)$, на которой достигается sup в (4.11), равный $g^{\widetilde{v}}(v) = \sup\limits_{u \in s_0^{-1}(v)} g^{\widetilde{u}}(u)$

Замечание 4.1. Далее в ряде случаев будем использовать следующее представление неопределенной функции $\widetilde{u}(\cdot)$. Пусть $\widetilde{u}$ — канонический неопределенный элемент для $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(\mathrm{U}), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$, $g^{\widetilde{u}}(u),\ u \in \mathrm{U}$, — его распределение и $v(\cdot,\cdot) : T \times \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ — произвольная функция со значениями в V. Тогда $\widetilde{v}(t) = v(t, \widetilde{u}),\ t \in T$, — неопределенная функция, образ $\widetilde{u}$ в $\{v(\cdot) : T \to V\}$. При этом:

$$g^{\widetilde{v}(\cdot)}(v(\cdot)) = \sup\Big\{g^{\widetilde{u}}(u) \mid u \in \mathrm{U},\ \forall t \in T:\ v(t,u) = v(t)\Big\} \tag{4.12}$$

и

$$g^{\widetilde{v}(t)}(v) = \sup\Big\{g^{\widetilde{u}}(u) \mid u \in \mathrm{U},\ v(t,u) = v\Big\} = \\ = \sup\Big\{g^{\widetilde{v}(\cdot)}(v(\cdot)) \mid v(\cdot),\ v(t) = v\Big\},\ v \in \mathrm{V}. \tag{4.13}$$

В таком виде можно задать любую неопределенную функцию, выбрав должным образом $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(\mathrm{U}), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$ и $v(\cdot,\cdot) : T \times \mathrm{U} \to \mathrm{V}$. Если, в частности, U — функциональное пространство, его элементы — функции $u = u(\cdot) : T \to \mathrm{V}$, то $\widetilde{v}(t) = v(t, \widetilde{u}(\cdot)) = \widetilde{u}(t),\ t \in T$.

§ 5. Неопределенное множество

Рассмотрим понятие неопределенного множества. Пусть $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(\mathrm{U}), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$ — пространство с правдоподобием, $\widetilde{u}$ — канонический неопределенный элемент и $A^{\cdot} : \mathrm{U} \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение, ставящее в соответсвие каждой точке $u \in \mathrm{U}$ множество $A^u \in \in \mathcal{P}(X)$.

Определение 5.1. Неопределенным множеством, заданным на $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(\mathrm{U}), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$ и принимающим значения в $\mathcal{P}(X)$, назовем образ[29] $\widetilde{A} = A^{\widetilde{u}}$ неопределенного элемента $\widetilde{u}$, а функцию

$$g^{\widetilde{A}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(x \in A^{\widetilde{u}}) = \sup\left\{g^{\widetilde{u}}(u) \mid u \in \mathrm{U},\ x \in A^u\right\} \equiv \mathrm{Pl}(x \in \widetilde{A}),\ x \in X,$$

назовем индикаторной функцией (и.ф.) $\widetilde{A}$, ее значение $g^{\widetilde{A}}(x)$ — правдоподобие покрытия $x \in X$ неопределенным множеством $\widetilde{A}$.

Определение 5.2. Неопределенные множества $\widetilde{A}_i \triangleq A_i^{\widetilde{u}},\ i = 1, 2$, назовем

- равными с доверием единица, $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2 \pmod{\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$, если $A_1^u = A_2^u,\ u \in \mathrm{U}_{(1)}$,
- эквивалентными (в смысле одноточечного покрытия), $\widetilde{A}_1 \simeq \widetilde{A}_2$, если $g^{\widetilde{A}_1}(x) = g^{\widetilde{A}_2}(x)$, $x \in X$.

Нетрудно убедиться, что если $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2 \pmod{\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$, то $\widetilde{A}_1 \simeq \widetilde{A}_2$, и при этом для любого $x \in X$ $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(x \in \widetilde{A}_1) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(x \in \widetilde{A}_2)$.

Если отображение $A^{\cdot} : \mathrm{U} \to \mathcal{P}(X)$ таково, что $A^u = A \in \mathcal{P}(X),\ u \in \in \mathrm{U}_{(1)}$, то есть если $\widetilde{A} = A \pmod{\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$, то неопределенное множество $\widetilde{A}$ назовем определенным (обычным) множеством A. В этом случае его индикаторная функция $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(x \in \widetilde{A}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \in X \backslash A, \end{cases}$ $x \in \in X$, совпадает с индикаторной функцией A. Любое неопределенное множество $\widetilde{A}$, эквивалентное обычному множеству A, будем называть определенным, эквивалентным A.

---

[29]Далее неопределенные множества обозначаются $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$. Зависимость от неопределенного элемента $\widetilde{u}$ опускается.

Пусть $\widetilde{u}_i,\ i=1,\ldots,n,$ — взаимно независимые неопределенные элементы со значениями в $U_i,\ i=1,\ldots,n$, равенство (4.4) определяет их распределение, $A_i^{\cdot}:\mathrm{U}_i\to\mathcal{P}(X_i),\ i=1,2,\ldots,n,$ —многозначные отображения, $A_i^{\widetilde{u}_i}\triangleq\widetilde{A}_i,\ i=1,2,\ldots,n,$ — соответствующие неопределенные множества, назовем их *взаимно независимыми.* Для них, как нетрудно проверить,

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_n}(x_1\in\widetilde{A}_1,\ldots,x_n\in\widetilde{A}_n)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}_i}(x_i\in\widetilde{A}_i),$$

$$x_i\in X_i,\ i=1,\ldots,n.$$

Наоборот, если это равенство выполняется для любых $x_i\in X_i,\ i=1,\ldots,n$, то неопределенные множества $\widetilde{A}_1,\ldots,\widetilde{A}_n$ *назовем взаимно независимыми в смысле одноточечного покрытия.*

Неопределенные множества $B_i^{\widetilde{u}_i}\triangleq\widetilde{B}_i,\ i=1,2,\ldots,n,$ *назовем в совокупности эквивалентными (в смысле одноточечного покрытия) соответственно* $\widetilde{A}_i,\ i=1,2,\ldots,n,$ *если для любых* $x_i\in X_i,\ i=1,\ldots,n,$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_n}(x_1\in\widetilde{A}_1,\ldots,x_n\in\widetilde{A}_n)=\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_n}(x_1\in\widetilde{B}_1,\ldots,x_n\in\widetilde{B}_n).$$

Если при этом $\widetilde{A}_1,\ldots,\widetilde{A}_n$ взаимно независимы в смысле одноточечного покрытия, то и любые им эквивалентные $\widetilde{B}_1,\ldots,\widetilde{B}_n$ *взаимно независимы в смысле одноточечного покрытия.*

Неопределенное множество $\widetilde{A}$ с доверием единица содержится в неопределенном множестве $\widetilde{B}$, $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}\ (\mathrm{mod\,Bel}^{\widetilde{u}})$, если $A^u\subset B^u,\ u\in\mathrm{U}_{(1)}$. Если $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}\ (\mathrm{mod\,Bel}^{\widetilde{u}})$, то, как нетрудно показать, для любого $x\in X\ g^{\widetilde{A}}(x)\leqslant g^{\widetilde{B}}(x)$. Наоборот, если это неравенство выполнено для всех $x\in X$, будем писать $\widetilde{A}\mathrel{\widetilde{\subset}}\widetilde{B}$. Нетрудно проверить, что если $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}\ (\mathrm{mod\,Bel}^{\widetilde{u}})$ и $\widetilde{B}\subset\widetilde{C}\ (\mathrm{mod\,Bel}^{\widetilde{u}})$, то $\widetilde{A}\subset\widetilde{C}\ (\mathrm{mod\,Bel}^{\widetilde{u}})$, а если $\widetilde{A}\mathrel{\widetilde{\subset}}\widetilde{B}$ и $\widetilde{B}\mathrel{\widetilde{\subset}}\widetilde{C}$, то и $\widetilde{A}\mathrel{\widetilde{\subset}}\widetilde{C}$.

Заметим, наконец, что $\widetilde{A}=\widetilde{B}\ (\mathrm{mod\,Bel}^{\widetilde{u}})$, если $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}\supset\widetilde{B}\ (\mathrm{mod\,Bel}^{\widetilde{u}})$, и $\widetilde{A}\simeq\widetilde{B}$, если $\widetilde{A}\mathrel{\widetilde{\subset}}\widetilde{B}$ и $\widetilde{B}\mathrel{\widetilde{\subset}}\widetilde{A}$.

Семейство $\widetilde{A}_t,\ t\in T$, *неопределенных множеств назовем многозначным отображением* $T\to\mathcal{P}(X)$ *с неопределенными значениями.* Если для любой функции $x.:T\to X$

$$\mathrm{Pl}(\widetilde{A}.\ni x.)=\inf_{t\in T}\mathrm{Pl}(\widetilde{A}_t=x_t),$$

то $\widetilde{A}$. называется многозначным отображением $T \to \mathcal{P}(X)$ *с независимыми в смысле одноточечного покрытия неопределенными значениями.*

Для независимых неопределенных элементов $\widetilde{v}$ и $\widetilde{u}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Pl}(\widetilde{v} = v, v \in A^{\widetilde{u}}) = \sup\big\{ \min(g^{\widetilde{v}}(v), g^{\widetilde{u}}(u)) \,\big|\, u \in \mathrm{U},\ v \in A^{u}\big\} = \\ = \min(g^{\widetilde{v}}(v),\ \ g^{\widetilde{A}}(v)),\ v \in \mathrm{V}, \quad (5.1)\end{aligned}$$

— правдоподобие истинности высказывания, согласно которому $\widetilde{v} = v$ и $v \in A^{\widetilde{u}}$. Согласно выражению (5.1), неопределенный элемент $\widetilde{v}$ и неопределенное множество $\widetilde{A}$ (в смысле одноточечного покрытия) определены как независимые[30]. Соответственно, правдоподобие истинности утверждения, согласно которому $\widetilde{v} \in \widetilde{A}$ в этом случае определяется равенством

$$\mathrm{Pl}(\widetilde{v} \in \widetilde{A}) = \sup_{v \in \mathrm{V}} \min(g^{\widetilde{v}}(v),\ g^{\widetilde{A}}(v)). \quad (5.2)$$

§ 6. Неопределенный нечеткий элемент

Введем понятие непределенного нечеткого (НН) элемента, рассматривая его как нечеткий элемент с неопределенным распределением возможностей его значений. Пусть $(Y, \mathcal{P}(Y), P^{\eta})$ — пространство с возможностью, η — канонический нечеткий элемент, определяющий возможность P^{η},

$$P^{\eta}(\eta \in A) = \sup_{y \in A} f^{\eta}(y),\ A \in \mathcal{P}(Y),$$

где $f^{\eta}(\cdot) : Y \to [0, 1]$ — распределение η, значение $f^{\eta}(y)$ которого есть возможность равенства $\eta = y \in Y$, см. § 1.

Любая функция $q(\cdot) : Y \to X$ определяет нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$ со значениями в X, распределение $f^{\xi}(\cdot) : X \to [0, 1]$ которого определено равенством

$$f^{\xi}(x) = \sup\big\{ f^{\eta}(y) \,\big|\, y \in Y,\ q(y) = x\big\},\ x \in X.$$

[30]Если $\widetilde{v}$ и $\widetilde{u}$ независимы, то $\widetilde{v}$ и $\widetilde{A} = A^{\widetilde{u}}$ независимы как функции независимых неопределенных элементов

Пространство с возможностью $(X, \mathcal{P}(X), P^{\xi})$, в котором $P^{\xi}(\xi \in \in Q) = \sup\limits_{x \in Q} f^{\xi}(x),\ Q \in \mathcal{P}(X)$, является образом $(Y, \mathcal{P}(Y), P^{\eta})$ при отображении $q(\cdot) : Y \to X$, нечеткий элемент ξ, канонический для $(X, \mathcal{P}(X), P^{\xi})$, определяет возможность P^{ξ}.

Представим себе, что фунция $q(\cdot) : Y \to X$ — значение неопределенной функции $\widetilde{q}(\cdot)$, моделирующей неполноту знания модели $(X, \mathcal{P}(X), P^{\xi})$ нечеткого элемента ξ. Функция $\widetilde{q}(\cdot)$ *определяет* НН *элемент* $\widetilde{\xi} = \widetilde{q}(\eta)$. Представим неопределенную функцию $\widetilde{q}(\cdot)$ в виде $\widetilde{q}(y) = q(y, \widetilde{u}),\ y \in Y$, где $\widetilde{u}$ — канонический неопределенный элемент для $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(\mathrm{U}), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$, $g^{\widetilde{u}}(u),\ u \in \mathrm{U}$, — его распределение.

Определение 6.1. НН элементом, принимающим значения в X, назовем образ $\widetilde{\xi} = q(\eta, \widetilde{u})$ (упорядоченной) пары $\eta, \widetilde{u}$ — нечеткого η и неопределенного $\widetilde{u}$ элементов при отображении $q(\cdot, \cdot) :\ Y \times \mathrm{U} \to X$.

Пространства $(Y, \mathcal{P}(Y), P^{\eta})$ и $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(\mathrm{U}), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$ назовем базовыми для $\widetilde{\xi}$.

В частности, для каждого фиксированного $\widetilde{u} = u \in \mathrm{U},\ \xi_u = \widetilde{\xi}\,\big|_{\widetilde{u}=u} = q(\eta, u)$ — нечеткий элемент. Его распределение параметрически зависит от $u \in \mathrm{U}$:

$$P(\xi_u = x) = f^{\xi_u}(x) = \sup\big\{f^{\eta}(y) \bigm| y \in Y,\ q(y, u) = x\big\},\ x \in X. \quad (6.1)$$

Семейство $\xi_u,\ u \in \mathrm{U}$, нечетких элементов есть нечеткая функция $\xi_{\cdot} :$ $\mathrm{U} \to X$, соответственно возможность $P(\xi_{\widetilde{u}} = x) \equiv P(\widetilde{\xi} = x) = f^{\widetilde{\xi}}(x)$ равенства $\widetilde{\xi} = x$ есть неопределенное число из [0, 1], а распределение возможностей $f^{\widetilde{\xi}}(x),\ x \in X$, — неопределенная функция.

Аналогично, для каждого фиксированного $\eta = y \in Y,\ \widetilde{x}_y = \widetilde{\xi}\,\big|_{\eta=y} = q(y, \widetilde{u})$ — неопределенный элемент, его распределение параметрически зависит от $y \in Y$:

$$\mathrm{Pl}(\widetilde{x}_y = x) = g^{\widetilde{x}_y}(x) = \sup\big\{g^{\widetilde{u}}(u) \bigm| u \in \mathrm{U},\ q(y, u) = x\big\},\ x \in X. \quad (6.2)$$

Семейство неопределенных элементов $\widetilde{x}_y,\ y \in Y$, — неопределенная функция $\widetilde{x}_{\cdot} :\ Y \to X$, соответственно правдоподобие $\mathrm{Pl}(\widetilde{x}_{\eta} = x) \equiv \mathrm{Pl}(\widetilde{\xi} = x) = g^{\widetilde{\xi}}(x)$ равенства $\widetilde{\xi} = x$ есть нечеткое число из [0, 1], а распределение правдоподобий $g^{\widetilde{\xi}}(x),\ x \in X$, — нечеткая функция.

Так как распределение возможностей $f^{\xi_u}(\cdot)$ — значение неопределенной функции $f^{\xi_{\widetilde{u}}}(\cdot) \equiv f^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$, то

$$g^{f^{\widetilde{\xi}(\cdot)}}(f(\cdot)) = \mathrm{Pl}(f^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = f(\cdot)) = \sup\left\{g^{\widetilde{u}}(u) \;\middle|\; u \in \mathrm{U},\ f^{\xi_u}(\cdot) = f(\cdot)\right\} = \\ = \sup\left\{g^{\widetilde{u}}(u) \;\middle|\; \forall x \in X\ \sup\left\{f^{\eta}(y) \;\middle|\; y \in Y,\ q(y,u) = x\right\} = f(x)\right\}, \\ f(\cdot) : X \to [0,\, 1], \quad (6.3)$$

— распределение неопределенной функции $f^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$. В частности,

$$g^{f^{\widetilde{\xi}(x)}}(p) = \mathrm{Pl}(f^{\widetilde{\xi}}(x) = p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = p) = \\ = \sup\left\{g^{\widetilde{u}}(u) \;\middle|\; u \in \mathrm{U},\ f^{\xi_u}(x) = p\right\} \stackrel{\triangle}{=} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p),\ p \in [0,\, 1], \quad (6.4)$$

— правдоподобие истинности высказывания, согласно которому p — возможность равенства[31] $\widetilde{\xi} = x \in X$.

Это высказывание относительно НН элемента $\widetilde{\xi}$, а именно: «возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ равна p», назовем *элементарным*; $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$ — правдоподобие его истинности. Далее мы будем обращать внимание на высказывания относительно $\widetilde{\xi}$, правдоподобия (истинности) которых могут быть выражены в терминах правдоподобий (истинности) элементарных высказываний. Например, правдоподобия высказываний, согласно которым возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ не меньше или соответственно не больше p, выражаются через правдоподобия элементарных высказываний следующим образом:

---

[31] Заметим, что если в качестве базовых выбрать вероятностное пространство $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{Pr}^{\eta})$, где $\mathcal{B}$ — σ-алгебра подмножеств Y, и пространство с правдоподобием $(U, \mathcal{P}(U), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$, то аналогично (6.1)

$$\mathrm{Pr}^{\eta}(\xi_u \in A) = \int\limits_{y:q(y,u)\in A} \mathrm{Pr}^{\eta}(dy),\ A \in \mathcal{B},\ u \in U,$$

и

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\mathrm{Pr}^{\eta}(\xi_u \in A) = \mathrm{pr}) = \sup\{g^{\widetilde{u}}(u) |\ u \in U, \int\limits_{y:q(y,u)\in A} \mathrm{Pr}^{\eta}(dy) = \mathrm{pr}\}$$

— правдоподобие истинности утверждения, согласно которому вероятность включения $\widetilde{\xi} \in A$ равна $\mathrm{pr} \in [0, 1]$.

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) \geqslant p) = \sup\left\{g^{\widetilde{u}}(u) \;\middle|\; u \in \mathrm{U},\ f^{\xi_u}(x) \geqslant p\right\} = \\ = \sup_{a \geqslant p} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(a), \quad (6.5)$$

$$\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) \leqslant p) = \sup\left\{g^{\widetilde{u}}(u) \;\middle|\; u \in \mathrm{U},\ f^{\xi_u}(x) \leqslant p\right\} = \\ = \sup_{a \leqslant p} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(a),\ x \in X. \quad (6.6)$$

Функцию $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot) : X \times [0,1] \to [0,1]$, $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) \triangleq \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = p)$, $x \in X$, $p \in \in [0, 1]$, *назовем распределением правдоподобия возможностей значений НН элемента* $\widetilde{\xi}$, *или короче — распределением* $\widetilde{\xi}$.

6.1. Равенство НН элементов. Эквивалентность

Определение 6.2. НН элементы $\widetilde{\xi}_1 = q_1(\eta, \widetilde{u})$ и $\widetilde{\xi}_2 = q_2(\eta, \widetilde{u})$ назовем

- равными mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$, $\widetilde{\xi}_1 = \widetilde{\xi}_2$ (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$), если
$$\left\{(y,u) \in Y \times \mathrm{U},\ q_1(y,u) = q_2(y,u)\right\} \supset Y_{(1)} \times \mathrm{U}_{(1)}; \quad (6.7)$$
- эквивалентными, $\widetilde{\xi}_1 \simeq \widetilde{\xi}_2$, если
$$\tau_x^{\widetilde{\xi}_1}(p) = \tau_x^{\widetilde{\xi}_2}(p),\ x \in X,\ p \in [0,\ 1]; \quad (6.8)$$
- эквивалентными (в широком смысле), если $\tau_x^{\widetilde{\xi}_1 *}(p) = \tau_x^{\widetilde{\xi}_2 *}(p)$, $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}_1}(p) = \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}_2}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\ 1]$; эквивалентность в широком смысле далее обозначается как $\widetilde{\xi}_1 \approx \widetilde{\xi}_2$, очевидно, что $\widetilde{\xi}_1 \simeq \widetilde{\xi}_2 \Rightarrow \widetilde{\xi}_1 \approx \widetilde{\xi}_2$.

Если $\widetilde{\xi}_1 = \widetilde{\xi}_2$ (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$), то, очевидно, $\widetilde{\xi}_1 \simeq \widetilde{\xi}_2$ и $\widetilde{\xi}_1 \approx \widetilde{\xi}_2$.

Лемма 6.1. *Следующие условия эквивалентны условию* (6.7)

1. $\forall u \in \mathrm{U}_{(1)}\ \{y \in Y\ q_1(y,u) = q_2(y,u)\} \supset Y_{(1)}$;
2. $\forall u \in Y_{(1)}\ \{u \in \mathrm{U}\ q_1(y,u) = q_2(y,u)\} \supset \mathrm{U}_{(1)}$;

3. $\bigcap\limits_{u\in \mathrm{U}_{(1)}} \{y\in Y,\ \{q_1(y,u)=q_2(y,u)\}\supset Y_{(1)};$

4. $\bigcap\limits_{y\in Y_{(1)}} \{u\in \mathrm{U},\ \{q_1(y,u)=q_2(y,u)\}\supset \mathrm{U}_{(1)};$

5. $P^{\eta}(\exists\ u\in \mathrm{U}_{(1)}\ q_1(\eta,u)\neq q_2(\eta,u))=0;$

6. $\mathrm{Pl}^{\widetilde{\eta}}(\exists\ y\in Y_{(1)}\ q_1(y,\widetilde{u})\neq q_2(y,\widetilde{u}))=0;$

7. $N^{\eta}(\forall u\in \mathrm{U}_{(1)}\ q_1(\eta,u)=q_2(\eta,u))=1;$

8. $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(\forall y\in Y_{(1)}\ q_1(y,\widetilde{u})=q_2(y,\widetilde{u}))=1;$

Доказательство. Условие 1. означает, что для любой пары $(y,u)\in \in Y_{(1)}\times \mathrm{U}_{(1)}\ q_1(y,u)=q_2(y,u))$, условия 1.–4. означают то же самое. Условие 5. означает, что $\exists u\in \mathrm{U}_{(1)}\ \{y\in Y,\ q_1(y,u)=q_2(y,u)\}\subset Y_{(0)}$. Это условие эквивалентно условию 1. Условие 7. эквивалентно условию 5., ибо $N^{\eta}(\forall u\in \mathrm{U}_{(1)}\ q_1(\eta,u)=q_2(\eta,u))=\vartheta(P^{\eta}(\exists u\in \in \mathrm{U}_{(1)}\ q_1(\eta,u)\neq q_2(\eta,u)))$. Условия 6. и 8. эквивалентны условию 2.

Пусть $\widetilde{\xi}_1=\widetilde{\xi}_2\ (\mathrm{mod}\ (N^{\eta},\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}))$. Тогда $\widetilde{\xi}_1\simeq\widetilde{\xi}_2$ и, следовательно, $\widetilde{\xi}_1\approx\widetilde{\xi}_2$, поскольку $\tau_x^{\widetilde{\xi}_1}(p)=\sup\Big\{g^{\widetilde{u}}(u)\Big|\ u\in \mathrm{U}_{(1)},\ \sup\{f^{\eta}(y)|\ y\in \in Y_{(1)},\ q_1(y,u)=x\}=p\Big\}=\sup\Big\{g^{\widetilde{u}}(u)\Big|\ u\in \mathrm{U}_{(1)},\ \sup\{f^{\eta}(y)|\ y\in \in Y_{(1)},\ q_2(y,u)=x\}=p\Big\}=\tau_x^{\widetilde{\xi}_2}(p)$, $p\in[0,\,1]$, $x\in X$, ибо для любых $(y,u)\in Y_{(1)}\times \mathrm{U}_{(1)}\ q_1(y,u)=q_2(y,u)$.

6.2. Примеры НН элементов, свойства

Пусть $\widetilde{\xi}$ — НН элемент и существует такой нечеткий элемент $\xi=q(\eta)$, что $\widetilde{\xi}=\xi\ (\mathrm{mod}\ (N^{\eta},\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}))$. Согласно равенству (6.4) и лемме 6.1 его распределение

$$\begin{aligned}\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)=\sup\big\{g^{\widetilde{u}}(u)\big|\ u\in \mathrm{U}_{(1)},\ \sup\{f^{\eta}(y)|y\in Y_{(1)},\ q(y)=x\}=p\big\}=\\ =\sup\big\{g^{\widetilde{u}}(u)\big|\ u\in \mathrm{U}_{(1)},\ f^{\xi}(x)=p\big\}=\\ =\begin{cases}1, & \text{если } f^{\xi}(x)=p,\\ 0, & \text{если } f^{\xi}(x)\neq p,\end{cases}\quad x\in X,\ p\in[0,\,1].\end{aligned}\tag{6.9}$$

Всякий НН элемент $\widetilde{\xi}$, эквивалентный нечеткому элементу ξ, то есть распределенный согласно (6.9), назовем *определенным нечетким* (ОН), *эквивалентным нечеткому элементу* ξ. В частности, если $\xi = x_0 \pmod{N^\eta}$, то есть ξ — четкий элемент, равный $x_0 \pmod{N^\eta}$, то эквивалентный ему НН элемент $\widetilde{\xi}$ *назовем определенным четким* (ОЧ), его распределение

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta_x(x_0) = p, \\ 0, & \text{если } \delta_x(x_0) \neq p, \end{cases} \quad x \in X,\ p \in [0,\,1], \tag{6.10}$$

где

$$\delta_\cdot(y) : X \to \{0,\,1\},\ \delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \quad x \in X,\ y \in X.$$

Если существует неопределенный элемент $\widetilde{x} = q(\widetilde{u})$, такой, что $\widetilde{\xi} = \widetilde{x} \pmod{(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})}$, то $\forall u \in \mathrm{U}_{(1)},\ \forall y \in Y_{(1)}\ q(y,u) = q(u)$, и согласно равенству (6.4) и лемме 6.1 его распределение

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \sup\bigl\{g^{\widetilde{u}}(u)\bigm|\ u \in \mathrm{U}_{(1)},\ \sup\{f^\eta(y)|y \in Y_{(1)},\ q(u) = x\} = p\bigr\} =$$

$$= \begin{cases} \sup\bigl\{g^{\widetilde{u}}(u)\bigm|\ u \in \mathrm{U}_{(1)},\ q(u) = x\bigr\}, & \text{если } p = 1, \\ \sup\bigl\{g^{\widetilde{u}}(u)\bigm|\ u \in \mathrm{U}_{(1)},\ q(u) \neq x\bigr\}, & \text{если } p = 0, \\ 0, & \text{если } 0 < p < 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{Pl}(\widetilde{x} = x), & \text{если } p = 1, \\ \mathrm{Pl}(\widetilde{x} \neq x), & \text{если } p = 0, \\ 0, & \text{если } 0 < p < 1, \end{cases} \tag{6.11}$$

$x \in X,\ p \in [0,\,1]$. Всякий НН элемент $\widetilde{\xi}$, эвивалентный неопределенному элементу $\widetilde{x}$, то есть распределенный согласно (6.11), *назовем неопределенным четким* (НЧ), *эквивалентным неопределенному элементу* $\widetilde{x}$.

Если, в частности, $\widetilde{x} = x_0 \pmod{\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}}$, то есть если $q(u) = x_0,\ u \in \mathrm{U}_{(1)}$, то речь идет об определенном четком (ОЧ) элементе и согласно (6.11)

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta_x(x_0) = p, \\ 0, & \text{если } \delta_x(x_0) \neq p, \end{cases} \quad x \in X,\ p \in [0,\,1],$$

что совпадает с (6.10).

Рассмотрим случай, когда $f^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$ — неопределенная фукция с независимыми значениями, то есть когда

$$g^{f^{\widetilde{\xi}}(\cdot)}(f(\cdot)) = \inf_{x\in X} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f(x)),\ f(\cdot):\, X \to [0,\, 1]. \tag{6.12}$$

Теорема 6.1. *Пусть распределение* $f^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$ *— неопределенная фукция с независимыми значениями. Тогда*:

1. *для любого множества* $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A) \leqslant p) = \inf_{x\in A} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),$$
$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A) \geqslant p) = \sup_{x\in A} \tau_{x}^{\widetilde{\xi}*}(p),\ p\in[0,\,1],\ x\in X; \tag{6.13}$$

2. *для любой функции* $s(\cdot):\, X\to Z$

$$\tau_{z*}^{\widetilde{\zeta}}(p) = \inf_{x\in s^{-1}(z)} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\ \tau_{z}^{\widetilde{\zeta}*}(p) = \sup_{x\in s^{-1}(z)} \tau_{x}^{\widetilde{\xi}*}(p),\ p\in[0,\,1],\ z\in Z, \tag{6.14}$$

где $\widetilde{\zeta} = s(\widetilde{\xi})$.

Доказательство.

1. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pl}(\sup_{x\in A} f^{\widetilde{\xi}}(x) \leqslant p) = \\
&= \sup\Big\{ \inf_{x\in X} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f(x)) \;\Big|\; f(\cdot):\, X\to[0,\,1],\ \sup_{\bar{x}\in A} f(\bar{x}) \leqslant p \Big\} = \\
&= \sup\Big\{ \inf_{x\in X} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f(x)) \;\Big|\; f(\cdot):\, X\to[0,\,1],\ 0\leqslant f(\bar{x}) \leqslant p, \\
&\qquad \bar{x}\in A,\ 0 \leqslant f(\bar{\bar{x}}) \leqslant 1,\ \bar{\bar{x}} \in X\setminus A \Big\} = \\
&= \sup\Big\{ \inf_{x\in X} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f(x)) \;\Big|\; f(\cdot)\in \Delta.\Big\},
\end{aligned} \tag{6.15}$$

где $\Delta.:\, X \to \mathcal{P}([0,\,1])$ — многозначное отображение

$$\Delta_x = \begin{cases} [0,\ p], & \text{если } x\in A, \\ [0,\,1], & \text{если } x\in X\setminus A. \end{cases}$$

Согласно теореме 4.1

$$\sup\Big\{\inf_{x\in X} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f(x)) \;\Big|\; f(\cdot)\in\Delta.\Big\} =$$

$$= \min\Big(\inf_{x\in A}\sup_{0\leqslant f\leqslant p} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f)\,,\ \inf_{x\in X\setminus A}\sup_{0\leqslant f\leqslant 1} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f)\Big) =$$

$$= \inf_{x\in A}\sup_{0\leqslant f\leqslant p} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f) = \inf_{x\in A}\tau^{\widetilde{\xi}}_{x*}(p),\ p\in[0,\,1]. \quad (6.16)$$

Аналогично, согласно теореме 4.1:

$$\mathrm{Pl}(\sup_{x\in A} f^{\widetilde{\xi}}(x)\geqslant p) =$$

$$= \sup\Big\{\inf_{x\in X} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f(x)) \;\Big|\; f(\cdot):\, X\to[0,\,1],\ \sup_{\bar{x}\in A} f(\bar{x})\geqslant p\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\inf_{x\in X} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f(x)) \;\Big|\; f(\cdot)\in\bigcup_{x\in A}\bigcap_{\substack{\bar{x}\in X\\ \bar{x}\neq x}}\{f(\cdot):\, X\to[0,\,1],$$

$$f(x)\in[p,\,1],\ f(\bar{x})\in[0,\,1]\}\Big\} =$$

$$= \sup_{\bar{x}\in A}\sup\Big\{\inf_{x\in X} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f(x)) \;\Big|\; f(\cdot):\, X\to[0,\,1],$$

$$f(\bar{x})\in[p,\,1],\ f(\bar{\bar{x}})\in[0,\,1],\ \bar{\bar{x}}\neq\bar{x},\ \bar{\bar{x}}\in X\Big\} =$$

$$= \sup_{\bar{x}\in A}\ \sup_{f(\cdot)\in\Delta^{(\bar{x})}_{\cdot}}\ \inf_{x\in X} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f(x)) = \sup_{\bar{x}\in A}\inf_{x\in X}\ \sup_{f\in\Delta^{(\bar{x})}_{x}} g^{f^{\widetilde{\xi}}(x)}(f) =$$

$$= \sup_{\bar{x}\in A}\sup_{p\leqslant f\leqslant 1} g^{f^{\widetilde{\xi}}(\bar{x})}(f) = \sup_{\bar{x}\in A}\tau^{\widetilde{\xi}*}_{\bar{x}}(p),\ p\in[0,\,1]. \quad (6.17)$$

Здесь $\Delta^{(\bar{x})}_{\cdot}:\, X\in\mathcal{P}([0,\,1])$ — многозначное отображение:

$$\Delta^{(\bar{x})}_{x} = \begin{cases}[p,\,1], & x=\bar{x},\\ [0,\,1], & x\neq\bar{x},\end{cases}\ x\in X.$$

2. Действительно, согласно (6.15) и (6.16)

$$\tau^{\widetilde{\zeta}}_{z*}(p) = \mathrm{Pl}\big(P(\widetilde{\zeta}=z)\leqslant p\big) =$$

$$= \mathrm{Pl}\big(P(\widetilde{\xi}\in s^{-1}(z))\leqslant p\big) = \inf_{x\in s^{-1}(z)}\tau^{\widetilde{\xi}}_{x*}(p)$$

Второе равенство (6.14) следует из формулы (6.17).

Заметим, что высказывания $P(\widetilde{\xi} \in A) \leqslant p$ и $P(\widetilde{\xi} \in A) \geqslant p$ в теореме 6.1 охарактеризованы в терминах элементарных высказваний относительно $\widetilde{\xi}$.

6.3. Независимость НН элементов. Условное распределение правдоподобий возможностей

Рассмотрим пару НН элементов $\widetilde{\xi}_i = q_i(\eta_i,\, \widetilde{u}_i)$, $i = 1,\, 2$. Пусть как нечеткие элементы η_1 и η_2, так и неопределенные элементы $\widetilde{u}_1$ и $\widetilde{u}_2$, независимы, то есть пусть

$$\begin{aligned} &f^{\eta_1,\,\eta_2}(y_1,\, y_2) = \min(f^{\eta_1}(y_1),\, f^{\eta_2}(y_2)),\ y_1 \in Y_1,\, y_2 \in Y_2,\\ &g^{\widetilde{u}_1,\,\widetilde{u}_2}(u_1,\, u_2) = \min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\, g^{\widetilde{u}_2}(u_2)),\ u_1 \in \mathrm{U}_1,\, u_2 \in \mathrm{U}_2. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Определение 6.3. Если выполнены условия (6.18), то НН элементы $\widetilde{\xi}_1 = q_1(\eta_1, \widetilde{u}_1)$ и $\widetilde{\xi}_2 = q_2(\eta_2, \widetilde{u}_2)$ назовем независимыми (при любых функциях $q_1(\cdot,\,\cdot) : Y_1 \times \mathrm{U}_1 \to X_1$ и $q_2(\cdot,\,\cdot) : Y_2 \times \mathrm{U}_2 \to X_2$).

Теорема 6.2. *Пусть $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ независимые НН элементы. Тогда*

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 = x_1 \ \text{и}\ \widetilde{\xi}_2 = x_2) = p) = (\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \wedge \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p),$$

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 = x_1 \ \text{или}\ \widetilde{\xi}_2 = x_2) = p) = (\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \vee \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p),$$

где

$$(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \wedge \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p) = \sup\{\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(a_1), \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(a_2)) | a_1, a_2 \in [0,1], \min(a_1, a_2){=}p\},$$

$$(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \vee \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p) = \sup\{\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(a_1), \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(a_2)) | a_1, a_2 \in [0,1], \max(a_1, a_2){=}p\},$$

$$\tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i}(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_i = x_i) = p),\ i = 1, 2;\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ p \in [0,1].$$

Доказательство. Если НН элементы $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ независимы и $\xi_{i,u_i} = \widetilde{\xi}_i|_{\widetilde{u}_i = u_i} = q_i(\eta_i,\, u_i)$, $i = 1,\, 2$, то возможность системы равенств $\xi_{1,\,u_1} = x_1,\ \xi_{2,\,u_2} = x_2$

$$\begin{gathered}P(\xi_{1,u_1}=x_1,\,\xi_{2,u_2}=x_2)=f^{\xi_{1,u_1},\xi_{2,u_2}}(x_1,\,x_2)=\\
=\sup\{\min(f^{\eta_1}(y_1),\,f^{\eta_2}(y_2))|\,y_1\in Y_1,\,y_2\in Y_2,\\
q_1(y_1,\,u_1)=x_1,\,q_2(y_2,\,u_2)=x_2\}=\\
=\min_{i=1,\,2}\sup\{f^{\eta_i}(y_i)|\,y_i\in Y_i,\,q_i(y_i,\,u_i)=x_i\}=\\
=\min(f^{\xi_{1,u_1}}(x_1),\,f^{\xi_{2,u_2}}(x_2)),\quad x_1\in X_1,\,x_2\in X_2.\end{gathered}\tag{6.19}$$

Следовательно, правдоподобие истинности высказывания, согласно которому возможность системы равенств $\widetilde{\xi}_1=x_1,\,\widetilde{\xi}_2=x_2$ равна p,

$$\begin{gathered}\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1=x_1,\,\widetilde{\xi}_2=x_2)=p)\overset{\triangle}{=}\tau_{x_1,x_2}^{\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2}(p)=\\
=\sup\{\min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\,g^{\widetilde{u}_2}(u_2))|\,u_1\in \mathrm{U}_1,\,u_2\in \mathrm{U}_2,\\
\min(f^{\xi_{1,u_1}}(x_1),\,f^{\xi_{2,u_2}}(x_2))=p\}=\\
=\max(\sup\{\min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\,g^{\widetilde{u}_2}(u_2))|\,u_1\in \mathrm{U}_1,\,u_2\in \mathrm{U}_2,\\
f^{\xi_{1,u_1}}(x_1)=p,\,f^{\xi_{2,u_2}}(x_2)\geqslant p\},\\
\sup\{\min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\,g^{\widetilde{u}_2}(u_2))|\,u_1\in \mathrm{U}_1,\,u_2\in \mathrm{U}_2,\\
f^{\xi_{1,u_1}}(x_1)\geqslant p,\,f^{\xi_{2,u_2}}(x_2)=p\})=\\
=\max(\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(p),\,\tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2*}(p)),\,\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1*}(p),\,\tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p))=\\
=\sup\{\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(a),\,\tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(b))|\,a,b\in[0,\,1],\ \min(a,\,b)=p\}=(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}\wedge\tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p),\\
x_1\in X_1,\ x_2\in X_2,\ p\in[0,\,1],\end{gathered}\tag{6.20}$$

где согласно (6.4), (6.5)

$$\begin{gathered}\tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i}(p)=\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_i=x_i)=p)=\sup\{g^{\widetilde{u}_i}(u_i)|\,u_i\in \mathrm{U}_i,\,f^{\xi_{i,u_i}}(x_i)=p\},\\
\tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i*}(p)=\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_i=x_i)\geqslant p)=\sup\{g^{\widetilde{u}_i}(u_i)|\,u_i\in \mathrm{U}_i,\,f^{\xi_{i,u_i}}(x_i)\geqslant p\},\\
x_i\in X_i,\ i=1,2,\ p\in[0,\,1].\end{gathered}\tag{6.21}$$

С другой стороны, для любых, не обязательно независимых, НН элементов $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ возможность по крайней мере одного равенства $\widetilde{\xi}_{1,u_1}=x_1$ или (и) $\widetilde{\xi}_{2,u_2}=x_2$

$$
\begin{aligned}
&P(\widetilde{\xi}_{1,u_1} = x_1 \text{ или (и) } \widetilde{\xi}_{2,u_2} = x_2) = \\
&\qquad = \max(P(\widetilde{\xi}_{1,u_1} = x_1),\, P(\widetilde{\xi}_{2,u_2} = x_2)) = \\
&\qquad\qquad = \max(f^{\xi_{1,u_1}}(x_1),\, f^{\xi_{2,u_2}}(x_2)), \\
&\qquad\qquad\qquad x_i \in X_i,\ u_i \in \mathrm{U}_i,\ i = 1,\, 2, \quad (6.22)
\end{aligned}
$$

но при получении следующей формулы для правдоподобия утверждения, согласно которому p — возможность по крайней мере одного равенства $\widetilde{\xi}_1 = x_1$ или (и) $\widetilde{\xi}_2 = x_2$, следует использовать второе равенство (6.18):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 = x_1 \text{ или (и) } \widetilde{\xi}_2 = x_2) = p) = \\
&\quad = \sup\{\min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\, g^{\widetilde{u}_2}(u_2))|\ u_1 \in \mathrm{U}_1,\, u_2 \in \mathrm{U}_2, \\
&\qquad \max(f^{\xi_{1,u_1}}(x_1),\, f^{\xi_{2,u_2}}(x_2)) = p\} = \\
&\quad = \max(\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(p),\, \tau_{x_2 *}^{\widetilde{\xi}_2}(p)),\, \min(\tau_{x_1 *}^{\widetilde{\xi}_1}(p),\, \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p)) = \\
&\quad = (\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \vee \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p), \quad p \in [0,\, 1],\ x_i \in X_i,\, i = 1,\, 2, \quad (6.23)
\end{aligned}
$$

где согласно (6.6) $\tau_{x_i *}^{\widetilde{\xi}_i}(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_i = x_i) \leqslant p) = \sup\{g^{\widetilde{u}_i}(u_i)|\ u_i \in \in \mathrm{U}_i,\ f^{\xi_i,\, u_i}(x_i) \leqslant p\},\ p \in [0,1],\ x_i \in X_i,\ i = 1,2.$

Итак, в рассматриваемом случае независимых НН элементов $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ правдоподобия истинности высказываний $P(\widetilde{\xi}_1 = x_1$ и $\widetilde{\xi}_2 = x_2) = p$ и $P(\widetilde{\xi}_1 = x_1$ или $\widetilde{\xi}_2 = x_2) = p$ выражены через правдоподобия истинности элементарных высказываний относительно НН элементов $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$.

Пусть $\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n$ — НН элементы, принимающие значения в $X_1, \ldots, X_n$, $\tau_{x_1,\ldots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}(p)$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n,\ p \in [0,\, 1]$, — распределение правдоподобий возможностей их значений, $\tau_{x_1,\ldots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}(p) \triangleq \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 = x_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n = x_n) = p)$ — правдоподобие возможности p системы равенств $\widetilde{\xi}_1 = x_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n = x_n$.

Определение 6.4. НН элементы $\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n$ назовем
— взаимно независимыми (с точностью до эквивалентности), если

$$\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_n}(p) = \Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} \tau^{\widetilde{\xi}_i}_{x_i}\Big)(p) \stackrel{\Delta}{=}$$
$$\stackrel{\Delta}{=} \sup\Big\{\min_{1\leqslant i\leqslant n} \tau^{\widetilde{\xi}_i}_{x_i}(a_i)\Big|\ (a_1,\ldots,a_n)\in[0,\,1]^n,\ \min_{1\leqslant i\leqslant n} a_i = p\Big\},$$
$$x_1\in X_1,\ldots,x_n\in X_n,\ p\in[0,\,1]; \quad (6.24)$$

— взаимно независимыми (в широком смысле), если

$$\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n *}_{x_1,\ldots,x_n}(p) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \tau^{\widetilde{\xi}_i *}_{x_i}(p),$$
$$\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_n *}(p) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \tau^{\widetilde{\xi}_i}_{x_i *}(p),\ x_1\in X_1,\ldots,x_n\in X_n,\ p\in[0,\,1]. \quad (6.25)$$

Здесь

$$\tau^{\widetilde{\xi}_i}_{x_i}(p) = \Big(\bigvee_{\substack{x_s\in X_s,\\ s=1,\ldots,n,\\ s\neq i}} \tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_n}\Big)(p),\ x_i\in X_i,\ p\in[0,\,1], \quad (6.26)$$

— маргинальное распределение $\widetilde{\xi}_i,\ i=1,\ldots,n$.

Понятно, что взаимно независимые НН элементы взаимно независимы с точностью до эквивалентности, а взаимно независимые с точностью до эквивалентности взаимно независимы в широком смысле.

Определение 6.5. Вариантом условного (с точностью до эквивалентности) распределения правдоподобия возможностей значений НН элементов $\xi_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k,\ k<n$, при условии $\widetilde{\xi}_{k+1}=x_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n=x_n$ назовем любое решение $\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k|\ \widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_k|\ x_{k+1},\ldots,x_n}(p)$ уравнения

$$\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_n}(p) = \Big(\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k|\ \widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_k|\ x_{k+1},\ldots,x_n} \bigwedge \tau^{\widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_{k+1},\ldots,x_n}\Big)(p),$$
$$x_1\in X_1,\ldots,x_n\in X_n,\ p\in[0,\,1]. \quad (6.27)$$

Вариантом условного (в широком смысле) распределения правдоподобия возможностей значений НН элементов $\xi_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k$ при условии $\widetilde{\xi}_{k+1}=x_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n=x_n$ назовем любое решение
$\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k|\ \widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n *}_{x_1,\ldots,x_k|\ x_{k+1},\ldots,x_n}(p)$, $\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k|\ \widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_k|\ x_{k+1},\ldots,x_n *}(p)$ уравнений

$$\tau_{x_1,\dots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\dots,\widetilde{\xi}_n *}(p) = \min\bigl(\tau_{x_1,\dots,x_k|\, x_{k+1},\dots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\dots,\widetilde{\xi}_k|\, \widetilde{\xi}_{k+1},\dots,\widetilde{\xi}_n *}(p),\ \tau_{x_{k+1},\dots,x_n}^{\widetilde{\xi}_{k+1},\dots,\widetilde{\xi}_n *}(p)\bigr), \tag{6.28}$$

$$\tau_{x_1,\dots,x_n *}^{\widetilde{\xi}_1,\dots,\widetilde{\xi}_n}(p) = \max\bigl(\tau_{x_1,\dots,x_k|\, x_{k+1},\dots,x_n *}^{\widetilde{\xi}_1,\dots,\widetilde{\xi}_k|\, \widetilde{\xi}_{k+1},\dots,\widetilde{\xi}_n}(p),\ \tau_{x_{k+1},\dots,x_n *}^{\widetilde{\xi}_{k+1},\dots,\widetilde{\xi}_n}(p)\bigr), \tag{6.29}$$

$$x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n,\ p \in [0,\, 1],$$

где

$$\tau_{x_{k+1},\dots,x_n}^{\widetilde{\xi}_{k+1},\dots,\widetilde{\xi}_n}(p) = \Bigl(\bigvee_{\substack{x_1 \in X_1,\dots,\\ x_k \in X_k}} \tau_{x_1,\dots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\dots,\widetilde{\xi}_n}\Bigr)(p),$$

$$x_{k+1} \in X_{k+1}, \dots, x_n \in X_n,\ p \in [0,\, 1], \tag{6.30}$$

— маргинальное распределение $\widetilde{\xi}_{k+1}, \dots, \widetilde{\xi}_n$;

$$\tau_{x_1,\dots,x_k|\, x_{k+1},\dots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\dots,\widetilde{\xi}_k|\, \widetilde{\xi}_{k+1},\dots,\widetilde{\xi}_n}(p) = $$
$$= \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 = x_1, \dots, \widetilde{\xi}_k = x_k|\, \widetilde{\xi}_{k+1} = x_{k+1}, \dots, \widetilde{\xi}_n = x_n) = p), \tag{6.31}$$

$x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n,\ p \in [0,\, 1]$.

Рассмотрим связь понятий независимости нечетких элементов ξ_1, ξ_2 и им эквивалентных НН элементов $\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2$.

Пусть $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ — ОН элементы, эквивалентные нечетким элементам ξ_1 и соответственно ξ_2, то есть пусть

$$\tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i = f^{\xi_i}(x_i), \\ 0, & \text{если } p_i \neq f^{\xi_i}(x_i),\ x_i \in X_i,\ p_i \in [0,\, 1],\ i = 1, 2. \end{cases} \tag{6.32}$$

Если НН элементы $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ независимы (с точностью до эквивалентности), то есть если

$$\tau_{x_1,x_2}^{\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2}(p) =$$
$$= \sup\{\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(a_1), \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(a_2))|\ (a_1, a_2) \in [0,\, 1]^2,\ \min(a_1, a_2) = p\} =$$
$$= (\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \wedge \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p),\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ p \in [0,\, 1], \tag{6.33}$$

и эквивалентны нечетким элементам ξ_1 и ξ_2, то

$$\tau_{x_1,x_2}^{\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \min(f^{\xi_1}(x_1), f^{\xi_2}(x_2)) = f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)), \\ 0, & \text{если } p \neq \min(f^{\xi_1}(x_1), f^{\xi_2}(x_2)) = f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)), \end{cases} \tag{6.34}$$

то есть пара НН *элементов* $\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2$ *эквивалентна паре* ξ_1, ξ_2 *независимых нечетких элементов.*

Что касается условий независимости в широком смысле (6.25), то, поскольку согласно предположению (6.32)

$$\tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i*}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \leqslant f^{\xi_i}(x_i), \\ 0, & \text{если } p > f^{\xi_i}(x_i), \end{cases}$$

$$\tau_{x_i*}^{\widetilde{\xi}_i}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \geqslant f^{\xi_i}(x_i), \\ 0, & \text{если } p < f^{\xi_i}(x_i), \end{cases} \quad x_i \in X_i,\ i = 1,2,\ p \in [0,\ 1],$$

то правые части (6.25) в этом случае суть соответственно

$$\min\left(\begin{cases} 1, & \text{если } p \leqslant f^{\xi_1}(x_1), \\ 0, & \text{если } p > f^{\xi_1}(x_1); \end{cases}, \begin{cases} 1, & \text{если } p \leqslant f^{\xi_2}(x_2), \\ 0, & \text{если } p > f^{\xi_2}(x_2); \end{cases}\right) =$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{если } p \leqslant \min(f^{\xi_1}(x_1), f^{\xi_2}(x_2), \\ 0, & \text{если } p > \min(f^{\xi_1}(x_1), f^{\xi_2}(x_2); \end{cases}$$

$$\max\left(\begin{cases} 1, & \text{если } p \geqslant f^{\xi_1}(x_1), \\ 0, & \text{если } p < f^{\xi_1}(x_1); \end{cases}, \begin{cases} 1, & \text{если } p \geqslant f^{\xi_2}(x_2), \\ 0, & \text{если } p < f^{\xi_2}(x_2); \end{cases}\right) =$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{если } p \geqslant \min(f^{\xi_1}(x_1), f^{\xi_2}(x_2), \\ 0, & \text{если } p < \min(f^{\xi_1}(x_1), f^{\xi_2}(x_2); \end{cases}$$

что совпадает соответственно с $\tau_{\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_{2*}}^{\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_{2*}}(p)$ и $\tau_{\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_{2*}}^{\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2}(p)$ для

$$\tau_{x_1,x_2}^{\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \min(f^{\xi_1}(x_1), f^{\xi_2}(x_2)), \\ 0, & \text{если } p \neq \min(f^{\xi_1}(x_1), f^{\xi_2}(x_2)), \end{cases}$$
$$x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ p \in [0,\ 1].$$

Рассмотрим теперь связь условного распределения нечеткого элемента ξ_1 при условии ξ_2 с условным распределением НН элемента $\widetilde{\xi}_1$ при условии $\widetilde{\xi}_2$. Для этого предположим, что кроме условий (6.32)

$$\tau^{\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2}_{x_1,x_2}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), \\ 0, & \text{если } p \neq f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), \end{cases} \quad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ p \in [0,\,1], \tag{6.35}$$

то есть пусть пара $\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2$ НН элементов эквивалентна паре ξ_1, ξ_2 нечетких элементов. Тогда уравнение (6.27), определяющее условное распределение $\tau^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}_{x_1|x_2}(p)$, будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} 1, & \text{если } p = f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), \\ 0, & \text{если } p \neq f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), \end{cases} =$$
$$= \sup\left\{ \min\left(\tau^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}_{x_1|x_2}(a_1), \begin{cases} 1, \text{ если } a_2 = f^{\xi_2}(x_2), \\ 0, \text{ если } a_2 \neq f^{\xi_2}(x_2), \end{cases} \right) \middle|\, \min(a_1,a_2)=p \right\} =$$
$$= \begin{cases} \sup\{\tau^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}_{x_1|x_2}(a) |\ a \geqslant p\}, & \text{если } p = f^{\xi_2}(x_2), \\ \tau^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}_{x_1|x_2}(p), & \text{если } p > f^{\xi_2}(x_2), \\ 0, & \text{если } p < f^{\xi_2}(x_2), \end{cases}$$
$$x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ p \in [0,\,1].$$

Это уравнение в классе условных распределений

$$\tau^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}_{x_1|x_2}(p) = \begin{cases} 1, \text{ если } p = f^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2), \\ 0, \text{ если } p \neq f^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2), \end{cases} \quad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ p \in [0,\,1],$$

имеет решение, в котором

$$f^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2) = \begin{cases} f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), & \text{если } f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) < f^{\xi_2}(x_2), \\ \geqslant f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), & \text{если } f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = f^{\xi_2}(x_2), \end{cases}$$
$$x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,$$

— вариант условного распределения нечеткого элемента ξ_1 при условии $\xi_2 = x_2$.

Аналогично каждая из функций $\tau_{x_1|x_2}^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2*}(p)$ и $\tau_{x_1|x_2*}^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}(p)$, отвечающих варианту условного распределения

$$\tau_{x_1|x_2}^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = f^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2), \\ 0, & \text{если } p \neq f^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2), \end{cases} \quad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ p \in [0,\, 1],$$

где $f^{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2) = \begin{cases} f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), & \text{если } f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) < f^{\xi_2}(x_2), \\ \geqslant f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), & \text{если } f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = f^{\xi_2}(x_2), \end{cases}$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, удовлетворяет соответствующим уравнениям в (6.28), 6.29 если

$$\tau_{x_1,x_2}^{\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), \\ 0, & \text{если } p \neq f^{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2), \end{cases}$$

и выполнены равенства (6.32).

6.4. Неопределенные нечеткие (НН) функции

Пусть $q_\cdot(\cdot,\cdot) : T \times Y \times \mathrm{U} \to X$, $\widetilde{\xi}_t = q_t(\eta_t,\, \widetilde{u}_t)$, $t \in T$, — семейство НН элементов или, иначе, — *неопределенная нечеткая* (НН) *функция*, η_t, $t \in T$, — нечеткая, $\widetilde{u}_t$, $t \in T$, — неопределенная функции, причем обе — с независимыми значениями, то есть

$$\begin{aligned} f^{\eta_\cdot}(y_\cdot) &= \inf_{t \in T} f^{\eta_t}(y_t), \quad y_\cdot : \ T \to Y, \\ g^{\widetilde{u}_\cdot}(u_\cdot) &= \inf_{t \in T} g^{\widetilde{u}_t}(u_t), \quad u_\cdot : \ T \to \mathrm{U}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Здесь $f^{\eta_\cdot}(y_\cdot)$ — возможность равенства $\eta_\cdot = y_\cdot$, $g^{\widetilde{u}_\cdot}(u_\cdot)$ — правдоподобие высказывания, согласно которому $\widetilde{u}_\cdot = u_\cdot$.

Определение 6.6. При условии (6.36) семейство НН элементов $\widetilde{\xi}_t$, $t \in T$, назовем НН функцией с независимыми значениями.

Если $\xi_{t,u_t} = \widetilde{\xi}_t\Big|_{\widetilde{u}_t = u_t} = q_t(\eta_t,\, u_t)$, $t \in T$, то при фиксированной функции $q_\cdot(\cdot,\,\cdot) : \ T \times Y \times \mathrm{U} \to X$

$$\begin{aligned} f^{\xi_{t,u_t}}(x_t) &= \sup\{\inf_{\bar{t} \in T} f^{\eta_{\bar{t}}}(y_{\bar{t}})|\ y_\cdot : \ T \to Y,\ q_t(y_t,\, u_t) = x_t\} = \\ &= \sup\{f^{\eta_t}(y)|\ y \in Y,\ q_t(y, u_t) = x_t\},\ u_t \in \mathrm{U},\ x_t \in X,\ t \in T \end{aligned} \tag{6.37}$$

(см. теорему 4.2, равенство (4.8)), и вообще

$$f^{\xi_{\cdot,u_\cdot}}(x_\cdot) = \sup\{\inf_{\overline{t}\in T} f^{\eta_{\overline{t}}}(y_{\overline{t}})|\ y_\cdot:\ T\to Y,\ \forall t\in T:\ q_t(y_t,\, u_t) = x_t\} = \\ = \inf_{t\in T} \sup_{\substack{y\in Y\\ q_t(y,u_t)=x_t}} f^{\eta_t}(y) = \inf_{t\in T} f^{\xi_{t,u_t}}(x_t) \quad (6.38)$$

— возможность равенства $\xi_{\cdot,u_\cdot} = x_\cdot$ для любой пары функций $u_\cdot$: $T\to \mathrm{U}$, $x_\cdot : T\to X$.

Теорема 6.3. *Пусть* $\widetilde{\xi}_\cdot$ *— НН функция с независимыми значениями,*

$$\tau^{\widetilde{\xi}_\cdot}_{x_\cdot}(p) = \sup\{\inf_{t\in T} g^{\widetilde{u}_t}(u_t)|\ u_\cdot:\ T\to \mathrm{U},\ \inf_{\overline{t}\in T} f^{\xi_{\overline{t},u_{\overline{t}}}}(x_{\overline{t}}) = p\}, \\ \tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t}(p) = \sup\{g^{\widetilde{u}_t}(u)|\ u\in \mathrm{U},\ f^{\xi_{t,u}}(x_t) = p\} \quad (6.39)$$

— правдоподобия утверждений, согласно которым $p\in[0,\,1]$ *— возможность равенств* $\widetilde{\xi}_\cdot = x_\cdot$ *(функций) и соответственно* $\widetilde{\xi}_t = x_t$, $t\in T$, *(значений). Тогда для любой функции* $x_\cdot :\ T\to X$

$$\tau^{\widetilde{\xi}_\cdot *}_{x_\cdot}(p) = \sup_{a\geqslant p}\tau^{\widetilde{\xi}_\cdot}_{x_\cdot}(a) = \inf_{t\in T}\tau^{\widetilde{\xi}_t *}_{x_t}(p), \\ \tau^{\widetilde{\xi}_\cdot}_{x_\cdot *}(p) = \sup_{a\leqslant p}\tau^{\widetilde{\xi}_\cdot}_{x_\cdot}(a) = \sup_{t\in T}\tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t *}(p), \qquad p\in[0,\,1], \quad (6.40)$$

где

$$\tau^{\widetilde{\xi}_t *}_{x_t}(p) = \sup_{a\geqslant p}\tau^{\widetilde{\xi}_t *}_{x_t}(a), \qquad \tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t *}(p) = \sup_{a\leqslant p}\tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t *}(a). \quad (6.41)$$

Доказательство. В силу теоремы 4.1

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_\cdot = x_\cdot)\geqslant p) = \sup\{\inf_{t\in T} g^{\widetilde{u}_t}(u_t)|\ u_\cdot:\ T\to \mathrm{U},\ \inf_{\overline{t}\in T} f^{\xi_{\overline{t},u_{\overline{t}}}}(x_{\overline{t}})\geqslant p\} = \\ = \sup\{\inf_{t\in T} g^{\widetilde{u}_t}(u_t)|\ u_\cdot:\ T\to \mathrm{U},\ \forall \overline{t}\in T\ f^{\xi_{\overline{t},u_{\overline{t}}}}(x_{\overline{t}})\geqslant p\} = \\ = \inf_{t\in T}\sup\{g^{\widetilde{u}_t}(u_t)|\ u_\cdot:\ T\to \mathrm{U},\ f^{\xi_{t,u_t}}(x_t)\geqslant p\} = \inf_{t\in T}\tau^{\widetilde{\xi}_t *}_{x_t}(p),$$

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_. = x_.) \leqslant p) = \sup\{\inf_{t\in T} g^{\widetilde{u}_t}(u_t)|\ u_. : T \to \mathrm{U},\ \inf_{\overline{t}\in T} f^{\xi_{\overline{t}}, u_{\overline{t}}}(x_{\overline{t}}) \leqslant p\} =$$
$$= \sup\{\inf_{t\in T} g^{\widetilde{u}_t}(u_t)|\ u_. \in \bigcup_{t\in T} \bigcap_{\substack{\overline{t}\in T\\ \overline{t}\neq t}} \{u_. :\ T \to \mathrm{U},$$
$$0 \leqslant f^{\xi_t, u_t}(x_t) \leqslant p,\ 0 \leqslant f^{\xi_{\overline{t}}, u_{\overline{t}}}(x_{\overline{t}}) \leqslant 1\}\} =$$
$$= \sup_{t\in T} \sup\{\inf_{\overline{t}\in T} g^{\widetilde{u}_{\overline{t}}}(u_{\overline{t}})|\ u_. :\ T \to \mathrm{U},\ \forall \overline{t},\ \overline{t} \neq t,$$
$$0 \leqslant f^{\xi_t, u_t}(x_t) \leqslant p,\ 0 \leqslant f^{\xi_{\overline{t}}, u_{\overline{t}}}(x_{\overline{t}}) \leqslant 1\} =$$
$$= \sup_{t\in T} \sup\{g^{\widetilde{u}_t}(u_t)|\ u_t \in \mathrm{U},\ 0 \leqslant f^{\xi_t, u_t}(x_t) \leqslant p\} = \sup_{t\in T} \tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t *}(p),\ p \in [0, 1].$$

Замечание 6.1. Выражения для $\tau^{\widetilde{\xi}_.}_{x_.}(p)$ и $\tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t}(p)$ можно преобразовать к виду, позволяющему непосредственно использовать результаты, приведенные в лемме 9 и теореме 3 в части 2, а именно, если $a_. :\ T \to [0, 1]$, то

$$\tau^{\widetilde{\xi}_.}_{x_.}(p) = \sup\{\sup\{\inf_{t\in T} g^{\widetilde{u}_t}(u_t)|\ u_. :\ T \to \mathrm{U},\ \forall \overline{t} \in T\ f^{\xi_{\overline{t}}, u_{\overline{t}}}(x_t) = a_{\overline{t}}\}|$$
$$a_. :\ T \to [0, 1],\ \inf_{\overline{\overline{t}}\in T} a_{\overline{\overline{t}}} = p\} =$$
$$= \sup\{\inf_{t\in T} \tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t}(a_t)|\ a_. : T \to [0, 1],\ \inf_{\overline{t}\in T} a_{\overline{t}} = p\},\ \ p \in [0, 1],\ x_. : T \to X, \tag{6.42}$$

где согласно лемме 1

$$\sup\{\inf_{t\in T} g^{\widetilde{u}_t}(u_t)|\ u_. :\ T \to \mathrm{U},\ \forall \overline{t} \in T\ f^{\xi_{\overline{t}}, u_{\overline{t}}}(x_{\overline{t}}) = a_{\overline{t}}\} =$$
$$= \inf_{t\in T} \sup\{g^{\widetilde{u}_t}(u)|\ u \in \mathrm{U},\ f^{\xi_t, u}(x_t) = a_t\} = \inf_{t\in T} \tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t}(a_t).$$

Итак,

$$\tau^{\widetilde{\xi}_.}_{x_.}(p) = \sup\{\inf_{t\in T} \tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t}(a_t)|\ a_. :\ T \to \mathrm{U},\ \inf_{\overline{t}\in T} a_{\overline{t}} = p\} =$$
$$= \left(\bigwedge_{t\in T} \tau^{\widetilde{\xi}_t}_{x_t}\right)(p),\ x_. : T \to X,\ p \in [0, 1]. \tag{6.43}$$

Далее любая НН функция $\widetilde{\xi}_t,\ t \in T$, для которой выполнено условие (6.43), эквивалентная НН функции с независимыми значениями, называется НН функцией с независимыми с точностью до эквивалентности значениями.

§ 7. Непределенное нечеткое (НН) множество. Правдоподобие возможности покрытия НН элемента НН множеством

Пусть как при определении НН элемента $(Y, \mathcal{P}(Y), P^\eta)$ и $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(\mathrm{U}), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$ — базовые пространства, $f^\eta(\cdot) : Y \to [0, 1]$ и $g^{\widetilde{u}}(\cdot) : \mathrm{U} \to [0, 1]$ — распределения мер возможности P^η и правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}$ и $Q(\cdot, \cdot) : Y \times \mathrm{U} \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение $Y \times \mathrm{U}$ в множество $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X.

Определение 7.1. Неопределенным нечетким (НН) множеством назовем образ $\widetilde{A} = Q(\eta, \widetilde{u})$ нечеткого η и неопределенного $\widetilde{u}$ элементов, канонических соответственно для $(Y, \mathcal{P}(Y), P^\eta)$ и $(\mathrm{U}, \mathcal{P}(\mathrm{U}), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}})$, при отображении $Q(\cdot, \cdot) : Y \times \mathrm{U} \to \mathcal{P}(X)$.

При фиксированном $\widetilde{u} = u$ $A_u = Q(\eta, u) = Q(\eta, \widetilde{u})|_{\widetilde{u}=u}$ — нечеткое множество, значение $u \in \mathrm{U}$ определяет его модель; при фиксированном $\eta = y$ $\widetilde{A}_y = Q(y, \widetilde{u}) = Q(\eta, \widetilde{u})|_{\eta=y}$ — неопределенное множество, значение $y \in Y$ определяет его модель.

Пусть $x \in X$ и $\widetilde{u} = u \in \mathrm{U}$. Тогда индикаторная функция A_u $P^\eta(x \in \in Q(\eta, u)) = \sup\{f^\eta(y)|\ y \in Y, x \in Q(y, u)\} = f^{A_u}(x)$ — возможность покрытия $x \in X$ нечетким множеством A_u, и

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(P(x \in Q(\eta, \widetilde{u})) = p) = \sup\{g^{\widetilde{u}}(u)|\ u \in \mathrm{U},\ f^{A_u}(x) = p\} = \tau_x^{\widetilde{A}}(p), \quad p \in [0, 1],\ x \in X. \tag{7.1}$$

Функцию $\tau_\cdot^{\widetilde{A}}(\cdot) : X \times [0,1] \to [0,1]$ *назовем индикаторной функцией (одноточечного покрытия)* НН *множества* $\widetilde{A}$, *ее значение* $\tau_x^{\widetilde{A}}(p)$ *есть правдоподобие истинности высказывания, согласно которому возможность покрытия* $x \in X$ *НН множеством* $\widetilde{A}$ *равна* $p \in [0, 1]$.

НН множество можно представить как многозначный образ НН элемента. Пусть $\widetilde{\xi}$ — НН элемент со значениями в X, $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$ — распределение правдоподобия возможностей $p \in [0, 1]$ его значений $x \in X$,

$A^{\cdot} : X \to \mathcal{P}(Z)$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ множество $A^x \in \mathcal{P}(Z)$, $A_{\cdot} : Z \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение, обратное $A^{\cdot}$, то есть $A_z = \{x \in X,\ z \in A^x\}$, $z \in$ $\in Z$, $A^x = \{z \in Z,\ x \in A_z\}$, $x \in X$. Тогда $A^{\widetilde{\xi}}$ — НН множество со значениями в $\mathcal{P}(Z)$, образ НН элемента $\widetilde{\xi}$. Его индикаторная функция $\tau_z^{A^{\xi}}(p) = \mathrm{Pl}(P(z \in A^{\widetilde{\xi}}) = p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A_z) = p) = \left(\bigvee_{x \in A_z} \tau_x^{\widetilde{\xi}}\right)(p)$, $z \in Z,\ p \in [0,\, 1]$.

Соответственно $\tau_z^{A^{\xi}*}(p) = \sup\limits_{x \in A_z} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)$, $\tau_{z*}^{A^{\xi}}(p) = \inf\limits_{x \in A_y} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)$, $z \in$ $\in Z,\ p \in [0,\, 1]$.

7.1. Включение, равенство, эквивалентность НН множеств

Определение 7.2. НН множество $\widetilde{A}_1 = Q_1(\eta, \widetilde{u})$ содержится (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$) в НН множестве $\widetilde{A}_2 = Q_2(\eta, \widetilde{u})$, $\widetilde{A}_1 \subset \widetilde{A}_2$ (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$), если

$$\{(y, u) \in Y \times \mathrm{U},\ Q_1(y, u) \subset Q_2(y, u)\} \supset Y_{(1)} \times \mathrm{U}_{(1)};$$

НН множества $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$) равны, $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$, (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$), если $\widetilde{A}_1 \subset \widetilde{A}_2$, (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$) и $\widetilde{A}_1 \supset \widetilde{A}_2$, (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$), то есть если

$$\{(y, u) \in Y \times \mathrm{U},\ Q_1(y, u) = Q_2(y, u)\} \supset Y_{(1)} \times \mathrm{U}_{(1)};$$

НН множества $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ эквивалентны (в смысле одноточечного покрытия), $\widetilde{A}_1 \simeq \widetilde{A}_2$, если $\tau_x^{\widetilde{A}_1}(p) = \tau_x^{\widetilde{A}_2}(p)$, $x \in X,\ p \in [0,\, 1]$. Обозначение $\widetilde{A}_1 \mathrel{\widetilde{\subset}} \widetilde{A}_2$ включения $\widetilde{A}_1$ в $\widetilde{A}_2$ в широком смысле будет означать, что $\tau_x^{\widetilde{A}_1*}(p) \leqslant \tau_x^{\widetilde{A}_2*}(p)$, $\tau_{x*}^{\widetilde{A}_1}(p) \geqslant \tau_{x*}^{\widetilde{A}_2}(p)$, $x \in X,\ p \in [0,\, 1]$. Оба эти неравенства будем обозначать как $\tau_{\cdot}^{\widetilde{A}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{\cdot}^{\widetilde{A}_2}(\cdot)$. Соответственно равенство $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ в широком смысле $\widetilde{A}_1 \approx \widetilde{A}_2$ означает, что $\tau_x^{\widetilde{A}_1*}(p) = \tau_x^{\widetilde{A}_2*}(p)$, $\tau_{x*}^{\widetilde{A}_1}(p) = \tau_{x*}^{\widetilde{A}_2}(p)$, $x \in X,\ p \in [0,\, 1]$.

Очевидно, $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$, mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}) \Rightarrow \tau_x^{\widetilde{A}_1}(p) = \tau_x^{\widetilde{A}_2}(p)$, $x \in$ $\in X,\ p \in [0,\, 1], \Leftrightarrow\ \widetilde{A}_1 \simeq \widetilde{A}_2 \Rightarrow \tau_x^{\widetilde{A}_1*}(p) = \tau_x^{\widetilde{A}_2*}(p)$, $\tau_{x*}^{\widetilde{A}_1}(p) = \tau_{x*}^{\widetilde{A}_2}(p)$, $x \in$ $\in X,\ p \in [0,\, 1], \Leftrightarrow \widetilde{A}_1 \approx \widetilde{A}_2$.

Покажем, что $\widetilde{A}_1 \subset \widetilde{A}_2$ (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})) \Rightarrow \widetilde{A}_1 \mathrel{\widetilde{\subset}} \widetilde{A}_2$. Действительно, если $\{(y,u) \in Y \times \mathrm{U},\ Q_1(y,u) \subset Q_2(y,u)\} \supset Y_{(1)} \times \mathrm{U}_{(1)}$, то $\forall x \in X$ и $\forall (y,u) \in Y_{(1)} \times \mathrm{U}_{(1)}$ $x \in Q_1(y,u) \Rightarrow x \in Q_2(y,u)$, следовательно $\forall u \in \mathrm{U}_{(1)}$ $\{y \in Y_{(1)},\ x \in Q_1(y,u)\} \subset \{y \in Y_{(1)},\ x \in Q_2(y,u)\}$ и поэтому $\forall u \in \mathrm{U}_{(1)}$ $P(x \in Q_1^{(\eta,u)}) \leqslant P(x \in Q_2^{(\eta,u)})$. Отсюда следует, что

$$\tau_{x*}^{\widetilde{A}_2}(p) = \mathrm{Pl}(P(x \in \widetilde{A}_2) \leqslant p) \leqslant \mathrm{Pl}(P(x \in \widetilde{A}_1) \leqslant p) = \tau_{x*}^{\widetilde{A}_1}(p),$$

$$\tau_x^{\widetilde{A}_1 *}(p) = \mathrm{Pl}(P(x \in \widetilde{A}_1) \geqslant p) \leqslant \mathrm{Pl}(P(x \in \widetilde{A}_2) \geqslant p) = \tau_x^{\widetilde{A}_2 *}(p),$$

$x \in X,\ p \in [0,\ 1]$.

Пусть $Q^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$, $A = Q^\eta$ — нечеткое множество. НН множество $\widetilde{A}$, равное A (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$), $\widetilde{A} = A$ (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$), то есть такое, что

$$\{(y,u) \in Y \times \mathrm{U},\ Q(y,u) = Q^y\} \supset Y_{(1)} \times \mathrm{U}_{(1)},$$

назовем определенныи нечетким, равным A. Если $f^A(\cdot) : X \to [0,\ 1]$ — индикаторная функция A, то есть $f^A(X) = P^\eta(x \in Q^\eta),\ x \in X$, то

$$\begin{aligned}
\tau_x^{\widetilde{A}}(p) &= \mathrm{Pl}(P^\eta(x \in \widetilde{A}) = p) = \\
&= \sup\Big\{g^{\widetilde{u}}(\widetilde{u})\Big|\ u \in \mathrm{U}_{(1)},\ \sup\{f^\eta(y)|\ y \in Y,\ x \in Q(y,u)\} = p\Big\} = \\
&= \sup\Big\{g^{\widetilde{u}}(\widetilde{u})|\ u \in \mathrm{U}_{(1)},\ f^A(x) = p\Big\} = \\
&= \begin{cases} 1, & \text{если } p = f^A(x), \\ 0, & \text{если } p \neq f^A(x), \end{cases} \quad p \in [0,\ 1],\ x \in X. \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

Любое НН множество $\widetilde{A}$, для которого выполнено равенство (7.2), эквивалентно (в том числе и в широком смысле) определенному нечеткому, равному A, $\widetilde{A} \simeq A$, $\widetilde{A} \approx A$.

Заметим, что если $\widetilde{A} \simeq A$ (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$), то $X \backslash Q(\eta,\widetilde{u}) \equiv X \backslash \widetilde{A} = X \backslash A \equiv X \backslash Q^\eta$ (mod $(N^\eta,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$). Следовательно,

$$\tau_x^{X \backslash \widetilde{A}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = f^{X \backslash A}(x), \\ 0, & \text{если } p \neq f^{X \backslash A}(x), \end{cases} \quad p \in [0,\ 1],\ x \in X,$$

где далее, если не оговорено противное,

$$f^{X\setminus A}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f^A(x) < 1, \\ 0, & \text{если } f^A(x) = 1, \end{cases} \quad x \in X,$$

($f^{X\setminus A}(\cdot)$ — минимальное решение уравнения
$\max(f^A(x), f^{X\setminus A}(x)) = 1,\ x \in X$.
$\forall x \in X,\ f^{X\setminus A}(x) = \min\{\bar{f}^{X\setminus A}(x) | \bar{f}^{X\setminus A}(x), \max(f^A(x),\ \bar{f}^{X\setminus A}(x)) = 1\}$).

7.2. Независимость НН элемента и НН множества, НН множеств. Правдоподобие возможности включения НН элемента в НН множество

Пусть $(Y_1 \times Y_2,\ \mathcal{P}(Y_1 \times Y_2),\ P^{\eta_1,\eta_2})$ и $(\mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_2,\ \mathcal{P}(\mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_2),\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2})$ — пространства с возможностью и с правдоподобием,

$$\begin{aligned} f^{\eta_1,\eta_2}(y_1,\, y_2) &= \min(f^{\eta_1}(y_1),\, f^{\eta_2}(y_2)), \quad (y_1,\, y_2) \in Y_1 \times Y_2, \\ g^{\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2}(u_1,\, u_2) &= \min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\, g^{\widetilde{u}_2}(u_2)), \quad (u_1,\, u_2) \in \mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_2 \end{aligned} \tag{7.3}$$

— распределения P^{η_1,η_2} и $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2}$ соответственно, и

$$q(\cdot,\,\cdot) : Y_1 \times \mathrm{U}_1 \to X, \quad Q(\cdot,\,\cdot) : Y_2 \times \mathrm{U}_2 \to \mathcal{P}(X).$$

Определение 7.3. Пусть выполнены условия (7.3), тогда назовем независимыми

- любой НН элемент $\widetilde{\xi} = q(\eta_1,\, \widetilde{u}_1)$ и любое НН множество $\widetilde{A} = Q(\eta_2,\, \widetilde{u}_2)$, и
- любые НН множества $\widetilde{A}_i = Q_i(\eta_i,\, \widetilde{u}_i)$, $i = 1,\, 2$.

Если в качестве базовых выбрать пространства
$(\prod\limits_{i=1}^{n} Y_i,\ \mathcal{P}(\prod\limits_{i=1}^{n} Y_i),\ P^{\eta_1,\ldots,\eta_n})$ и $(\prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i,\ \mathcal{P}(\prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i),\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_n})$, то условие

$$f^{\eta_1,\ldots,\eta_n}(y_1,\ldots,y_n) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} f^{\eta_i}(y_i),\ y_i \in Y_i,\ i = 1,\ldots,n,$$

$$g^{\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_n}(u_1,\ldots,u_n) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} g^{\widetilde{u}_i}(u_i),\ u_i \in\ U_i,\ i = 1,\ldots,n,$$

определит взаимную независимость НН элементов $\widetilde{\xi}_{k_i} = q_{k_i}(\eta_{k_i},\, \widetilde{u}_{k_i})$, $i \in I_1$, и НН множеств $\widetilde{A}_{k_i} = Q(\eta_{k_i},\, \widetilde{u}_{k_i})$, $i \in I_2$, $I_1 \cup I_2 = \{1,\, \ldots,\, n\}$,

$I_1 \cap I_2 = \varnothing$, где $q_{k_i}(\cdot,\,\cdot) : Y_{k_i} \times \mathrm{U}_{k_i} \to X_{k_i},\ i \in I_1$, $Q_{k_i}(\cdot,\,\cdot) : Y_{k_i} \times \mathrm{U}_{k_i} \to \mathcal{P}(X_{k_i}),\ i \in I_2$.

Пусть $\xi_{u_1} = \widetilde{\xi}\Big|_{\widetilde{u}_1 = u_1}$ — нечеткий элемент, $A_{u_2} = \widetilde{A}\Big|_{\widetilde{u}_2 = u_2}$ — нечеткое множество, $u_1 \in \mathrm{U}_1$, $u_2 \in \mathrm{U}_2$, и выполнены условия (7.3). Возможность равенства $\xi_{u_1} = x$ и включения $x \in A_{u_1}$

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{u_1} = x \text{ и } x \in A_{u_2}) = \\
&\qquad = \sup\{\min(f^{\eta_1}(y_1),\, f^{\eta_2}(y_2))|\ y_1 \in Y_1,\, y_2 \in Y_2,\, q(y_1,\, u_1){=}x, \\
&\qquad Q(y_2,\, u_2) \ni x\} = \min(\sup\{f^{\eta_1}(y_1)|y_1 \in Y_1,\, q(y_1,\, u_1) = x\}, \\
&\quad \sup\{f^{\eta_2}(y_2)|y_2 \in Y_2,\, Q(y_2,\, u_2) \ni x\}) = \min(f^{\xi_{u_1}}(x),\, f^{A_{u_2}}(x)).
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
P(\xi_{u_1} \in A_{u_2}) = P(\exists x \in X\ \xi_{u_1} = x \text{ и } x \in A_{u_2}) = \\
= \sup_{x \in X} \min(f^{\xi_{u_1}}(x),\, f^{A_{u_2}}(x)).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Для правдоподобия высказывания, согласно которому возможность (7.4) равна $p_x \in [0,\,1]$, $x \in X$, найдем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pl}(P(\xi_{\widetilde{u}_1} = x,\, x \in A_{\widetilde{u}_1}) = p_x) = \sup\{\min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\, g^{\widetilde{u}_2}(u_2))| \\
&\qquad u_1 \in \mathrm{U}_1,\, u_2 \in \mathrm{U}_2,\, \min(f^{\xi_{u_1}}(x),\, f^{A_{u_2}}(x)) = p_x\} = \\
&\qquad = \sup\{\sup\{\min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\, g^{\widetilde{u}_2}(u_2))|u_1 \in \mathrm{U}_1,\, u_2 \in \mathrm{U}_2, \\
&\quad f^{\xi_{u_1}}(x) = a_1,\, f^{\xi_{u_2}}(x) = a_2\}|\ a_1,\, a_2 \in [0,\,1],\, \min(a_1,\, a_2) = p_x\} = \\
&\quad = \sup\{\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a_1),\, \tau_x^{\widetilde{A}}(a_2))|\ a_1,\, a_2 \in [0,\,1],\, \min(a_1,\, a_2) = p_x\} \triangleq \\
&\qquad\qquad \triangleq (\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}})(p_x), \quad x \in X.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Теорема 7.1. *Пусть неопределенная функция* $p_x(\widetilde{u}_1,\, \widetilde{u}_2) = P(\xi_{\widetilde{u}_1} = x,\, x \in A_{\widetilde{u}_2}) \equiv P(\xi_{\widetilde{u}_1} = x$ *и* $x \in A_{\widetilde{u}_2})$, $x \in X$, *имеет независимые значения, так что согласно* (7.6) *для любой функции* $p_{\cdot} : X \to [0,\,1]$

$$\mathrm{Pl}(\forall x \in X\ p_x(\widetilde{u}_1,\, \widetilde{u}_2) = p_x) \equiv \mathrm{Pl}(p_{\cdot}(\widetilde{u}_1,\, \widetilde{u}_2) = p_{\cdot}) = \inf_{x \in X} (\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}})(p_x) \tag{7.7}$$

— правдоподобие равенства $p.(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) = p.$, *эквивалентного системе равенств* $\forall x \in X\ P(\xi_{\widetilde{u}_1} = x, x \in A_{\widetilde{u}_2}) = p_x$. *Тогда правдоподобие возможности* $p \in [0,\, 1]$ *НН события* $\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}) = p) = \\
&\qquad = \sup\{\inf_{x\in X}(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}})(p_x)|\ p.:\ X \to [0,\, 1],\ \sup_{x\in X} p_x = p\} = \\
&\qquad\qquad = \left(\bigvee_{x\in X}(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}})\right)(p),
\end{aligned} \tag{7.8}$$

где

$$\begin{aligned}
\left(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}}\right)(q) = \sup\{\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a),\ \tau_x^{\widetilde{A}}(b))|\ a,\ b \in [0,1],\\
\min(a,\ b) = q\} \overset{\triangle}{=} \tau_x(q),\ x \in X,\ q \in [0,1],
\end{aligned} \tag{7.9}$$

и как следствие равенства (7.8)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}) \leqslant p) = \inf_{x\in X}\max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\ \tau_{x*}^{\widetilde{A}}(p)),\\
&\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}) \geqslant p) = \sup_{x\in X}\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\ \tau_x^{\widetilde{A}*}(p)),
\end{aligned} \quad p \in [0,\, 1]. \tag{7.10}$$

Доказательство. Действительно, при предположении (7.7) согласно (7.5), (7.6)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}) = p) = \mathrm{Pl}(P(\xi_{\widetilde{u}_1} \in A_{\widetilde{u}_2}) = p) = \\
&\quad = \sup\{\min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\ g^{\widetilde{u}_2}(u_2))|\ u_1 \in \mathrm{U}_1,\ u_2 \in \mathrm{U}_2,\ P(\xi_{u_1} \in A_{u_2}) = \\
&= \sup_{x\in X}\min(f^{\xi_{u_1}}(x),\ f^{A_{u_2}}(x)) = p\} = \sup\{\sup\{\min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\ g^{\widetilde{u}_2}(u_2))\}| \\
&\quad u_1 \in \mathrm{U}_1,\ u_2 \in \mathrm{U}_2,\ p.(u_1, u_2) = p.|\ p.:\ X \to [0,\, 1],\ \sup_{x\in X} p_x = p\} = \\
&\qquad = \sup\{\inf_{x\in X}(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}})(p_x)|\ p.:\ X \to [0,\, 1],\ \sup_{x\in X} p_x = p\} = \\
&\qquad\qquad = \left(\bigvee_{x\in X}(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}})\right)(p), \quad p \in [0,\, 1].
\end{aligned}$$

Равенства (7.10) нетрудно получить из равенства (7.8).

§ 8. Мера правдоподобия возможности и интеграл. Переходное правдоподобие возможности

Следуя схеме построения меры и интеграла, принятой в [1], определим интеграл и меру правдоподобия возможности, основываясь на формуле (7.8) .

Определение 8.1. Интегралом pl назовем функцию, определенную на классе $\mathcal{T}(X)$ всех функций $t.(\cdot) : X \times [0,1] \to [0,1]$, со значениями в $\mathcal{T}$, $\mathrm{pl}(\cdot)(\cdot) : \mathcal{T}(X) \to [0,1]$, согласно формуле

$$\mathrm{pl}(t.(\cdot))(p) = \left(\bigvee_{x\in X} (t_x \wedge \pi_x)\right)(p),\ t.(\cdot) \in \mathcal{T}(X),\ p \in [0,1], \tag{8.1}$$

в которой $t.(\cdot)$ — произвольная, $\pi.(\cdot)$ —фиксированная функция из $\mathcal{T}(X)$, первая является аргументом pl, вторая — определяет pl.

Мерой правдоподобия возможности, или короче — правдоподобием возможности, назовем функцию $\mathrm{Pl}(\cdot)(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{T}$, определенную формулой (см. (7.8))

$$\mathrm{Pl}(A)(p) = \left(\bigvee_{x\in A} \pi_x\right)(p),\ A \in \mathcal{P}(X),\ p \in [0,1], \tag{8.2}$$

которая получена из (8.1) при $t_x(p) = \begin{cases} 1, \text{если } p = \chi_A(x), \\ 0, \text{если } p \neq \chi_A(x), \end{cases}$ $x \in X$, $p \in [0,1]$, где $\chi_A(x) = \begin{cases} 1,\ \text{если } x \in A, \\ 0,\ \text{если } x \in X\backslash A, \end{cases}$ $x \in X$, — индикаторная функция множества $A \in \mathcal{P}(X)$.

Функцию $\pi.(\cdot) : X \to \mathcal{T}$ назовем распределением правдоподобия возможности (8.2).

Замечание 8.1. Если в (8.1) $t_x(p) = \tau_x^{\widetilde{A}}(p),\ x \in X,\ p \in [0,1]$, — индикаторная функция (одноточечного покрытия) НН множества $\widetilde{A}$, $\pi_x(p) = \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p),\ x \in X,\ p \in [0,1]$, — распределение НН элемента $\widetilde{\xi}$, то согласно теореме 7.1 в (8.1)

$$\mathrm{pl}(\tau_\cdot^{\widetilde{A}}(\cdot)) = \left(\bigvee_{x\in X} (\tau_x^{\widetilde{A}} \wedge \tau_x^{\widetilde{\xi}})\right)(p),\ p \in [0,\ 1], \tag{8.3}$$

и интеграл (8.3) «определен» НН элементом $\widetilde{\xi}$.

Если $A \in \mathcal{P}(X)$ — «обычное», определенное четкое множество, $\chi_A(\cdot) : X \to \{0,1\}$ — его индикаторная функция, то согласно (8.3) в (8.2)

$$\mathrm{Pl}(A)(p) = \left(\bigvee_{x\in A} \tau_x^{\widetilde{\xi}}\right)(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = p),\ p \in [0,\ 1]. \tag{8.4}$$

Поэтому распределение $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot) : X \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ НН элемента $\widetilde{\xi}$, рассматриваемое как функция $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot) : X \to \mathcal{T}$, является распределением правдоподобия возможности (8.4).

Свойства меры правдоподобия возможности и интеграла и их применения рассматриваются во второй части.

В заключение остановимся на понятии переходного правдоподобия возможности, аналогичном понятию переходной возможности, рассмотренному в § 1.3.

Определение 8.2. Отображение $\mathrm{Pl}(\cdot|\cdot)(\cdot) : \mathcal{P}(X_1) \times X_2 \to \mathcal{T}$ назовем переходным правдоподобием возможности на $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$, $(X_2, \mathcal{P}(X_2))$, если при каждом $x_2 \in X_2$ $\mathrm{Pl}(\cdot|x_2)(\cdot) : \mathcal{P}(X_1) \to \mathcal{T}$ есть правдоподобие возможности на $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$; функцию $\pi_{\cdot|\cdot}(\cdot) : X_1 \times X_2 \to \mathcal{T}$ назовем распределением переходного правдоподобия возможности $\mathrm{Pl}(\cdot|\cdot)(\cdot) : \mathcal{P}(X_1) \times X_2 \to \mathcal{T}$, если при каждом $x_2 \in X_2$ $\pi_{\cdot|x_2}(\cdot) : X_1 \to \mathcal{T}$ есть распределение правдоподобия возможности $\mathrm{Pl}(\cdot|x_2)(\cdot) : \mathcal{P}(X_1) \to \mathcal{T}$, то есть если для любых $A_1 \in \mathcal{P}(X_1),\ x_2 \in X_2$

$$\mathrm{Pl}(A_1|x_2)(p) = \left(\bigvee_{x_1\in A_1} \pi_{x_1|x_2}\right)(p),\ p \in [0,\ 1]. \tag{8.5}$$

Пусть $\mathrm{Pl}(\cdot)(\cdot) : \mathcal{P}(X_2) \to \mathcal{T}$ — произвольное правдоподобие возможности на $(X_2, \mathcal{P}(X_2))$ и $\pi_{\cdot}(\cdot) : X_2 \to \mathcal{T}$ — его распределение, то есть для любого $A_2 \in \mathcal{P}(X_2)$

$$\mathrm{Pl}(A_2)(p) = \left(\bigvee_{x_2\in A_2} \pi_{x_2}\right)(p),\ p \in [0,\ 1].$$

Тогда
$$\pi_{x_1,x_2}(\cdot) = (\pi_{x_1|x_2} \wedge \pi_{x_2})(\cdot),\ (x_1,\ x_2) \in X_1 \times X_2, \tag{8.6}$$
— распределение правдоподобия возможности на $(X_1 \times X_2, \mathcal{P}(X_1 \times X_2))$, то есть для любого $C \in \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$
$$\mathrm{Pl}(C)(p) = \left(\bigvee_{(x_1,x_2)\in C} (\pi_{x_1|x_2} \wedge \pi_{x_2}) \right)(p),\ p \in [0,\ 1]. \tag{8.7}$$

Если считать, что в (8.6) $\pi_{x_2}(p) = \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p)$, $x_2 \in X_2$, $p \in [0,\ 1]$, — распределение НН элемента $\widetilde{\xi}_2$, $\pi_{x_1,x_2}(p) = \tau_{x_1,x_2}^{\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2}(p)$, $(x_2, x_2) \in X_1 \times X_2$, $p \in [0,\ 1]$ — совместное распределение НН элементов $\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2$, то согласно (6.27) в (8.6)
$$\pi_{x_1,x_2}(p) = \tau_{x_1|x_2}^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}(p),\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ p \in [0,\ 1], \tag{8.8}$$
вариант условного распределения $\widetilde{\xi}_1$, при условии $\widetilde{\xi}_2 = x_2$, причем такой, что при любом $x_2 \in X_2$ $\tau_{x_1|x_2}^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$, $x_1 \in X_1$, — распределение правдоподобия возможности, что, вообще говоря, не свойственно условному распределению правдоподобия возможностей в (6.27). Функцию $\tau_{x_1|x_2}^{\widetilde{\xi}_1|\widetilde{\xi}_2}(p)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $p \in [0,\ 1]$, в (8.8) назовем *переходным распределением* НН *элемента* $\widetilde{\xi}_1$ при $\widetilde{\xi}_2 = x_2$.

Часть II. Мера правдоподобия возможности и интеграл

Предисловие

В первой части определены и исследованы конструкции неопределенного нечеткого (НН) элемента и неопределенного нечеткого (НН) множества. НН элемент $\widetilde{\xi}$ со значениями в X охарактеризован распределением $\tau^{\widetilde{\xi}}_{\cdot}(\cdot) : X \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ правдоподобия возможностей его значений. НН множество со значениями в классе $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X определено как образ $A^{\widetilde{\eta}}$ НН элемента η, принимающего значения в Y, где $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение, и охарактеризовано индикаторной функцией $\tau_{\cdot}^{A^{\tilde{\eta}}}(\cdot) : X \times [0,\,1] \to [0,\,1]$ одноточечного покрытия.

Значение $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$ определяет правдоподобие истинности высказывания, согласно которому p — возможность равенства (события) $\widetilde{\xi} = x,\ p \in [0,\,1],\ x \in X$; значение $\tau_x^{A^{\tilde{\eta}}}(p)$ определяет правдоподобие истинности высказывания, согласно которому p — возможность включения (события) $x \in A^{\tilde{\eta}},\ p \in [0,\,1],\ x \in X$.

Во второй части определены и исследованы

- класс распределений правдоподобия возможностей и наиболее важные его подклассы;
- шкала значений правдоподобия возможностей и группа ее автоморфизмов;
- мера правдоподобия возможности и интеграл, позволяющие определить правдоподобия возможностей широкого класса событий, допускающих описание в терминах *элементарных событий* $\widetilde{\xi} = x$ и $x \in A^{\tilde{\eta}},\ x \in X$.

§ 1. Шкала значений правдоподобия возможностей

Шкала значений правдоподобия возможностей определяется четырьмя элементами: множеством $\mathcal{T}$ распределений правдоподобия возможностей, бинарным отношением $\preccurlyeq$ упорядоченности на $\mathcal{T}$ и двумя бинарными операциями — *сложением* $\vee : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ и *умножением* $\wedge : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$. В этом параграфе эти элементы определены и исследованы.

1.1. Класс $\mathcal{T}$, операции $\vee$, $\wedge$, $+$ и $\bullet$

Введем класс функций $\mathcal{T} = \{\tau(\cdot) : [0,\,1] \longrightarrow [0,\,1]\}$, определенных на $[0,\,1]$, принимающих значения в $[0,\,1]$, удовлетворяющих *условию нормировки* $\sup\limits_{0 \leqslant p \leqslant 1} \tau(p) = 1$ и содержащий[1]:

[1] Далее обозначения (I), (II), ... выделяют условия, которым должны удовлетворять функции, принадлежащие классу $\mathcal{T}$.

(I) *вместе с каждой функцией* $\tau(\cdot)$ *функции*

$$\tau^*(p) = \sup_{a \geqslant p} \tau(a), \qquad \tau_*(p) = \sup_{a \leqslant p} \tau(a); \tag{1.1}$$

(II) *вместе с каждой парой функций* $\tau_1(\cdot)$ *и* $\tau_2(\cdot)$ *их сумму* $(\tau_1 \vee \tau_2)(\cdot)$ и *произведение* $(\tau_1 \wedge \tau_2)(\cdot)$, *определенные равенствами*

$$\begin{gathered}(\tau_1 \vee \tau_2)(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_1(a), \tau_2(b)) \,|\, a,\, b \in [0,1],\ \max(a,\, b) = p\},\\ (\tau_1 \wedge \tau_2)(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_1(a), \tau_2(b)) \,|\, a,\, b \in [0,1],\ \min(a,\, b) = p\},\\ p \in [0,\, 1].\end{gathered} \tag{1.2}$$

Как правило, далее значение $\tau(p)$ интерпретируется как значение правдоподобия истинности высказывания, согласно которому $p \in$ $\in [0,\, 1]$ есть значение возможности некоторого элементарного события, короче, $\tau(p)$ — правдоподобие возможности $p \in [0,\, 1]$, (см. ч. 1).

Рассмотрим примеры функций $\tau(\cdot) \in \mathcal{T}$, (см. ч. 1). Например, НН элемент $\widetilde{\xi}$, принимающий значения в множестве X, характеризуется распределением $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot) :\ X \times [0,1] \to [0,\, 1]$ правдоподобия возможностей его значений, значение $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) \triangleq \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = p)$ которого есть правдоподобие возможности $p \in [0,\, 1]$ равенства (элементарного события) $\widetilde{\xi} = x \in X$; *функция* $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$ *называется распределением НН элемента* $\widetilde{\xi}$.

Пусть $A^{\cdot} :\ Y \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение множества Y в множество $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X и $\widetilde{\eta}$ — НН элемент со значениями в Y. Образ $A^{\widetilde{\eta}} \in \mathcal{P}(X)$ НН элемента $\widetilde{\eta}$ называется неопределенным нечетким (НН) множеством, принимающим значения в $\mathcal{P}(X)$ (НН подмножеством X) (см. ч. 1). Если $A_x \triangleq \{y \in Y,\, x \in A^y\}$, $x \in X$, то включения $y \in A_x$ и $x \in A^y$, $x \in X$, $y \in Y$, эквивалентны, ра́вно как и события $x \in A^{\widetilde{\eta}}$ и $\widetilde{\eta} \in A_x$. Поэтому $\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) \triangleq \mathrm{Pl}(\mathrm{P}(\widetilde{\eta} \in A_x) = p)$ — правдоподобие возможности $p \in [0,\, 1]$ включения $\widetilde{\eta} \in A_x$, $x \in X$, равное правдоподобию $\mathrm{Pl}(P(x \in A^{\widetilde{\eta}}) = p)$ возможности $p \in [0,\, 1]$ элементарного события $x \in A^{\widetilde{\eta}}$, состоящего в том, что НН множество $A^{\widetilde{\eta}}$ покрывает элемент $x \in X$. Функция $\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot) :\ X \times [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ называется *индикаторной функцией* (и.ф.) *одноточечного покрытия НН множества* $A^{\widetilde{\eta}}$.

Для каждого $x \in X$ как $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$, так и $\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot)$ являются элементами $\mathcal{T}$.

Обратимся к интерпретации формул (1.1) и (1.2) в терминах понятий НН элементов и НН множеств[2] (см. ч. 1). В равенствах (1.1) $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p) \triangleq \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) \geqslant p) = \sup\limits_{a \geqslant p} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(a)$, $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p) \triangleq \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) \leqslant p) = \sup\limits_{a \leqslant p} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(a)$ суть правдоподобия истинности высказываний, согласно которым возможность равенства $\widetilde{\xi} = x \in X$ не меньше и соответственно не больше $p \in [0, 1]$.

В равенствах (1.2) $q_{x,y}(a, b) \triangleq \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a), \tau_y^{\widetilde{\eta}}(b))$ — правдоподобие того, что возможности событий $\widetilde{\xi} = x \in X$ И $\widetilde{\eta} = y \in Y$ суть $a \in [0, 1]$ И $b \in [0, 1]$ соответственно, а $(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \vee \tau_y^{\widetilde{\eta}})(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a), \tau_y^{\widetilde{\eta}}(b)) | a, b \in \in [0, 1], \max(a, b) = p\}$ есть правдоподобие того, что возможность по крайней мере одного из равенств $\widetilde{\xi} = x$ ИЛИ $\widetilde{\eta} = y$ равна $p \in [0, 1]$.

Аналогично $(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_{\overline{x}}^{A^{\widetilde{\eta}}})(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a), \tau_{\overline{x}}^{A^{\widetilde{\eta}}}(b)) | a, b \in [0, 1], \min(a, b) = p\}$ есть правдоподобие того, что $p \in [0, 1]$ есть возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ И включения $\overline{x} \in A^{\widetilde{\eta}}$; в частности, $(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}})(p)$ — правдоподобие возможности $p \in [0, 1]$ события $\widetilde{\xi} = x \in A^{\widetilde{\eta}}$, $x \in X$.

Основные свойства операций (1.1), (1.2), и, в частности, тот факт, что операции (1.1) и (1.2) сохраняют нормировку, приведены в следующей лемме, в которой операции $(\tau_1 + \tau_2)(\cdot)$ и $(\tau_1 \bullet \tau_2)(\cdot)$ определены равенствами[3]

$$\begin{aligned}
&(\tau_1 + \tau_2)(p) \triangleq \tau_1(p) + \tau_2(p) \triangleq \max(\tau_1(p), \tau_2(p)) \equiv \max(\tau_1, \tau_2)(p),\\
&(\tau_1 \bullet \tau_2)(p) \triangleq \tau_1(p) \bullet \tau_2(p) \triangleq \min(\tau_1(p), \tau_2(p)) \equiv \min(\tau_1, \tau_2)(p),\\
&p \in [0, 1].
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Лемма 1.1. 1. *Имеют место равенства*

---

[2]Интерпретация дана для случая независимых НН элемента $\widetilde{\xi}$ и НН множества $A^{\widetilde{\eta}}$.

[3]эти операции определяют сложение и умножение в шкале значений меры возможности в [1].

$$
\begin{aligned}
(\tau_1 \wedge \tau_2)(p) = \max[\min(\tau_1(p),\ \tau_2^*(p)), \min(\tau_1^*(p),\ \tau_2(p))] = \\
= ((\tau_1 \bullet \tau_2^*) \dotplus (\tau_1^* \bullet \tau_2))(p) = \min[\tau_1^*(p), \tau_2^*(p), \max(\tau_1(p), \tau_2(p))] = \\
= (\tau_1^* \bullet \tau_2^* \bullet (\tau_1 \dotplus \tau_2))(p),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\tau_1 \vee \tau_2)(p) = \max[\min(\tau_1(p),\ \tau_{2*}(p)), \min(\tau_{1*}(p),\ \tau_2(p))] = \\
= ((\tau_1 \bullet \tau_{2*}) \dotplus (\tau_{1*} \bullet \tau_2))(p) = \min[\tau_{1*}(p), \tau_{2*}(p), \max(\tau_1(p), \tau_2(p))] = \\
= (\tau_{1*} \bullet \tau_{2*} \bullet (\tau_1 \dotplus \tau_2))(p),
\end{aligned}
\quad (1.4)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\tau_1 \vee \tau_2)^*(p) = \max(\tau_1^*(p), \tau_2^*(p)) \triangleq (\tau_1^* \dotplus \tau_2^*)(p), \\
&(\tau_1 \vee \tau_2)_*(p) = \min(\tau_{1*}(p), \tau_{2*}(p)) \triangleq (\tau_{1*} \bullet \tau_{2*})(p), \\
&(\tau_1 \wedge \tau_2)^*(p) = \min(\tau_1^*(p), \tau_2^*(p)) \triangleq (\tau_1^* \bullet \tau_2^*)(p), \\
&(\tau_1 \wedge \tau_2)_*(p) = \max(\tau_{1*}(p), \tau_{2*}(p)) \triangleq (\tau_{1*} \dotplus \tau_{2*})(p),
\end{aligned}
\right.
\quad p \in [0, 1]. \quad (1.5)
$$

2. *Операции* $\vee$ *и* $\wedge$ *ассоциативны:*

$$
\begin{aligned}
\tau(p) \triangleq \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \tau_j \right)(p) = \\
= \sup \left\{ \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \tau_i(a_i) | a_j \in [0,\ 1],\ j = 1 \ldots,\ n,\ \min_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k = p \right\} = \\
= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \min(\tau_1^*(p), \ldots, \tau_{k-1}^*, \tau_k(p), \tau_{k+1}^*(p), \ldots, \tau_n^*(p)) \triangleq \\
\triangleq \mathop{\dotplus}_{k=1}^{n} \left(\tau_k(p) \bullet \left(\mathop{\bullet}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \tau_i^*(p) \right) \right), \quad p \in [0,\ 1];
\end{aligned}
\quad (1.6)
$$

$$
\tau^*(p) = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_k^*(p), \qquad \tau_*(p) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_{k*}(p), \qquad p \in [0,\ 1]; \quad (1.7)
$$

$$\tau(p) \triangleq \left(\bigvee_{j=1}^{n} \tau_j\right)(p) =$$

$$= \sup\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant n} \tau_i(a_i) | a_j \in [0,\ 1],\ j = 1 \ldots,\ n,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = p\right\} =$$

$$= \max_{1\leqslant k\leqslant n} \min(\tau_{1*}(p), \ldots, \tau_{k-1*}, \tau_k(p), \tau_{k+1*}(p), \ldots, \tau_{n*}(p)) \triangleq$$

$$\triangleq \mathop{+}_{k=1}^{n} \left(\tau_k(p) \bullet \left(\mathop{\bullet}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} \tau_{i*}(p)\right)\right),\quad p \in [0,\ 1]; \quad (1.8)$$

$$\tau^*(p) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \tau_k^*(p), \qquad \tau_*(p) = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \tau_{k*}(p), \qquad p \in [0,\ 1]. \quad (1.9)$$

Доказательство. 1. Равенства (1.4) следуют из соотношений

$$(\tau_1 \vee \tau_2)(p) = \max\left[\sup_{\substack{a=p\\ b\leqslant p}} \min(\tau_1(a),\ \tau_2(b)),\ \sup_{\substack{a\leqslant p\\ b=p}} \min(\tau_1(a),\ \tau_2(b))\right],$$

$$(\tau_1 \wedge \tau_2)(p) = \max\left[\sup_{\substack{a=p\\ b\geqslant p}} \min(\tau_1(a),\ \tau_2(b)),\ \sup_{\substack{a\geqslant p\\ b=p}} \min(\tau_1(a),\ \tau_2(b))\right].$$

Рассмотрим левую часть первого равенства (1.5). Согласно равенствам (1.1), (1.4)

$$(\tau_1 \vee \tau_2)^*(p) = \sup_{q\geqslant p} \sup\big[\min(\tau_1(a),\ \tau_2(b)) | a,\ b \in [0,\ 1],\ \max(a,\ b) = q\big] =$$

$$= \sup\big[\min(\tau_1(a),\ \tau_2(b)) \mid a,\ b \in [0,\ 1],\ \max(a,\ b) \geqslant p\big] =$$

$$= \max\left[\sup_{\substack{0\leqslant a\leqslant 1\\ p\leqslant b\leqslant 1}} \min(\tau_1(a),\ \tau_1(b)),\ \sup_{\substack{p\leqslant a\leqslant 1\\ 0\leqslant b\leqslant 1}} \min(\tau_1(a),\ \tau_1(b))\right] =$$

$$= \max\left(\sup_{a\geqslant p} \tau_1(a),\ \sup_{b\geqslant p} \tau_2(b)\right) = \max(\tau_1^*(p),\ \tau_2^*(p)) \triangleq$$

$$\triangleq (\tau_1^* + \tau_2^*)(p), \quad p \in [0,\ 1].$$

Для левой части второго равенства (1.5)

$$(\tau_1 \vee \tau_2)_*(p) = \sup_{q \leqslant p} \sup\left[\min(\tau_1(a),\, \tau_2(b)) | a,\, b \in [0,\, 1],\, \max(a,\, b) = q\right] =$$
$$= \sup\left[\min(\tau_1(a),\, \tau_2(b)) \mid a,\, b \in [0,\, 1],\, \max(a,\, b) \leqslant p\right] =$$
$$= \sup_{\substack{0 \leqslant a \leqslant p \\ 0 \leqslant b \leqslant p}} \min(\tau_1(a),\, \tau_1(b)) = \min(\tau_{1*}(p),\, \tau_{2*}(p)) \stackrel{\triangle}{=}$$
$$\stackrel{\triangle}{=} (\tau_{1*} \bullet \tau_{2*})(p), \quad p \in [0,\, 1].$$

Остальные равенства (1.5) проверяются аналогично:

$$(\tau_1 \wedge \tau_2)^*(p) = \sup_{\substack{p \leqslant a \leqslant 1 \\ p \leqslant b \leqslant 1}} \min(\tau_1(a),\, \tau_2(b)) = \min(\tau_1^*(p),\, \tau_2^*(p)) \stackrel{\triangle}{=} (\tau_1^* \bullet \tau_2^*)(p),$$

$$(\tau_1 \wedge \tau_2)_*(p) = \max\left[\sup_{\substack{0 \leqslant a \leqslant 1 \\ 0 \leqslant b \leqslant p}} \min(\tau_1(a),\, \tau_2(b)),\ \sup_{\substack{0 \leqslant a \leqslant p \\ 0 \leqslant b \leqslant 1}} \min(\tau_1(a),\, \tau_2(b))\right] =$$
$$= \max(\tau_{1*}(p),\, \tau_{2*}(p)) \stackrel{\triangle}{=} (\tau_{1*} + \tau_{2*})(p).$$

Заметим, что согласно равенствам (1.1) и (1.5)

$$\tau^*(0) = \tau_*(1) = 1,\ (\tau_1 \vee \tau_2)^*(0) = \max(\tau_1^*(0),\, \tau_2^*(0)) = 1,$$
$$(\tau_1 \wedge \tau_2)_*(1) = \max(\tau_{1*}(1),\, \tau_{2*}(1)) = 1,$$

то есть операции (1.1) и (1.2) сохраняют нормировку.

2. Предположим, что $\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \tau_i\right)(p) = \sup\left\{\min\limits_{i \leqslant i \leqslant n} \tau_i(a_i) \mid \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k = p\right\}$; это равенство и ассоциативность операции $\wedge$ будут доказаны, если имеет место соотношение $\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \tau_i\right)(p) = \left(\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} \tau_i\right) \wedge \tau_n\right)(p)$, $p \in$ $\in [0,\, 1]$, верное, согласно (1.2), для $n = 2$. Проверим вначале первое равенство в (1.6):

$$\sup\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\tau_i(a_i)\mid\min_{1\leqslant k\leqslant n}a_k=p\right\}=$$

$$=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup\bigl\{\min(\tau_1(a_1),\ldots,\tau_n(a_n))\mid a_1\geqslant p,\ldots,a_{k-1}\geqslant p,a_k=p,$$

$$a_{k+1}\geqslant p,\ldots,a_n\geqslant p\bigr\}=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\min\Bigl(\sup_{a_1\geqslant p}\tau_1(a_1),\ldots,\sup_{a_{k-1}\geqslant p}\tau_{k-1}(a_{k-1}),$$

$$\tau_k(p),\sup_{a_{k+1}\geqslant p}\tau_{k+1}(a_{k+1}),\ldots,\sup_{a_n\geqslant p}\tau_n(a_n)\Bigr)=$$

$$=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\min(\tau_1^*(p),\ldots,\tau_{k-1}^*(p),\tau_k(p),\tau_{k+1}^*(p),\ldots,\tau_n^*(p))\triangleq$$

$$\triangleq\mathop{+}_{k=1}^{n}\left(\tau_k(p)\bullet\left(\mathop{\bullet}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\tau_i^*(p)\right)\right).\quad(1.10)$$

Кроме того, согласно предположению $\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}\tau_i\right)^*(p)=\sup\limits_{q\geqslant p}\sup\left\{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\tau_i(a_i)\mid\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_k=q\right\}=\sup\left\{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\tau_i(a_i)\mid\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_k\geqslant p\right\}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\tau_i^*(p)$, $p\in[0,\,1]$, то есть верно первое равенство в (1.7). В силу (1.10) и первого равенства в (1.7)

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\tau_i\right)(p)=$$

$$=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\min(\tau_1^*(p),\,\ldots,\,\tau_{k-1}^*(p),\,\tau_k(p),\,\tau^{k+1}(p),\,\ldots,\,\tau_n^*(p))=$$

$$=\max\Bigl\{\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}[\min(\min(\tau_1^*(p),\,\ldots,\,\tau_{k-1}^*(p),\,\tau_k(p),\,\tau^{k+1}(p),\,\ldots,$$

$$\tau_{n-1}^*(p)),\,\tau_n^*(p)),\min(\min(\tau_1^*(p),\,\ldots,\,\tau_{n-1}^*(p)),\,\tau_n(p))]\Bigr\}=$$

$$=\max\left\{\min\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1}\tau_i(p),\,\tau_n^*(p)\right),\,\min\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1}\tau_i\right)^*(p),\,\tau_n(p)\right)\right\}=$$

$$=\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1}\tau_i\right)\wedge\tau_n\right)(p),\quad p\in[0,\,1].$$

Остальные утверждения могут быть проверены по такой же схеме.

1.2. Класс $\mathcal{T}$, эквивалентность $\simeq$, упорядоченность $\preccurlyeq$

Определение 1.1. Функции $\tau_1(\cdot)$ и $\tau_2(\cdot)$ назовем эквивалентными, $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot)$, если

$$\tau_1^*(\cdot) = \tau_2^*(\cdot), \quad \tau_{1*}(\cdot) = \tau_{2*}(\cdot); \tag{1.11}$$

очевидно, $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot),\ \tau_2(\cdot) \simeq \tau_3(\cdot) \Rightarrow \{\tau_1(\cdot)\} \simeq \{\tau_3(\cdot)\}$.

Если же

$$\tau_1^*(p) \leqslant \tau_2^*(p), \qquad \tau_{1*}(p) \geqslant \tau_{2*}(p), \qquad p \in [0,\, 1], \tag{1.12}$$

то будем писать $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$, так что $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot)$, если и только если $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$ и $\tau_2(\cdot) \preccurlyeq \tau_1(\cdot)$. Очевидно, $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot),\ \tau_2(\cdot) \preccurlyeq \tau_3(\cdot) \Rightarrow \tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_3(\cdot)$.

В некоторых случаях то же самое будем записывать как $\tau_1(p) \simeq \tau_2(p)$, $p \in [0,\, 1]$, и соответственно, как $\tau_1(p) \preccurlyeq \tau_2(p)$, $p \in [0,\, 1]$.

Замечание 1.1. Отношение $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$ можно определить условиями

$$\tau_1(p) \leqslant \tau_2^*(p), \qquad \tau_{1*}(p) \geqslant \tau_2(p), \qquad p \in [0,\, 1], \tag{1.12*}$$

которые эквивалентны условиям (1.12).

Доказательство. Действительно, так как согласно (1.12) $\tau_1(p) \leqslant \tau_1^*(p) \leqslant \tau_2^*(p)$, $\tau_{1*}(p) \geqslant \tau_{2*}(p) \geqslant \tau_2(p)$, $p \in [0,\, 1]$, то неравенства (1.12*) следуют из неравенств (1.12). С другой стороны, учитывая, что $\tau_2^*(\cdot)$ монотонно невозрастает, а $\tau_{1*}(\cdot)$ монотонно неубывает, исходя из неравенств (1.12*), найдем

$$\tau_1^*(p) = \sup_{a \geqslant p} \tau_1(a) \leqslant \sup_{a \geqslant p} \tau_2^*(a) = \sup_{a \geqslant p} \sup_{b \geqslant a} \tau_2(b) = \sup_{b \geqslant p} \tau_2(b) = \tau_2^*(p),$$
$$\tau_{1*}(p) = \sup_{a \leqslant p} \tau_{1*}(a) \geqslant \sup_{a \leqslant p} \tau_2(a) = \tau_{2*}(p), \qquad p \in [0,\, 1].$$

Отношение $\preccurlyeq$ определяет частичную упорядоченность на $\mathcal{T}$, содержательную интерпретацию которой поясним в терминах понятия НН элемента. Пусть $\widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{\xi}_2$ — НН элементы, принимающие значения в X, $\tau^{\widetilde{\xi}_1}_{\cdot}(\cdot)$, $\tau^{\widetilde{\xi}_2}_{\cdot}(\cdot)$ — их распределения, которые при $\widetilde{\xi}_1 = x_1$, $\widetilde{\xi}_2 = x_2$ не эквивалентны $(\tau^{\widetilde{\xi}_1}_{x_1}(\cdot) \not\simeq \tau^{\widetilde{\xi}_2}_{x_2}(\cdot))$ и удовлетворяют условию $\tau^{\widetilde{\xi}_1}_{x_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau^{\widetilde{\xi}_2}_{x_2}(\cdot)$. Если в (1.12*) $\tau_1(\cdot) = \tau^{\widetilde{\xi}_1}_{x_1}(\cdot)$, $\tau_2(\cdot) = \tau^{\widetilde{\xi}_2}_{x_2}(\cdot)$ и, для простоты, точные верхние грани достигаются в (1.1), то неравенства в (1.12*) означают соответственно, что

$$\forall p \in [0,\, 1]:\ \exists p' \geqslant p:\ \tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(p) \leqslant \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p') \text{ и } \exists p'' \leqslant p:\ \tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(p'') \geqslant \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p),$$

то есть более правдоподобны

— бо́льшие значения возможности равенства $\widetilde{\xi}_2 = x_2$, и

— ме́ньшие значения возможности равенства $\widetilde{\xi}_1 = x_1$.

Следовательно, соотношение $\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$ можно интерпретировать как свидетельство в пользу равенства $\xi_2 = x_2$ как более надежного, более вероятного, чем $\xi_1 = x_1$, если «вероятный» понимать как термин, характеризующий модальность индуктивного умозаключения. Иначе можно сказать, что правдоподобие истинности высказывания $\widetilde{\xi}_2 = x_2$ выше, чем правдоподобие истинности высказывания $\widetilde{\xi}_1 = x_1$, если $\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$ и $\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) \not\simeq \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$.

Что касается НН множеств $\widetilde{A}_1 \equiv A^{\widetilde{\eta}_1}$ и $\widetilde{A}_2 \equiv A^{\widetilde{\eta}_2}$, то отношение $\tau_{x_1}^{\widetilde{A}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{x_2}^{\widetilde{A}_2}(\cdot)$, означающее, что $\tau_{x_1}^{\widetilde{A}_1 *}(p) \leqslant \tau_{x_2}^{\widetilde{A}_2 *}(p)$, $\tau_{x_1 *}^{\widetilde{A}_1}(p) \geqslant \tau_{x_2 *}^{\widetilde{A}_2}(p)$, $p \in [0,\, 1]$, свидетельствует в пользу высказывания о включении $x_2 \in \widetilde{A}_2$ как более надежного, более вероятного, чем высказывание, согласно которому $x_1 \in \widetilde{A}_1$, поскольку

• более правдоподобны бо́льшие возможности включения $x_2 \in \widetilde{A}_2$, чем $x_1 \in \widetilde{A}_1$,

• более правдоподобны ме́ньшие возможности включения $x_1 \in \widetilde{A}_1$, чем $x_2 \in \widetilde{A}_2$.

Отношение $\simeq$ *является отношением эквивалентности на* $\mathcal{T}$, его содержательная интерпретация следует из содержательной интерпретации отношения $\preccurlyeq$. Класс функций, эквивалентных $\tau(\cdot)$, обозначим $\{\tau(\cdot)\} = \{t(\cdot) \in \mathcal{T},\ t(\cdot) \simeq \tau(\cdot)\}$.

Определение 1.2. НН элементы $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ назовем[4]

- эквивалентными, $\widetilde{\xi}_1 \simeq \widetilde{\xi}_2$, если $\tau_x^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) = \tau_x^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$, $x \in X$,
- эквивалентными в широком смысле, $\widetilde{\xi}_1 \approx \widetilde{\xi}_2$, если $\tau_x^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) \simeq \tau_x^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$, $x \in X$.

[4] Определения равенств НН элементов, включения и равенства НН множеств даны в ч. 1.

НН множества $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ назовем (в смысле одноточечного покрытия)

- эквивалентными, $\widetilde{A}_1 \simeq \widetilde{A}_2$, если $\tau_x^{\widetilde{A}_1}(\cdot) = \tau_x^{\widetilde{A}_2}(\cdot)$, $x \in X$,
- эквивалентными в широком смысле, $\widetilde{A}_1 \approx \widetilde{A}_2$, если $\tau_x^{\widetilde{A}_1}(\cdot) \simeq \tau_x^{\widetilde{A}_2}(\cdot)$, $x \in X$.
- Если $\tau_x^{\widetilde{A}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_x^{\widetilde{A}_2}(\cdot)$, $x \in X$, то будем говорить, что $\widetilde{A}_1$ в широком смысле содержится в $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{A}_1 \widetilde{\subset} \widetilde{A}_2$.

Рассмотрим подробнее упорядоченность $\preccurlyeq$ и эквивалентность $\simeq$.

Лемма 1.2. *Упорядоченность $\preccurlyeq$ и эквивалентность $\simeq$ согласованы с операциями, введенными в пункте* II*, а именно,*

если $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$, то $\forall \tau(\cdot) \in \mathfrak{T}$

1. $(\tau \vee \tau_1)(\cdot) \preccurlyeq (\tau \vee \tau_2)(\cdot)$, $(\tau \wedge \tau_1)(\cdot) \preccurlyeq (\tau \wedge \tau_2)(\cdot)$;

2. $\tau_1^*(\cdot) \preccurlyeq \tau_2^*(\cdot)$, $\tau_{1*}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{2*}(\cdot)$;

следовательно, если $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot)$, то $\forall \tau(\cdot) \in \mathfrak{T}$

3. $(\tau \vee \tau_1)(\cdot) \simeq (\tau \vee \tau_2)(\cdot)$, $(\tau \wedge \tau_1)(\cdot) \simeq (\tau \wedge \tau_2)(\cdot)$;

4. $\tau_1^*(\cdot) \simeq \tau_2^*(\cdot)$, $\tau_{1*}(\cdot) \simeq \tau_{2*}(\cdot)$;

наконец, для любых $\tau(\cdot)$, $\tau_1(\cdot)$, $\tau_2(\cdot) \in \mathfrak{T}$

5. $(\tau \vee (\tau_1 \wedge \tau_2))(\cdot) \simeq ((\tau \vee \tau_1) \wedge (\tau \vee \tau_2))(\cdot)$,

6. $(\tau \wedge (\tau_1 \vee \tau_2))(\cdot) \simeq ((\tau \wedge \tau_1) \vee (\tau \wedge \tau_2))(\cdot)$, *то есть сложение $\vee$ и умножение $\wedge$ взаимно дистрибутивны с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Все соотношения легко проверить, воспользовавшись результатами, представленными в лемме 1.1. Например, поскольку согласно формулам[5] (1.5)

$$
\begin{aligned}
(\tau \vee (\tau_1 \wedge \tau_2))^*(\cdot) &= \max(\tau^*(\cdot), \min(\tau_1^*(\cdot), \tau_2^*(\cdot))) = \\
&= \min(\max(\tau^*(\cdot), \tau_1^*(\cdot)), \max(\tau^*(\cdot), \tau_2^*(\cdot))) = \\
&= \min((\tau \vee \tau_1)^*(\cdot),\ (\tau \vee \tau_2)^*(\cdot)) = ((\tau \vee \tau_1) \wedge (\tau \vee \tau_2))^*(\cdot),
\end{aligned}
$$

$$(\tau \vee (\tau_1 \wedge \tau_2))_*(\cdot) = ((\tau \vee \tau_1) \wedge (\tau \vee \tau_2))_*(\cdot),$$

то имеет место эквивалентность п. 5.

---

[5]Здесь и далее $\min(\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot)) \equiv \min(\tau_1, \tau_2)(\cdot)$, $\max(\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot)) \equiv \max(\tau_1, \tau_2)(\cdot)$ и т.п.

1.3. Классы эквивалентных функций

Рассмотрим подробнее структуру классов эквивалентных функций. С этой целью определим на классе $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *всех функций* $\tau(\cdot) : [0, 1] \to [0, 1]$ оператор $T : \widetilde{\mathfrak{T}} \to \widetilde{\mathfrak{T}}$

$$(T\tau)(p) \stackrel{\Delta}{=} \sup\{\min(\tau(p_1), \tau(p_2)) | p_1, p_2 \in [0, 1], \ p_1 \leqslant p \leqslant p_2\} = \\ = \min(\tau_*(p), \tau^*(p)) \stackrel{\Delta}{=} (\tau_* \bullet \tau^*)(p), \qquad p \in [0, 1]. \quad (1.13)$$

Свойства оператора T, позволяющие охарактеризовать классы эквивалентных функций $\tau(\cdot) : \ [0, 1] \to [0, 1]$, частично раскрываются в следующей лемме.

Лемма 1.3. *Для любой функции* $\tau(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{T}}$ *функция* $\widehat{\tau}(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} (T\tau)(\cdot)$ *удовлетворяет следующим условиям.*

1. *Для любых* p_1, p_2 *и* p *таких, что* $p \in [p_1, p_2] \subset [0, 1]$

$$\widehat{\tau}(p) \geqslant \min(\widehat{\tau}(p_1), \widehat{\tau}(p_2)). \qquad (1.14)$$

2. *Оператор* $T : \widetilde{\mathfrak{T}} \to \widetilde{\mathfrak{T}}$ *является проектором:*

$$(T\widehat{\tau})(\cdot) = \widehat{\tau}(\cdot); \qquad (1.15)$$

T *проецирует на множество функций* $[0, 1] \to [0, 1]$, *удовлетворяющих условию* (1.14), *причем* $T\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$.

3. *Для любой функции* $\tau(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{T}}$

$$\widehat{\tau}^*(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} (T\tau)^*(\cdot) = \tau^*(\cdot), \qquad \widehat{\tau}_*(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} (T\tau)_*(\cdot) = \tau_*(\cdot).$$

Доказательство. 1. Поскольку $\tau_*(\cdot)$ монотонно неубывает и $\tau^*(\cdot)$ монотонно невозрастает на $[0, 1]$, то для $0 \leqslant p_1 \leqslant p \leqslant p_2 \leqslant 1$

$$\tau(p_1) \leqslant \tau_*(p_1) \leqslant \tau_*(p) \leqslant \tau_*(p_2), \\ \tau(p_2) \leqslant \tau^*(p_2) \leqslant \tau^*(p) \leqslant \tau^*(p_1).$$

Поэтому согласно (1.13)

$$\widehat{\tau}(p) = \min(\tau^*(p), \tau_*(p)) \geqslant \min(\tau^*(p_1), \tau_*(p_1), \tau^*(p_2), \tau_*(p_2)) = \\ = \min(\widehat{\tau}(p_1), \widehat{\tau}(p_2)).$$

2. Поскольку при $p_1 = p_2 = p$ неравенство (1.14) обращается в равенство, то

$$(T\widehat{\tau})(p) = \sup\{\min(\widehat{\tau}(p_1),\, \widehat{\tau}(p_2)) | p_1,\, p_2 \in [0,\, 1],\, p_1 \leqslant p \leqslant p_2\} = \widehat{\tau}(p), \quad p \in [0,\, 1].$$

3. Согласно определению (1.13) $\widehat{\tau}(p) \geqslant \min(\tau(p_1),\, \tau(p_2))$, если $p_1 \leqslant p \leqslant p_2$, и, следовательно, $\widehat{\tau}(p) \geqslant \tau(p)$, $p \in [0,\, 1]$. Отсюда в свою очередь следует, что

$$\widehat{\tau}^*(p) \geqslant \tau^*(p), \qquad \widehat{\tau}_*(p) \geqslant \tau_*(p), \qquad p \in [0,\, 1]. \tag{1.16}$$

С другой стороны,

$$\widehat{\tau}^*(p) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{q \geqslant p} \widehat{\tau}(q) = \sup_{q \geqslant p} \min(\tau_*(q),\, \tau^*(p)) \leqslant \leqslant \min\left(\sup_{q \geqslant p} \tau_*(q),\, \sup_{q \geqslant p} \tau^*(q)\right) = \tau^*(p), \tag{1.17}$$

ибо $\sup\limits_{q \geqslant p} \tau_*(q) = \sup\limits_{q \geqslant p} \sup\limits_{r \leqslant q} \tau(r) = \sup\limits_{r \leqslant 1} \tau(r) = 1$, $\sup\limits_{q \geqslant p} \tau^*(q) = \sup\limits_{q \geqslant p} \sup\limits_{r \geqslant q} \tau(r) = \sup\limits_{r \geqslant p} \tau(r) = \tau^*(p)$. Согласно (1.16) и (1.17) $\widehat{\tau}^*(p) = \tau^*(p)$, $p \in [0,\, 1]$. Равенство $\widehat{\tau}_*(\cdot) = \tau_*(\cdot)$ проверяется аналогично.

Наконец, что касается включения $T\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$, означающего, что T не выводит $\tau(\cdot) \in \mathfrak{T}$ из $\mathfrak{T}$, то оно непосредственно следует из свойств $\mathfrak{T}$, определения (1.13) и равенств в пункте 3.

Покажем, что проектор T определяет классы эквивалентных функций.

Теорема 1.1. *Для любых функций $\tau_1(\cdot)$, $\tau_2(\cdot) \in \mathfrak{T}$:*

1. $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot)$, *если и только если* $(T\tau_1)(\cdot) = (T\tau_2)(\cdot)$.

2. $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$, *если и только если* $(T\tau_1)(\cdot) \preccurlyeq (T\tau_2)(\cdot)$.

3. $\{\tau(\cdot)\} = \{\widetilde{\tau}(\cdot) \in \mathfrak{T},\, (T\widetilde{\tau})(\cdot) = (T\tau)(\cdot)\}$ — *класс функций, эквивалентных* $\tau(\cdot)$.

Доказательство. 1. Пусть $\widehat{\tau}_i(\cdot) = (T\tau_i)(\cdot)$, $i = 1, 2$, тогда

$$\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot) \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1^*(\cdot) = \tau_2^*(\cdot) \\ \tau_{1*}(\cdot) = \tau_{2*}(\cdot) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \widehat{\tau}_1(\cdot) = \min(\tau_1^*, \tau_{1*})(\cdot) = \min(\tau_2^*, \tau_{2*})(\cdot) = \widehat{\tau}_2(\cdot).$$

2. В соответствии с пунктом 3 леммы 1.3

$$\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot) \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1^*(\cdot) \leqslant \tau_2^*(\cdot) \\ \tau_{1*}(\cdot) \geqslant \tau_{2*}(\cdot) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{\tau}_1^*(\cdot) \leqslant \widehat{\tau}_2^*(\cdot) \\ \widehat{\tau}_{1*}(\cdot) \geqslant \widehat{\tau}_{2*}(\cdot) \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{\tau}_1(\cdot) \preccurlyeq \widehat{\tau}_2(\cdot).$$

3. Действительно, класс $\{\tau(\cdot)\}$ состоит из функций $\widetilde{\tau}(\cdot)$, удовлетворяющих условиям

$$\widetilde{\tau}^*(\cdot) = \widehat{\widetilde{\tau}}^*(\cdot) = \widehat{\tau}^*(\cdot) = \tau^*(\cdot),$$
$$\widetilde{\tau}_*(\cdot) = \widehat{\widetilde{\tau}}_*(\cdot) = \widehat{\tau}_*(\cdot) = \tau_*(\cdot).$$

1.4. Класс $\mathring{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$

Преобразование $\tau(\cdot) \to \widehat{\tau}(\cdot) \triangleq (T\tau)(\cdot)$ в силу свойства (1.14) функции $\widehat{\tau}(\cdot)$ «истребляет» локальные минимумы функции $\tau(\cdot)$ во всех внутренних точках $[0, 1]$. Это преобразование следует рассматривать как естественную модификацию функции $\tau(\cdot)$ с точки зрения ее содержательной интерпретации. В самом деле, какой смысл следует придавать утверждению, согласно которому для некоторого события более правдоподобны его возможности как бóльшие, так и мéньшие некоторого p_0?

Руководствуясь этим соображением, введем класс $\mathring{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$ тех функций $\tau(\cdot) \in \mathcal{T}$, которые являются «неподвижными точками» оператора T

$$\mathring{\mathcal{T}} = \{\tau(\cdot) \in \mathcal{T},\ (T\tau)(\cdot) \triangleq \min(\tau_*, \tau^*)(\cdot) = \tau(\cdot)\}.$$

Для функций $\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot) \in \mathring{\mathcal{T}}$ эквивалентность $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot)$ является равенством $\tau_1(\cdot) = \tau_2(\cdot)$ (см. теорему 1.1), более того, для любых функций $\tau(\cdot)$, $\tau_1(\cdot)$, $\tau_2(\cdot)$ соотношения 5. и 6. леммы 1.2 оказываются равенствами, определяющими взаимную дистрибутивность операций $\vee$ и $\wedge$ на классе $\mathring{\mathfrak{T}}$. В следующей теореме суммированы основные свойства класса $\mathring{\mathfrak{T}}$.

Теорема 1.2. *Для любых функций*[6] $\tau_i(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$, $i = 0, 1, \ldots, n$

1. $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \tau_i(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$, $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \tau_i(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$.
2. $\tau_i(\cdot) \simeq \tau_j(\cdot) \Leftrightarrow \tau_i(\cdot) = \tau_j(\cdot)$.
3. $\left(\tau_0 \vee \left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \tau_i\right)\right)(\cdot) = \left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} (\tau_0 \vee \tau_i)\right)(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$,

$\left(\tau_0 \wedge \left(\bigvee\limits_{i=1}^{n} \tau_i\right)\right)(\cdot) = \left(\bigvee\limits_{i=1}^{n} (\tau_0 \wedge \tau_i)\right)(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$.

Доказательство. 1. Так как $\tau_k(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}} \Leftrightarrow \tau_k(\cdot) = \min(\tau_k^*, \tau_{k*})(\cdot)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} \tau_i\right)(p) =$$
$$= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \min(\tau_{1*}(p), \ldots, \tau_{k-1*}(p), \tau_k(p), \tau_{k+1*}(p), \ldots, \tau_{n*}(p)) =$$
$$= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\left(\tau_k^*(p), \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \tau_{j*}(p)\right) = \min\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_k^*(p), \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \tau_{j*}(p)\right) =$$
$$= \min\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} \tau_i\right)^*(p), \left(\bigvee_{i=1}^{n} \tau_i\right)_*(p)\right) \in \mathring{\mathfrak{T}}$$

и аналогично

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \tau_i\right)(p) = \min\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_{k*}(p), \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \tau_i^*(p)\right) =$$
$$= \min\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \tau_i\right)^*(p), \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \tau_i\right)_*(p)\right) \in \mathring{\mathfrak{T}}.$$

[6] $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \tau_i(\cdot) \equiv \left(\bigvee\limits_{i=1}^{n} \tau_i\right)(\cdot)$, $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \tau_i(\cdot) \equiv \left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \tau_i\right)(\cdot)$.

2. Это свойство непосредственно следует из определения класса $\mathring{\mathcal{T}}$.

3. Эти равенства следуют из эквивалентностей 5 и 6 леммы 1.2 и свойства 2.

Класс $\mathring{\mathcal{T}}$ изоморфен фактор-множеству $\mathcal{T}/\simeq$, получаемому факторизацией $\mathcal{T}$ по отношению эквивалентности $\simeq$.

Продолжим перечень условий, определящих класс $\mathcal{T}$.

III *Класс $\mathcal{T}$ содержит функции $\mathbf{0}(\cdot)$ и $\mathbf{1}(\cdot)$, играющие роли нуля и соответственно единицы относительно введенных операций сложения $\vee$ и умножения $\wedge$ элементов $\mathcal{T}$:*

$$\mathbf{0}(p) = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 0, & 0 < p \leqslant 1 \end{cases}, \qquad \mathbf{1}(p) = \begin{cases} 1, & p = 1 \\ 0, & 0 \leqslant p < 1 \end{cases}.$$

Нетрудно проверить, что $\mathbf{0}(\cdot) \in \mathring{\mathcal{T}}$, $\mathbf{1}(\cdot) \in \mathring{\mathcal{T}}$ и для любой функции $\tau(\cdot) \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} (\tau \bullet \mathbf{0})(\cdot) = (\tau \wedge \mathbf{0})(\cdot) = \mathbf{0}(\cdot), \qquad (\tau \bullet \mathbf{1})(\cdot) = (\tau \wedge \mathbf{1})(\cdot) = \tau(\cdot), \\ (\tau + \mathbf{0})(\cdot) = (\tau \vee \mathbf{0})(\cdot) = \tau(\cdot), \qquad (\tau + \mathbf{1})(\cdot) = (\tau \vee \mathbf{1})(\cdot) = \mathbf{1}(\cdot). \end{aligned} \tag{1.18}$$

1.5. Шкала значений правдоподобия возможностей и ее группа автоморфизмов

Определение 1.3. Четверку $(\mathcal{T}, \preccurlyeq, \vee, \wedge)$ назовем шкалой значений правдоподобия возможностей.

Пусть Γ_i — множество преобразований отрезка $[0, 1]$, заданных функциями $\gamma_i(\cdot) : [0, 1] \to [0, 1]$, непрерывными, строго монотонно возрастающими и удовлетворяющими условиям $\gamma_i(0) = 0$, $\gamma_i(1) = 1$; Γ_i — группа относительно правила композиции $(\gamma_i'\gamma_i)(t) \overset{\Delta}{=} \gamma_i'(\gamma_i(t))$, $t \in$ $\in [0, 1]$, $i = 1, 2$. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ — множество пар $\gamma = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot))$ и $\Gamma*$ — группа преобразований функций $\tau(\cdot) \in \mathcal{T}$, определенных равенством $(\gamma * \tau)(p) \equiv \gamma * \tau(p) \overset{\Delta}{=} \gamma_1(\tau(\gamma_2^{-1}(p)))$, $p \in [0, 1]$. Тот факт, что $\Gamma*$ — группа, следует из равенства

$$(\gamma'\gamma) * \tau(p) = (\gamma_1'\gamma_1)(\tau((\gamma_2'\gamma_2)^{-1}(p))), \qquad p \in [0, 1], \tag{1.19}$$

в котором $\gamma = (\gamma_1(\cdot),\, \gamma_2(\cdot))$, $\gamma' = (\gamma_1'(\cdot),\, \gamma_2'(\cdot))$, и

$$\gamma'\gamma \stackrel{\Delta}{=} ((\gamma_1'\gamma_1)(\cdot),\, (\gamma_2'\gamma_2)(\cdot)). \tag{1.20}$$

Следующее условие является требованием инвариантности класса функций $\mathcal{T}$ относительно преобразований $\tau(\cdot) \to (\gamma * \tau)(\cdot)$, $\gamma* \in \Gamma*$.

IV *Класс $\mathcal{T}$ вместе с каждой функцией $\tau(\cdot)$ содержит все функции $\gamma * \tau(\cdot)$, $\gamma* \in \Gamma*$, то есть $\gamma * \mathcal{T} \stackrel{\Delta}{=} \{\gamma * \tau(\cdot),\, \tau(\cdot) \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T}$.*

Лемма 1.4. *Группа $\Gamma*$ является группой автоморфизмов шкалы $(\mathcal{T},\, \preccurlyeq,\, \vee,\, \wedge)$, то есть*

1. $\forall \tau(\cdot) \in \mathcal{T} \quad \forall \gamma* \in \Gamma*,\ \gamma * \tau(\cdot) \in \mathcal{T},\ (\gamma * \tau)^*(\cdot) = \gamma * \tau^*(\cdot)$, $(\gamma * \tau)_*(\cdot) = \gamma * \tau_*(\cdot)$;

$\forall \tau_i(\cdot) \in \mathcal{T}$, $i = 1,\, 2$ и $\forall \gamma* \in \Gamma*$:

2. $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot) \Leftrightarrow (\gamma * \tau_1)(\cdot) \preccurlyeq (\gamma * \tau_2)(\cdot)$,

3.[7] $\gamma * (\tau_1 \vee \tau_2)(\cdot) = (\gamma * \tau_1) \vee (\gamma * \tau_2)(\cdot)$, $\gamma * (\tau_1 \wedge \tau_2)(\cdot) = (\gamma * \tau_1) \wedge (\gamma * \tau_2)(\cdot)$.

4. $\forall \gamma* \in \Gamma* \ \ \gamma * \mathbf{0}(\cdot) = \mathbf{0}(\cdot)$, $\gamma * \mathbf{1}(\cdot) = \mathbf{1}(\cdot)$.

Доказательство. 1. Первое утверждение в 1. верно в силу условия IV. Проверим, что $(\gamma * \tau)^*(\cdot) = \gamma * \tau^*(\cdot)$, $(\gamma * \tau)_*(\cdot) = \gamma * \tau_*(\cdot)$. Действительно, так как $\tau^*(p) = \sup\limits_{a \geqslant p} \tau(a)$, то

$$\gamma * \tau^*(p) = \gamma_1 \left(\sup_{a \geqslant \gamma_2^{-1}(p)} \tau(a) \right) = \sup_{a \geqslant p} \gamma_1(\tau(\gamma_2^{-1}(a))) = (\gamma * \tau)^*(p),\ p \in [0,\, 1],$$

и аналогично $(\gamma * \tau)_*(\cdot) = \gamma * \tau_*(\cdot)$, $p \in [0,\, 1]$.

2. Пусть $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$, то есть пусть $\tau_1^*(p) \leqslant \tau_2^*(p)$, $\tau_{1*}(p) \geqslant \tau_{2*}(p)$, $p \in [0,\, 1]$. Тогда $(\gamma * \tau_1)^*(p) = \gamma * \tau_1^*(p) = \gamma_1(\tau_1^*(\gamma_2^{-1}(p))) \leqslant \gamma_1(\tau_2^*(\gamma_2^{-1}(p))) = \gamma * \tau_2^*(p) = (\gamma * \tau_2)^*(p)$, $p \in [0,\, 1]$, и аналогично $(\gamma * \tau_1)_*(\cdot) \geqslant (\gamma * \tau_2)_*(p)$, $p \in [0,\, 1]$, следовательно, $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot) \Rightarrow \gamma * \tau_1(\cdot) \preccurlyeq \gamma * \tau_2(\cdot)$, $\gamma* \in \Gamma*$. А поскольку множество $\{\gamma*\} = \Gamma*$ является группой относительно композиции (1.19), (1.20), то если для некоторого $\gamma* \in \Gamma* \ \ \gamma * \tau_1(\cdot) \preccurlyeq \gamma * \tau_2(\cdot)$, то и $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$. Поэтому

[7] $(\gamma*\tau_1) \vee (\gamma*\tau_2)(\cdot) \equiv ((\gamma*\tau_1) \vee (\gamma*\tau_2))(\cdot)$, $(\gamma*\tau_1) \wedge (\gamma*\tau_2)(\cdot) \equiv ((\gamma*\tau_1) \wedge (\gamma*\tau_2))(\cdot)$.

$\forall\gamma* \in \Gamma*\ \tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot) \Leftrightarrow \gamma*\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \gamma*\tau_2(\cdot)$, и, следовательно, $\forall\gamma* \in \Gamma*$ $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot) \Leftrightarrow \gamma*\tau_1(\cdot) \simeq \gamma*\tau_2(\cdot)$.

3. Эти равенства проверяются непосредственно:

$$\begin{gathered}\gamma*(\tau_1 \vee \tau_2)(p) = \gamma_1(\tau_1 \vee \tau_2)(\gamma_2^{-1}(p)) = \\ = \gamma_1(\sup\{\min(\tau_1(a),\, \tau_2(b)) \,|\, a,\, b \in [0,\, 1],\, \max(a,\, b) = \gamma_2^{-1}(p)\}) = \\ = \sup\{\min(\gamma_1(\tau_1(a)),\, \gamma_1(\tau_2(b))) \,|\, a,\, b \in [0,\, 1],\, \max(\gamma_2(a), \\ \gamma_2(b)) = p\} = \sup\{\min(\gamma_1(\tau_1(\gamma_2^{-1}(a))),\, \gamma_1(\tau_2(\gamma_2^{-1}(b)))) \,| \\ a,\, b \in [0,\, 1],\, \max(a,\, b) = p\} = \sup\{\min(\gamma*\tau_1(a),\, \gamma*\tau_2(b)) \,| \\ a,\, b \in [0,\, 1],\, \max(a,\, b) = p\} = ((\gamma*\tau_1) \vee (\gamma*\tau_2))(p), \quad p \in [0,\, 1].\end{gathered}$$

Второе равенство п. 3 проверяется аналогично.

4.

$$\gamma*\mathbf{0}(p) = \gamma_1(\mathbf{0}(\gamma_2^{-1}(p))) = \begin{cases}\gamma_1(\mathbf{0}(0)), & p = 0,\\ \gamma_1(\mathbf{0}(\gamma_2^{-1}(p))), & p > 0,\end{cases} = \\ = \begin{cases}1, & p = 0,\\ 0, & p > 0,\end{cases} \quad p \in [0,\, 1].$$

Второе равенство п. 4 проверяется аналогично.

§ 2. Элементы анализа в $\mathcal{T}$

Примем еще одно ограничение на класс $\mathcal{T}$.

V. *Пусть $\tau_i(\cdot) \in \mathcal{T}$, $i = 1, 2, \ldots$ — последовательность функций из $\mathcal{T}$. Будем считать, что класс $\mathcal{T}$ замкнут относительно счетного числа операций $\vee$ и $\wedge$ то есть что*

$$\left.\begin{aligned}\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)(p) &= \sup\{\inf_i \tau_i(a_i) | a_1, a_2, \ldots \in [0,1],\, \sup_i a_i = p\},\\ \left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)(p) &= \sup\{\inf_i \tau_i(a_i) | a_1, a_2, \ldots \in [0,1],\, \inf_i a_i = p\},\end{aligned}\right\} \quad p \in [0,\, 1], \tag{2.1}$$

— *функции из* $\mathcal{T}$ (см. лемму 1.1).

Лемма 2.1. *Пусть* $\tau_i(\cdot):\ [0,\,1]\to[0,\,1]$, $\Delta_i\subset[0,\,1]$ *и* $\overline{\tau}_i\stackrel{\triangle}{=}\sup\limits_{a\in\Delta_i}\tau_i(a)$, $i=1,\,2,\ldots$ *Тогда*[8]

$$\sup\left\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)\,|\,a_1\in\Delta_1,\,a_2\in\Delta_2,\,\ldots\right\}=$$
$$=\sup_{1\leqslant j<\infty}\sup_{a_j\in\Delta_j}\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)=\inf_{1\leqslant i<\infty}\overline{\tau}_i. \quad (2.2)$$

Доказательство. Действительно, так как $\forall\varepsilon>0$ $\Delta_{i,\varepsilon}\stackrel{\triangle}{=}\{a\in\Delta_i,\,\tau_i(a)\geqslant\overline{\tau}_i-\varepsilon\}\neq\varnothing$, то существуют $a_{i,\varepsilon}\in\Delta_{i,\varepsilon}$, $i=1,\,2,\,\ldots$, для которых

$$\inf_{1\leqslant i<\infty}\overline{\tau}_i\geqslant\sup\left\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|a_1\in\Delta_1,\,a_2\in\Delta_2,\,\ldots\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_{i,\varepsilon})\geqslant\inf_{1\leqslant i<\infty}\overline{\tau}_i-\varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon>0$ следует равенство (2.2).

Следствие 2.1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned}&\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)^*(p)=\sup_i\tau_i^*(p), &&\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)_*(p)=\inf_i\tau_{i*}(p),\\ &\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)^*(p)=\inf_i\tau_i^*(p), &&\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)_*(p)=\sup_i\tau_{i*}(p),\end{aligned}\qquad p\in[0,\,1], \quad (2.3)$$

и, следовательно, если $\tau_i(\cdot)\in\mathcal{T}$, $i=1,\,2,\,\ldots$, *то* $(\sup\limits_i\tau_i^*)(\cdot)$, $(\inf\limits_i\tau_i^*)(\cdot)$, $(\sup\limits_i\tau_{i*})(\cdot)$ *и* $(\inf\limits_i\tau_{i*})(\cdot)$ *содержатся в* $\mathcal{T}$.

---

[8] $\sup\left\{\inf\limits_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)\,|\,a_1\in\Delta_1,\,a_2\in\Delta_2,\,\ldots\right\}\equiv\sup\left\{\inf\limits_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)\,|\,(a_1,\,a_2,\,\ldots),\,a_i\in\Delta_i,\,i=1,\,2,\,\ldots\right\}$.

Доказательство. Действительно, согласно лемме 2.1,

$$\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)^*(p)=$$
$$=\sup\left[\inf_{1\leqslant j<\infty}\tau_j(a_j)|a_i\in[0,\,1],\,i=1,\,2,\,\ldots,\,\sup_{1\leqslant j<\infty}a_j\geqslant p\right]=$$
$$=\sup_{1\leqslant k<\infty}\sup\Big\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)\,|\,a_1\in[0,\,1],\ldots,a_{k-1}\in[0,\,1],\,a_k\in[p,1],$$
$$a_{k+1}\in[0,\,1],\ldots\Big\}=\sup_{1\leqslant k<\infty}\tau_k^*(p).\quad(2.4)$$

Далее,

$$\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)_*(p)=$$
$$=\sup\left[\inf_{1\leqslant j<\infty}\tau_j(a_j)|a_i\in[0,\,1],\,i=1,\,2,\,\ldots,\,\sup_{1\leqslant k<\infty}a_k\leqslant p\right]=$$
$$=\sup\left\{\inf_{1\leqslant j<\infty}\tau_j(a_j)|a_i\in[0,\,p],\,i=1,\,2,\,\ldots\right\}=\inf_{1\leqslant j<\infty}\tau_{j*}(p).\quad(2.5)$$

Аналогично,

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)^*(p)=\sup\left\{\inf_{1\leqslant j<\infty}\tau_j(a_j)|a_i\in[p,\,1],\,i=1,\,2,\,\ldots\right\}=$$
$$=\inf_{1\leqslant j<\infty}\tau_j^*(p),\quad p\in[0,1].$$

Наконец,

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)_*(p)=\sup_{1\leqslant k<\infty}\sup\Big\{\inf_{1\leqslant j<\infty}\tau_j(a_j)\,|\,a_1\in[0,\,1],\ldots,a_{k-1}\in[0,\,1],$$
$$a_k\in[0,p],\,a_{k+1}\in[0,\,1],\ldots\Big\}=\sup_{1\leqslant k<\infty}\tau_{k*}(p),\quad p\in[0,1].$$

Замечание 2.1. Очевидно, что $\forall\gamma* \in \Gamma*$

$$\gamma * \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)^* (\cdot) = \left(\gamma * \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)\right)^* (\cdot) = \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} (\gamma * \tau_i)\right)^* (\cdot),$$

$$\gamma * \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)_* (\cdot) = \left(\gamma * \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)\right)_* (\cdot) = \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} (\gamma * \tau_i)\right)_* (\cdot),$$

$$\gamma * \left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)^* (\cdot) = \left(\gamma * \left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)\right)^* (\cdot) = \left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} (\gamma * \tau_i)\right)^* (\cdot),$$

$$\gamma * \left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)_* (\cdot) = \left(\gamma * \left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)\right)_* (\cdot) = \left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} (\gamma * \tau_i)\right)_* (\cdot).$$

2.1. Сходимость в $\mathcal{T}$

Определение 2.1. Пусть $\tau_i(\cdot) \in \mathcal{T}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$ Функции

$$\overline{\tau}(\cdot) \triangleq \left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i \geqslant n} \tau_i\right)(\cdot), \qquad \underline{\tau}(\cdot) \triangleq \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{i \geqslant n} \tau_i\right)(\cdot)$$

называются верхним и соответственно нижним пределами последовательности $\tau_i(\cdot)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$ Последняя называется сходящейся, если

$$\overline{\tau}(\cdot) \simeq \underline{\tau}(\cdot); \tag{2.6}$$

любая функция $\tau(\cdot)$, эквивалентная левой и правой части (2.6), называется пределом последовательности $\tau_i(\cdot)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$, и обозначается

$$\tau(\cdot) = \lim_{i\to\infty} \tau_i(\cdot) \equiv \left(\lim_{i\to\infty} \tau_i\right)(\cdot). \tag{2.7}$$

Очевидно, что $\Gamma*$ — группа предобразований $\gamma* : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, *непрерывных относительно сходимости* (2.7), то есть если вычислено (2.7), то $\forall\gamma* \in \Gamma*$

$$\gamma * \left(\lim_{i\to\infty} \tau_i(\cdot)\right) = \lim_{i\to\infty} (\gamma * \tau_i)(\cdot)$$

Лемма 2.2. *Имеют место равенства*[9]

$$\overline{\tau}^*(\cdot) = \varlimsup_{i\to\infty} \tau_i^*(\cdot), \quad \overline{\tau}_*(\cdot) = \varliminf_{i\to\infty} \tau_{i*}(\cdot),$$
$$\underline{\tau}^*(\cdot) = \varliminf_{i\to\infty} \tau_i^*(\cdot), \quad \underline{\tau}_*(\cdot) = \varlimsup_{i\to\infty} \tau_{i*}(\cdot).$$

Последовательность $\tau_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$, *сходится, если и только если*

$$\varliminf_{n\to\infty} \tau_n^*(\cdot) = \varlimsup_{n\to\infty} \tau_n^*(\cdot), \qquad \varliminf_{n\to\infty} \tau_{n*}(\cdot) = \varlimsup_{n\to\infty} \tau_{n*}(\cdot),$$

то есть если и только если существуют поточечные пределы

$$\tau_*(\cdot) = \lim_{n\to\infty} \tau_{n*}(\cdot), \quad \tau^*(\cdot) = \lim_{n\to\infty} \tau_n^*(\cdot).$$

При этом

$$\tau_*(\cdot) = \Big(\lim_{n\to\infty} \tau_n\Big)_*(\cdot), \quad \tau^*(\cdot) = \Big(\lim_{n\to\infty} \tau_n\Big)^*(\cdot).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\underline{\tau}_*(\cdot) = \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{k\geqslant i} \tau_k\right)_*(\cdot) = \inf_{1\leqslant i<\infty} \left(\bigwedge_{k\geqslant i} \tau_k\right)_*(\cdot) =$$
$$= \inf_{1\leqslant i<\infty} \sup_{k\geqslant i} \tau_{k*}(\cdot) = \varlimsup_{n\to\infty} \tau_{n*}(\cdot);$$

$$\underline{\tau}^*(\cdot) = \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{k\geqslant i} \tau_k\right)^*(\cdot) = \sup_{1\leqslant i<\infty} \inf_{k\geqslant i} \tau_k^*(\cdot) = \varliminf_{n\to\infty} \tau_n^*(\cdot); \tag{2.8}$$

$$\overline{\tau}_*(\cdot) = \left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \bigvee_{k\geqslant i} \tau_k\right)_*(\cdot) = \sup_{1\leqslant i<\infty} \inf_{k\geqslant i} \tau_{k*}(\cdot) = \varliminf_{n\to\infty} \tau_{n*}(\cdot);$$

$$\overline{\tau}^*(\cdot) = \left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \bigvee_{k\geqslant i} \tau_k\right)^*(\cdot) = \inf_{1\leqslant i<\infty} \sup_{k\geqslant i} \tau_k^*(\cdot) = \varlimsup_{n\to\infty} \tau_n^*(\cdot).$$

---

[9] $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ — верхний и соответственно нижний пределы, $\varlimsup\limits_{i\to\infty} \tau_i^*(p) \triangleq \inf\limits_{1\leqslant n<\infty} \sup\limits_{i\geqslant n} \tau_i^*(p)$, $\varliminf\limits_{i\to\infty} \tau_{i*}(p) \triangleq \sup\limits_{1\leqslant n<\infty} \inf\limits_{i\geqslant n} \tau_{i*}(p)$, $p \in [0, 1]$.

Следствие 2.2. *Монотонная последовательность* $\tau_i(\cdot)$, $i=1,2,\ldots$, *сходится:*

1. *если* $\tau_1(\cdot)\preccurlyeq\tau_2(\cdot)\preccurlyeq\ldots$, *то* $(\lim\tau_i)(\cdot)=\left(\bigvee\limits_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)(\cdot)$, *так как*

$$\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\bigwedge_{k\geqslant i}\tau_k\right)_*(\cdot)=\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_{i*}(\cdot)=\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)_*(\cdot)=\lim_{i\to\infty}\tau_{i*}(\cdot)=\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\bigvee_{k\geqslant i}\right)_*(\cdot),$$
$$\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\bigwedge_{k\geqslant i}\tau_k\right)^*(\cdot)=\sup_{1\leqslant i<\infty}\tau_i^*(\cdot)=\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)^*(\cdot)=\lim_{i\to\infty}\tau_i^*(\cdot)=\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\bigvee_{k\geqslant i}\right)^*(\cdot).$$

2. *если* $\tau_1(\cdot)\succcurlyeq\tau_2(\cdot)\succcurlyeq\ldots$, *то* $(\lim\tau_i)(\cdot)=\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)(\cdot)$, *так как*

$$\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\bigwedge_{k\geqslant i}\tau_k\right)_*(\cdot)=\sup_{1\leqslant i<\infty}\tau_{i*}(\cdot)=\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)_*(\cdot)=\lim_{i\to\infty}\tau_{i*}(\cdot)=\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\bigvee_{k\geqslant i}\right)_*(\cdot),$$
$$\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\bigwedge_{k\geqslant i}\tau_k\right)^*(\cdot)=\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i^*(\cdot)=\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)^*(\cdot)=\lim_{i\to\infty}\tau_i^*(\cdot)=\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\bigvee_{k\geqslant i}\right)^*(\cdot).$$

Дело в том, что в первом случае $0\leqslant\tau_1^*(\cdot)\leqslant\tau_2^*(\cdot)\leqslant\ldots\leqslant1$, $1\geqslant\tau_{1*}(\cdot)\geqslant\tau_{2*}(\cdot)\geqslant\ldots\geqslant0$, а во втором — $0\leqslant\tau_{1*}(\cdot)\leqslant\tau_{2*}(\cdot)\leqslant\ldots\leqslant1$, $1\geqslant\tau_1^*(\cdot)\geqslant\tau_2^*(\cdot)\geqslant\ldots\geqslant0$.

2.2. Класс $\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}$ функций, полунепрерывных сверху

Рассмотрим подробнее выражения (2.1)

$$\sup\left\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|a_i\in[0,\,1],\,i=1,\,2,\,\ldots,\,\sup_{1\leqslant j<\infty}a_j=p\right\}=$$
$$=\max_{s=1,\,2}(\sup\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|(a_1,\,a_2,\,\ldots)\in\mathcal{L}^{(s)}\}),\quad(2.9)$$

где

$$\mathcal{L}^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{(a_1,\, a_2,\, \ldots),\ a_1 \leqslant p,\, \ldots,\, a_{k-1} \leqslant p,\, a_k = p,\, a_{k+1} \leqslant p,\, \ldots\},$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \bigcap_{\rho>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{(a_1,\, a_2,\, \ldots),\ a_1 < p,\, \ldots,\, a_{k-1} < p,\quad p-\rho \leqslant a_k < p,\, a_{k+1} < p,\, \ldots\} \tag{2.10}$$

и соответственно

$$\sup\left\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|a_i \in [0,\,1],\, i=1,\,2,\,\ldots,\ \inf_{1\leqslant j<\infty} a_j = p\right\} = \\ = \max_{s=1,\,2}(\sup\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|(a_1,\,a_2,\,\ldots)\in\mathcal{R}^{(s)}\}), \tag{2.11}$$

где

$$\mathcal{R}^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{(a_1,\, a_2,\, \ldots),\ a_1 \geqslant p,\, \ldots,\, a_{k-1} \geqslant p,\, a_k = p,\, a_{k+1} \geqslant p,\, \ldots\},$$

$$\mathcal{R}^{(2)} = \bigcap_{\rho>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{(a_1,\, a_2,\, \ldots),\ a_1 > p,\, \ldots,\, a_{k-1} > p,\quad p < a_k \leqslant p+\rho,\, a_{k+1} > p,\, \ldots\}. \tag{2.12}$$

Лемма 2.3. *Имеют место следующие равенства:*

$$l^{(1)} \triangleq \sup\left\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|(a_1,a_2,\ldots)\in\mathcal{L}^{(1)}\right\} = \sup_{1\leqslant k<\infty}\min\left(\tau_k(p),\ \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}}\tau_{i*}(p)\right),$$

$$l^{(2)} \triangleq \sup\left\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|(a_1,a_2,\ldots)\in\mathcal{L}^{(2)}\right\} = \sup_{1\leqslant k<\infty}\min\left(\inf_{\rho>0}\sup_{p-\rho\leqslant a_k<p}\tau_k(a_k),\ \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}}\tau_{i\circ}(p)\right), \tag{2.13}$$

$$
\begin{aligned}
r^{(1)} &\triangleq \sup\left\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|(a_1,a_2,\ldots)\in\mathcal{R}^{(1)}\right\} = \\
&= \sup_{1\leqslant k<\infty}\min\left(\tau_k(p),\ \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}}\tau_i^*(p)\right), \\
r^{(2)} &\triangleq \sup\left\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|(a_1,a_2,\ldots)\in\mathcal{R}^{(2)}\right\} = \\
&= \sup_{1\leqslant k<\infty}\min\left(\inf_{\rho>0}\sup_{p<a_k\leqslant p+\rho}\tau_k(a_k),\ \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}}\tau_i^\circ(p)\right),
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

где функции $\tau_{i*}(\cdot)$, $\tau_i^*(\cdot)$, $i=1,\,2\,\ldots$ *определены равенствами* (1.1), *а* $\tau_{i\circ}(p)=\sup\limits_{a<p}\tau_i(a)$, $\tau_i^\circ(p)=\sup\limits_{a>p}\tau_i(a)$, $p\in[0,\,1]$, $i=1,\,2,\,\ldots$

Доказательство. Первые равенства в (2.13) и (2.14) следуют из леммы 2.1. Для доказательства второго равенства в (2.13) следует убедиться, что

$$
\begin{aligned}
&\sup\left\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|(a_1,\,a_2,\,\ldots)\in\mathcal{L}^{(2)}\right\}\triangleq \\
&\triangleq\inf_{\rho>0}\sup_{1\leqslant k<\infty}\sup\Big\{\inf_{1\leqslant i<\infty}\tau_i(a_i)|a_1<p,\ldots,a_{k-1}<p,p-\rho\leqslant a_k<p, \\
&\qquad a_{k+1}<p,\ldots\Big\} = \sup_{1\leqslant k<\infty}\min\left(\inf_{\rho>0}\sup_{p-\rho\leqslant a_k<p}\tau_k(a_k),\ \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}}\tau_i(a_i)\right).
\end{aligned}
$$

В силу леммы 2.1 следует убедиться лишь в том, что

$$
\inf_{\rho>0}\sup_{1\leqslant k<\infty}\min(f_k(\rho),\,s_k)=\sup_{1\leqslant k<\infty}\min(\underline{f}_k,\,s_k), \tag{2.15}
$$

где (зависимость от $p\in[0,\,1]$ опущена)

$$
f_k(\rho)\triangleq\sup_{p-\rho\leqslant a_k<p}\tau_k(a_k),\quad \underline{f}_k=\inf_{\rho>0}f_k(\rho),
$$

$$
s_k=\inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}}\tau_{i\circ}(p),\quad k=1,\,2,\,\ldots.
$$

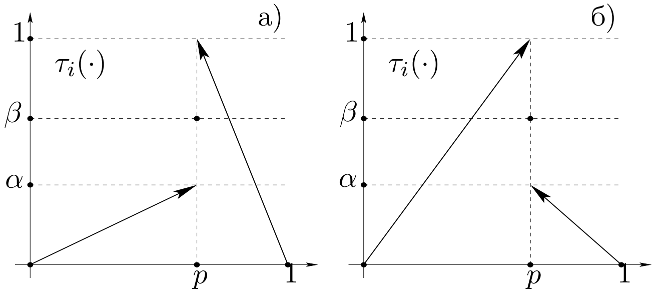

Рис. 6. Графики функций $\tau_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$

Поскольку $\forall \varepsilon > 0$ множество $\Delta_k = \Big\{\rho > 0,\ f_k(\rho) \leqslant \underline{f}_k + \varepsilon\Big\} \neq \varnothing$, то выбрав любое $\rho_k \in \Delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, найдем

$$\sup_{1\leqslant k<\infty} \min(\underline{f}_k,\, s_k) \leqslant \inf_{\rho>0} \sup_{1\leqslant k<\infty} \min(f_k(\rho),\, s_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{1\leqslant k<\infty} \min(f_k(\rho_k),\, s_k) \leqslant \sup_{1\leqslant k<\infty} \min(\underline{f}_k + \varepsilon,\, s_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{1\leqslant k<\infty} \min(\underline{f}_k + \varepsilon,\, s_k + \varepsilon) = \sup_{1\leqslant k<\infty} \min(f_k,\, s_k) + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует неравенство (2.15) и второе равенство в (2.13). Второе равенство в (2.14) проверяется аналогично.

Покажем, что в общем случае правая часть первого равенства в (2.13) может быть как меньше, так и больше правой части второго равенства в (2.13). С этой целью рассмотрим два случая, в каждом из которых все $\tau_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$, одинаковы, а их графики представлены на рис. 1а и 1б соответственно. В случае а) $\tau_i(p) = \beta$, $\widetilde{\tau}_i(p) \overset{\Delta}{=} \inf\limits_{p>0} \sup\limits_{p-\rho\leqslant a_i<p} \tau_i(a_i) = \alpha$, $\tau_{i\circ}(p) = \alpha$, $\tau_{i*}(p) = \beta$ и, следовательно, $\beta = l^{(1)} > l^{(2)} = \alpha$. В случае б) $\tau_i(p) = \beta$, $\widetilde{\tau}_i(p) = 1$, $\tau_{i\circ}(p) = 1$, $\tau_{i*}(p) = 1$ и, следовательно, $\beta = l^{(1)} < l^{(2)} = 1$.

Сформулируем достаточные условия для неравенств $l^{(1)} \geqslant l^{(2)}$ и $r^{(1)} \geqslant r^{(2)}$, обеспечивающих выражения для правых частей равенств (2.1), аналогичные (1.8) и (1.6).

Лемма 2.4. *Если*

$$\inf_{p>0} \sup_{p-\rho\leqslant a_k<p} \tau_k(a_k) \leqslant \tau_k(p), \qquad k=1,\,2,\,\ldots, \qquad p\in[0,\,1], \tag{2.16}$$

то

$$\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)(p) = \sup_{1\leqslant k<\infty} \min\left(\tau_k(p),\ \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}} \tau_{i*}(p)\right), \qquad p\in[0,\,1]; \tag{2.17}$$

если

$$\inf_{p>0} \sup_{p<a_k\leqslant p+\rho} \tau_k(a_k) \leqslant \tau_k(p), \qquad k=1,\,2,\,\ldots, \qquad p\in[0,\,1], \tag{2.18}$$

то

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)(p) = \sup_{1\leqslant k<\infty} \min\left(\tau_k(p),\ \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}} \tau_i^*(p)\right), \qquad p\in[0,\,1]. \tag{2.19}$$

Эти равенства следуют соответственно из формул (2.9) и (2.11) и равенств (2.13) и (2.14).

Итак, если выполнены условия (2.16), (2.18), *то есть если все функции* $\tau_k(\cdot)$, $k=1,\,2,\,\ldots$, *полунепрерывны сверху в точке* $p\in$ $\in[0,\,1]$, *то справедливы равенства* (2.17) *и* (2.19), *обобщающие соответственно равенства* (1.8) *и* (1.6). *Класс функций* $\tau(\cdot)\in\mathcal{T}$ *полунепрерывных сверху в каждой точке* $[0,\,1]$ *обозначим* $\mathcal{T}_0$.

Если $\tau_i(\cdot)\in\mathring{\mathcal{T}}$, $i=1,\,2,\,\ldots$, то имеет место следующий результат.

Лемма 2.5. *Пусть* $\tau_i(\cdot)\in\mathring{\mathcal{T}}$, $i=1,\,2,\,\ldots$ *Тогда*

• *если* $\tau_i^*(\cdot)$, $i=1,\,2,\,\ldots$, *непрерывны слева, то* $\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)(\cdot)\in\mathring{\mathcal{T}}$, *причем*

$$\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\tau_i\right)(p) = \min\left(\sup_{1\leqslant i<\infty}\tau_i^*(p),\ \inf_{1\leqslant j<\infty}\tau_{j*}(p)\right), \qquad p\in[0,\,1]; \tag{2.20}$$

• *если* $\tau_{i*}(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$, *непрерывны справа, то* $\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$, *причем*

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)(p) = \min\left(\inf_{1\leqslant i<\infty} \tau_i^*(p),\ \sup_{1\leqslant j<\infty} \tau_{j*}(p)\right), \qquad p \in [0, 1]. \quad (2.21)$$

Доказательство. Согласно условию леммы $\tau_i(\cdot) = \min(\tau_{i*}, \tau_i^*)(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$ Поэтому для $k = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{p-\rho\leqslant a_k<p} \tau_k(a_k) = \sup_{p-\rho\leqslant a_k<p} \min\left(\sup_{a\leqslant a_k} \tau_k(a), \sup_{b\geqslant a_k} \tau_k(b)\right) =$$
$$= \sup_{p-\rho\leqslant a_k<p}\ \sup_{a\leqslant a_k}\ \sup_{b\geqslant a_k} \min(\tau_k(a), \tau_k(b)) \leqslant \sup_{a<p}\ \sup_{b\geqslant p-\rho} \min(\tau_k(a), \tau_k(b)) =$$
$$= \min(\tau_{k\bullet}(p), \tau_k^*(p-\rho)).$$

Следовательно,

$$\inf_{\rho>0} \sup_{p-\rho\leqslant a_k<p} \tau_k(a_k) \leqslant \inf_{\rho>0} \min(\tau_{k\bullet}(p), \tau_k^*(p-\rho)) =$$
$$= \min(\tau_{k\bullet}(p), \tau_k^*(p)) \leqslant \min(\tau_{k*}(p), \tau_k^*(p)) = \tau_k(p), \quad (2.22)$$

ибо $\inf\limits_{\rho>0} \tau_k^*(p-\rho) = \lim\limits_{\rho\downarrow 0} \tau_k^*(p-\rho) = \tau_k^*(p)$, так как $\tau_k^*(\cdot)$ монотонно невозрастает и непрерывна слева, $k = 1, 2, \ldots$ Отсюда в свою очередь следует, что во втором равенстве (2.13)

$$\sup_{1\leqslant k<\infty} \min\left(\inf_{\rho>0} \sup_{p-\rho\leqslant a_k<p} \tau_k(a_k),\ \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}} \tau_{i\bullet}(p)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{1\leqslant k<\infty} \min\left(\tau_k^*(p),\ \tau_{k\bullet}(p),\ \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty\\ i\neq k}} \tau_{i\bullet}(p)\right) =$$
$$= \min\left(\sup_{1\leqslant k<\infty} \tau_k^*(p),\ \inf_{1\leqslant i<\infty} \tau_{i\bullet}(p)\right).$$

А так как $\tau_{i\bullet}(p) \leqslant \tau_{i*}(p)$, $i = 1, 2, \ldots$, $p \in [0, 1]$, и в первом равенстве (2.13) в силу условия $\tau_i(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$, $i = 1, 2, \ldots$,

$$\sup_{1\leqslant k<\infty} \min\left(\tau_k(p), \inf_{\substack{1\leqslant i<\infty \\ i\neq k}} \tau_{i*}(p)\right) =$$
$$= \min\left(\sup_{1\leqslant k<\infty} \tau_k^*(p), \inf_{1\leqslant i<\infty} \tau_{i*}(p)\right), \qquad p \in [0, 1],$$

то согласно равенству (2.9) имеет место равенство (2.20). Отсюда и из следствия 2.1 леммы 2.1 получаем, что $\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$. Включение $\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$ и равенство (2.21) при условии непрерывности $\tau_{i*}(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$, справа проверяется аналогично.

Замечание 2.2. Если выполнены условия леммы 2.5, то в силу неравенства (2.22) $\tau_i^*(p-0) = \tau_i^*(p) \Rightarrow \inf\limits_{\rho>0} \sup\limits_{p-\rho\leqslant a_i<p} \tau_i(a_i) \leqslant \tau_i(p)$, и аналогично $\tau_{i*}(p+0) = \tau_{i*}(p) \Rightarrow \inf\limits_{\rho>0} \sup\limits_{p<a_i\leqslant p+\rho} \tau_i(a_i) \leqslant \tau_i(p)$, $i = 1, 2, \ldots$, $p \in [0, 1]$. *Следовательно, если* $\tau_i(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$, $\tau_i^*(\cdot)$ *непрерывна слева, а* $\tau_{i*}(\cdot)$ *непрерывна справа на* $[0, 1]$, *то* $\tau_i(\cdot)$ *полунепрерывна сверху,* $\tau_i(\cdot) \in \mathfrak{T}_0$, $i = 1, 2, \ldots$.

На самом деле *верно и обратное утверждение: если функция* $\tau_i(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$ *и полунепрерывна сверху, то есть если* $\tau_i(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}} \cap \mathfrak{T}_0$, *то* $\tau_i^*(\cdot)$ *непрерывна слева, а* $\tau_{i*}(\cdot)$ *— справа,* $i = 1, 2, \ldots$. Действительно, пусть $\tau(\cdot) \in \mathring{\mathfrak{T}}$, то есть $\tau(p) = \min(\tau_*(p), \tau^*(p))$, $p \in [0, 1]$, и полунепрерывна сверху, то есть $\limsup\limits_{a\to p} \tau(a) = \inf\limits_{\rho>0} \sup_{|a-p|\leqslant\rho} \tau(a) \leqslant \tau(p)$, $p \in [0, 1]$. Тогда $\forall q \in [0, 1]$ множество $\{a \in [0, 1], \tau(a) \geqslant q\}$ замкнуто, а $\{a \in [0, 1], \tau(a) < q\}$ — открыто в[10] $[0, 1]$. Учитывая, что $\tau(p) = \min(\tau_*(p), \tau^*(p))$, $p \in [0, 1]$, $\tau_*(\cdot)$ монотонно неубывает, а $\tau^*(\cdot)$ монотонно невозрастает на $[0, 1]$, получим следующее разбиение $[0, 1] = \mathcal{E}_* \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^*$, где $\mathcal{E} = \{a \in [0, 1], \tau(a) = \tau_*(a) = \tau^*(a) = 1\}$ — замкнутый интервал, а $\mathcal{E}_* = \{a \in [0, 1], \tau(a) = \tau_*(a) < \tau^*(a) = 1\}$,

[10] Интервал $[0, 1]$ открыт и замкнут в себе. Точки 0 и 1 содержатся в $[0, 1]$ вместе с (односторонними) окрестностями $[0, \varepsilon)$ и $(1-\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$, соответственно.

$\mathcal{E}^* = \{a \in [0,\, 1],\ \tau(a) = \tau^*(a) < \tau_*(a) = 1\}$ — интервалы, открытые в $[0,\, 1]$.

1. Пусть $p \in \mathcal{E}_*$, $p \neq 0$, тогда $\exists \rho_0 > 0\ \forall \rho \in (0,\, \rho_0)\ \ [p-\rho,\, p+\rho] \subset \mathcal{E}_*$ и, следовательно, в этом случае

$$\inf_{\rho>0} \sup_{p-\rho\leqslant a<p} \tau(a) = \inf_{\rho>0} \sup_{p-\rho\leqslant a<p} \tau_*(a) = \tau_*(p-0) \leqslant \tau_*(p),$$
$$\inf_{\rho>0} \sup_{p<a\leqslant p+\rho} \tau(a) = \inf_{\rho>0} \sup_{p<a\leqslant p+\rho} \tau_*(a) = \tau_*(p+0) \leqslant \tau_*(p),$$

откуда в силу монотонного неубывания $\tau_*(\cdot)$ следует $\tau_*(p-0) \leqslant \tau_*(p) = \tau_*(p+0)$. Если же $p = 0$, то аналогично получим непрерывность справа $\tau_*(\cdot)$ в нуле: $\tau_*(0) = \tau_*(0+0)$.

2. Пусть $p \in \mathcal{E}^*$, $p \neq 1$, тогда $\exists \rho_0 > 0\ \forall \rho \in (0,\, \rho_0)\ \ [p-\rho,\, p+\rho] \subset \mathcal{E}^*$ и, следовательно,

$$\inf_{\rho>0} \sup_{p-\rho\leqslant a<p} \tau(a) = \inf_{\rho>0} \sup_{p-\rho\leqslant a<p} \tau^*(a) = \tau^*(p-0) \leqslant \tau^*(p),$$

откуда в силу монотонного невозрастания $\tau^*(\cdot)$ следует $\tau^*(p-0) = \tau^*(p)$ — непрерывность $\tau^*(\cdot)$ в точке $p \in \mathcal{E}^*$ слева. Если же $p = 1$, то точно так же получим непрерывность $\tau^*(\cdot)$ слева в единице: $\tau^*(1-0) = \tau^*(1)$.

3. Пусть, наконец, $p \in \mathcal{E}$. Если p — внутренняя точка $\mathcal{E}$, то $\tau^*(p+0) = \tau^*(p-0) = \tau^*(p) = \tau_*(p) = \tau_*(p-0) = \tau_*(p+0) = 1$. Пусть p — левая граница $\mathcal{E}$, тогда, если $\mathcal{E}$ содержит больше одной точки, то $\exists \rho_0 > 0\ \forall \rho \in (0,\, \rho_0)\ \ p-\rho \in \mathcal{E}_*$ и, следовательно,

$$\inf_{\rho>0} \sup_{p-\rho\leqslant a<p} \tau(a) = \inf_{\rho>0} \sup_{p-\rho\leqslant a<p} \tau_*(a) = \tau_*(p-0) \leqslant \tau_*(p),$$

а если p — правая граница $\mathcal{E}$, то

$$\inf_{\rho>0} \sup_{p<a\leqslant p+\rho} \tau(a) = \inf_{\rho>0} \sup_{p<a\leqslant p+\rho} \tau^*(a) = \tau^*(p+0) \leqslant \tau^*(p),$$

а в точках $\mathcal{E}$ функции $\tau_*(\cdot)$ и $\tau^*(\cdot)$ непрерывны.

Подведем итоги, включая лемму 2.5.

Теорема 2.1. *Пусть* $\tau_i(\cdot) \in \mathring{\mathcal{T}} \cap \mathcal{T}_0$, $i = 1, 2, \ldots$. *Тогда* $\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)(\cdot) \in$ $\in \mathring{\mathcal{T}} \cap \mathcal{T}_0$, $\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)(\cdot) \in \mathring{\mathcal{T}} \cap \mathcal{T}_0$, *причем*

$$\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)(p) = \min\left(\sup_{1 \leqslant i < \infty} \tau_i^*(p), \inf_{1 \leqslant i < \infty} \tau_{i*}(p)\right),$$
$$\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \tau_i\right)(p) = \min\left(\inf_{1 \leqslant i < \infty} \tau_i^*(p), \sup_{1 \leqslant i < \infty} \tau_{i*}(p)\right),$$

$p \in [0, 1]$.

Для дальнейшего условия V недостаточны; потребуем, чтобы VI *для любого класса* $\mathcal{T}_\Lambda$ *функций* $\tau_\lambda(\cdot) \in \mathcal{T}$, $\lambda \in \Lambda$, *функции*

$$\left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda\right)(p) = \sup\{\inf_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda(a_\lambda) | a_\cdot : \Lambda \to [0, 1], \sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = p\},$$
$$\left(\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda\right)(p) = \sup\{\inf_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda(a_\lambda) | a_\cdot : \Lambda \to [0, 1], \inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = p\}, \quad p \in [0,1], \tag{2.23}$$

принадлежали $\mathcal{T}$, *где аналогично* (2.9) *и* (2.11)

$$\sup\left\{\inf_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda(a_\lambda) \mid a_\cdot : \Lambda \to [0, 1], \sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = p\right\} =$$
$$= \max_{s=1,2}(\sup\{\inf_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda(a_\lambda) | a_\cdot \in \mathcal{L}^{(s)}\}),$$

где

$$\mathcal{L}^{(1)} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{a_\cdot : \Lambda \to [0, 1], a_\lambda = p, a_\mu \leqslant p, \mu \neq \lambda, \mu \in \Lambda\},$$
$$\mathcal{L}^{(2)} = \bigcap_{\rho > 0} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{a_\cdot : \Lambda \to [0, 1], p - \rho \leqslant a_\lambda < p, a_\mu < p, \mu \neq \lambda, \mu \in \Lambda\}$$

и

$$\sup\left\{\inf_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda(a_\lambda)\mid a.:\ \Lambda\to[0,\,1],\ \inf_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda=p\right\}=$$
$$=\max_{s=1,2}(\sup\{\inf_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda(a_\lambda)|a.\in\mathcal{R}^{(s)}\}),$$

где

$$\mathcal{R}^{(1)}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{a.:\ \Lambda\to[0,\,1],\,a_\lambda=p,\,a_\mu\geqslant p,\,\mu\neq\lambda,\,\mu\in\Lambda\},$$
$$\mathcal{R}^{(2)}=\bigcap_{\rho>0}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{a.:\ \Lambda\to[0,\,1],\,p-\rho\leqslant a_\lambda<p,\,a_\mu>p,\,\mu\neq\lambda,\,\mu\in\Lambda\}.$$

Замечание 2.3. Нетрудно проверить, что $\forall\gamma*\in\Gamma*$

$$\gamma*\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda\right)(\cdot)=\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(\gamma*\tau_\lambda)\right)(\cdot),$$
$$\gamma*\left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda\right)(\cdot)=\left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(\gamma*\tau_\lambda)\right)(\cdot).$$

Лемма 2.6. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda\right)^*(p)&=\sup_{\lambda\in\Lambda}\tau^*_\lambda(p),\quad &\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda\right)_*(p)&=\inf_{\lambda\in\Lambda}\tau_{\lambda*}(p);\\ \left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda\right)^*(p)&=\inf_{\lambda\in\Lambda}\tau^*_\lambda(p),\quad &\left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda\right)_*(p)&=\sup_{\lambda\in\Lambda}\tau_{\lambda*}(p),\quad p\in([0,1].\end{aligned}\tag{2.24}$$

Доказательство основано на лемме 2.1*, аналогичной лемме 2.1.
Лемма 2.1*. *Пусть* $\tau_\lambda(\cdot):\ [0,\,1]\to[0,\,1]$, $\Delta_\lambda\subset[0,\,1]$, *и* $\bar\tau_\lambda=\sup\limits_{a_\lambda\in\Delta_\lambda}\tau_\lambda(a_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$. *Тогда*

$$\sup\left\{\inf_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda(a_\lambda)\mid a_\mu\in\Delta_\mu,\,\mu\in\Lambda\right\}=\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{a_\lambda\in\Delta_\lambda}\inf_{\mu\in\Lambda}\tau_\mu(a_\mu)=\inf_{\lambda\in\Lambda}\bar\tau_\lambda.$$

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 2.1.

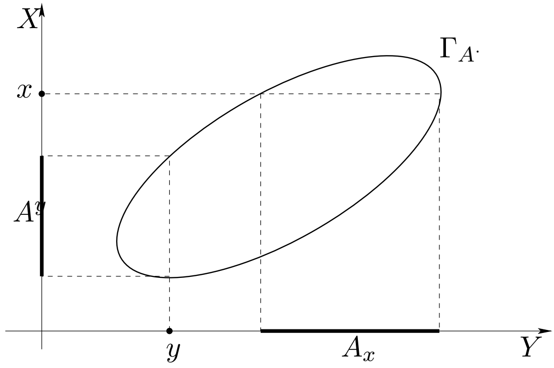

Рис. 7. График $\Gamma_{A^{\cdot}}$ отображения $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$; множества $A^y \subset X$, $A_x \subset Y$

§ 3. Неопределенные нечеткие (НН) элементы и множества. Правдоподобие возможности НН события (см. ч. 1)

Определим класс $\mathcal{T}(X)$ функций $\tau_{\cdot}(\cdot) : X \to \mathcal{T}$ таких, что при каждом $x \in X$ $\tau_x(\cdot) \in \mathcal{T}$. Значение $\tau_x(p)$ будем понимать как значение правдоподобия возможности $p \in [0, 1]$, зависящее от $x \in X$, как от параметра. Далее функцию $\tau_{\cdot}(\cdot)$ будем интерпретировать как распределение правдоподобия возможностей значений неопределенного нечеткого (НН) элемента $\widetilde{\xi}$ (см. ч. 1), принимающего значения в X, а именно, $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \tau_x(p) \in [0, 1]$ есть значение правдоподобия истинности высказывания, согласно которому $p \in [0, 1]$ есть возможность равенства $\widetilde{\xi} = x \in X$, или, короче, $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$ — правдоподобие возможности p равенства $\widetilde{\xi} = x$,

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = p), \quad x \in X, \quad p \in [0, 1]. \tag{3.1}$$

Если $A \in \mathcal{P}(X)$, то $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A) = p)$ — правдоподобие возможности $p \in [0, 1]$ включения $\widetilde{\xi} \in A \subset X$.

Пусть $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение, определенное на Y и принимающее значения в множестве $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств[11] X,

[11] Для любого $y \in Y$ его образ A^y — подмножество X, $A^y \in \mathcal{P}(X)$.

$$\Gamma_{A^{\cdot}} = \operatorname{graph} A^{\cdot} \triangleq \{(y,\, x) \in Y \times X,\ x \in A^y\} \tag{3.2}$$

— его график, см. рис. 7. Обозначим $A_{\cdot} :\ X \to \mathcal{P}(Y)$ отображение, обратное к $A^{\cdot}$, определенное равенством

$$A_x \triangleq \{y \in Y,\, x \in A^y\} \in \mathcal{P}(Y), \quad x \in X. \tag{3.3}$$

Согласно определениям (3.2) и (3.3) $\forall (y,\, x) \in Y \times X$ следующие включения эквивалентны:

$$(y,\, x) \in \Gamma_{A^{\cdot}} \Leftrightarrow x \in A^y \Leftrightarrow y \in A_x. \tag{3.4}$$

Пусть $\widetilde{\eta}$ — НН элемент со значениями в Y, $\tau_y^{\widetilde{\eta}}(p)$, $y \in Y$, $p \in [0,\, 1]$, — распределение правдоподобия возможностей его значений. НН множеством назовем образ $A^{\widetilde{\eta}}$ НН элемента $\widetilde{\eta}$, его индикаторной функцией (и.ф.) назовем функцию $\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot) :\ X \times [0,\, 1] \to [0,\, 1]$, определенную равенством (см. ч. 1)

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) \triangleq \operatorname{Pl}(P(\widetilde{\eta} \in A_x) = p) \equiv \operatorname{Pl}(P(x \in A^{\widetilde{\eta}}) = p), \quad x \in X,\ p \in [0,\, 1]. \tag{3.5}$$

Согласно определению (3.5) $\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p)$ есть правдоподобие возможности $p \in [0,\, 1]$ покрытия $x \in X$ НН множеством $A^{\widetilde{\eta}}$.

Наша ближайшая цель — получить выражение для правдоподобия возможности покрытия НН элемента $\widetilde{\xi}$ НН множеством $A^{\widetilde{\eta}}$.

Пусть $\widetilde{\xi}$ и $A^{\widetilde{\eta}}$ независимы (см. ч. 1). Расмотрим НН событие

$$\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}} = \bigcup_{x \in X} (\{\widetilde{\xi} = x\} \cap \{x \in A^{\widetilde{\eta}}\}), \tag{$*$}$$

состоящее в том, что НН элемент $\widetilde{\xi}$ покрывается НН множеством $A^{\widetilde{\eta}}$.

Для определения правдоподобия возможности НН события $\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}$ заметим, что согласно формуле ($*$), если события $\widetilde{\xi} = x$ и $x \in A^{\widetilde{\eta}}$ независимы (см. ч. 1), то правдоподобие того, что q — возможность «(равенства $\widetilde{\xi} = x$) И (включения $x \in A^{\widetilde{\eta}}$)», есть

$$\begin{aligned} \tau_x(q) \triangleq \sup\{\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a), \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(b)) \mid a,\, b \in [0,\, 1],\ \min(a,\, b) = q\} = \\ = (\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}})(q),\ x \in X,\ q \in [0,\, 1]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь $\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a), \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(b)) \triangleq q_x(a, b)$ — правдоподобие того, что «возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ равна a И возможность включения $x \in A^{\widetilde{\eta}}$ равна b», а правдоподобие того, что «возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ И включения $x \in A^{\widetilde{\eta}}$ равна q» получено как наибольшее значение правдоподобия $q_x(a, b)$ на множестве $\{a \geqslant q, b = q\} \cup \{a = q, b \geqslant q\}$ всех возможностей $a, b \in [0, 1]$, наименьшая из которых равна q.

После этого, предположив, что неопределенная функция $P(\widetilde{\xi} = x, x \in A^{\eta})$, $x \in X$, имеет независимые значения (см. ч. 1) и воспользовавшись первой формулой (2.23), определим искомое *правдоподобие возможности p НН события $\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}$, состоящего в том, что НН элемент $\widetilde{\xi}$ покрыт НН множеством $A^{\widetilde{\eta}}$, а именно* (см. ч. 1)

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p) = \sup\{\inf_{x\in X} \tau_x(q_x) |\, q.: X \to [0, 1],\ \sup_{x\in X} q_x = p\} = \\ = \left(\bigvee_{x\in X} \tau_x\right)(p) = \left(\bigvee_{x\in X} (\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}})\right)(p), \quad p \in [0,1], \quad (3.7)$$

и, как следствие (3.7),

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) \geqslant p) = \sup_{x\in X} \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p), \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}*}(p)), \\ &\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) \leqslant p) = \inf_{x\in X} \max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p), \tau_{x*}^{A^{\widetilde{\eta}}}(p)), \quad p \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.7^*)$$

Замечание 3.1. Поскольку в (3.6) $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(\cdot) \in \mathfrak{T}$, $\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot) \in \mathfrak{T}$, $x \in X$, то $\tau_x(\cdot) \in \mathfrak{T}$, $x \in X$, и согласно VI в (3.7) $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = \cdot) \triangleq \tau(\cdot \in \mathfrak{T})$, в (3.7*) $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) \geqslant p) = \tau^*(p)$, $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \in A^{\widetilde{\eta}}) \leqslant p) = \tau_*(p)$, $p \in [0, 1]$.

Поэтому согласно равенствам (3.7*) и замечанию 2.3 $\forall \gamma* \in \Gamma*$

$$\gamma * \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p) = \left(\bigvee_{x\in X} \left(\gamma * \tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \gamma * \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}\right)\right)(p),$$

$$\gamma * \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) \geqslant p) = \sup_{x\in X} \min(\gamma * \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p), \gamma * \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}*}(p)),$$

$$\gamma * \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) \leqslant p) = \inf_{x\in X} \max(\gamma * \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p), \gamma * \tau_{x*}^{A^{\widetilde{\eta}}}(p)),\ p \in [0, 1].$$

Рассмотрим некоторые важные частные случаи формул (3.6), (3.7), (3.7*).

3.1. Правдоподобие возможности включения «определенного четкого» (ОЧ) элемента $\widetilde{\xi} = y$ в НН множество $A^{\widetilde{\eta}}$

Для каждого $y \in X$ определим НН элемент $\widetilde{\xi} \in X$, распределение правдоподобия возможностей значений которого зададим равенством

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \delta_y(x), \\ 0, & \text{если } p \neq \delta_y(x), \end{cases} \quad x \in X, \quad p \in [0,\,1], \tag{3.8}$$

где функция $\delta_y(\cdot) : X \to \{0,\,1\}$ для каждого $y \in X$ определена согласно равенству

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \quad x \in X \tag{3.9}$$

и задает распределение возможностей значений $\widetilde{\xi}$. Такой НН элемент $\widetilde{\xi}$ естественно называть «определенным (и) четким» (ОЧ), поскольку согласно условиям (3.8), (3.9) вполне правдоподобно ($\tau = 1$), что $y \in X$ — единственно возможное ($p = 1$) его значение, столь же правдоподобно ($\tau = 1$), что любые другие значения $\widetilde{\xi}$ невозможны ($p = 0$), наконец, неправдоподобны любые отличные от нуля и единицы значения возможности равенства $\widetilde{\xi} = x$, $x \in X$.

Пусть $A^{\widetilde{\eta}}$ — НН множество, $\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\,1]$, — его и. ф. Получим выражение для $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p)$, $p \in [0,\,1]$. Согласно равенству (3.6) при $x = y \in X$

$$\begin{aligned} \tau_y(q) &= \sup\{\min(\tau_y^{\widetilde{\xi}}(a),\, \tau_y^{A^{\widetilde{\eta}}}(b)) \,|\, \min(a,\,b) = q\} = \\ &= \sup\{\min(1,\, \tau_y^{A^{\widetilde{\eta}}}(b)) \,|\, \min(1,\,b) = q\} = \tau_y^{A^{\widetilde{\eta}}}(q), \quad q \in [0,\,1]; \end{aligned} \tag{3.10}$$

аналогично при $x \neq y \in X$

$$\tau_x(q) = \begin{cases} \sup\limits_{0 \leqslant b \leqslant 1} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(b) = 1, & \text{если } q = 0, \\ 0, & \text{если } 0 < q \leqslant 1, \end{cases} \quad x \in X. \tag{3.11}$$

Согласно (3.7), (3.10), (3.11)

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p) = \sup\{\inf_{x\in X} \tau_x(q_x)|q.: X \to [0, 1], \sup_{x\in X} q_x = p\} =$$
$$= \min[\tau_y^{A^{\widetilde{\eta}}}(p), \sup\{\inf_{\substack{x\neq y\\ x\in X}} \tau_x(q_x)|q.: X \to [0, 1], \sup_{\substack{x\neq y\\ x\in X}} q_x \leqslant p\}] =$$
$$= \min[\tau_y^{A^{\widetilde{\eta}}}(p), 1] = \tau_y^{A^{\widetilde{\eta}}}(p), \quad y \in X, \quad p \in [0, 1]. \quad (3.12)$$

Иначе говоря, согласно (3.12) *правдоподобие того, что* p *— возможность включения ОЧ элемента* $\widetilde{\xi}$*, равного* $y \in X$*, в НН множество* $A^{\widetilde{\eta}}$*, как и следовало ожидать, совпадает с правдоподобием того, что* p *— возможность покрытия элемента* $y \in X$ *НН множеством* $A^{\widetilde{\eta}}$:

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p) = \mathrm{Pl}(P(y \in A^{\widetilde{\eta}}) = p) = \tau_y^{A^{\widetilde{\eta}}}(p), \quad y \in X, \quad p \in [0, 1]. \quad (3.13)$$

3.2. Правдоподобие возможности включения НН элемента в «определенное четкое» (ОЧ) множество $A^{\widetilde{\eta}}$

Пусть теперь НН множество $A^{\widetilde{\eta}}$ имеет и.ф.

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) = \begin{cases} 1, & p = \chi_A(x) \\ 0, & p \neq \chi_A(x), \quad x \in X, \quad p \in [0, 1], \end{cases} \quad (3.14)$$

где $\chi_A(\cdot)$ — индикаторная функция «обычного», «четкого» множества $A \subset X$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases} \quad (3.15)$$

Такое НН множество $A^{\widetilde{\eta}}$ естественно называть «определенным и четким» (ОЧ), поскольку вполне правдоподобно ($\tau = 1$), что возможность включения x в A равна единице, если $x \in A$, столь же правдоподобно, что возможность включения x в A равна нулю, если $x \in \in X \setminus A$, и неправдоподобны любые, отличные от нуля и единицы, значения возможности включения $x \in X$ в A и в $X \setminus A$.

Если $\widetilde{\xi}$ — НН элемент с распределением $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0, 1]$, то для определения $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A) = p)$ прежде всего найдем

$$\tau_x(q) = \begin{cases} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(q), & \text{если } x \in A, \quad 0 \leqslant q \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x \in X \setminus A, \quad q = 0, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus A, \quad 0 < q \leqslant 1, \end{cases}$$

после чего определим искомое правдоподобие возможности включения НН элемента $\widetilde{\xi}$ в ОЧ множество A:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A) = p) = \\ &= \sup\{\min(\inf_{x\in A} \tau_x(q_x), \inf_{x\in X\setminus A} \tau_x(q_x) | q_\cdot : X \to [0, 1], \sup_{x\in X} q_x = p\} = \\ &= \sup\{\inf_{x\in A} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(q_x) |\, q_\cdot : X \to [0, 1], \sup_{x\in A} q_x = p\} = \left(\bigvee_{x\in A} \tau_x^{\widetilde{\xi}}\right)(p), \\ &\qquad p \in [0, 1]. \qquad (3.16) \end{aligned}$$

В частности, если $A = \{\mathring{x}\}$ — одноточечное множество, то

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = \mathring{x}) = p) = \tau_{\mathring{x}}^{\widetilde{\xi}}(p), \quad \mathring{x} \in X, \quad p \in [0, 1], \qquad (3.17)$$

в полном согласии с определением (3.1) *распределения правдоподобия возможностей значений НН элемента* $\widetilde{\xi}$.

3.3. Распределение функции НН элемента. Маргинальные распределения

Формула (3.16) позволяет получить выражение для *маргинального распределения* НН элемента. Для этого рассмотрим НН вектор $(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) \in X \times Y$ с распределением $\tau_{x,y}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(p)$, $(x, y) \in X \times Y$, $p \in [0, 1]$, правдоподобия возможностей. Значение $\tau_{x,y}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(p)$ — правдоподобие истинности высказывания, согласно которому p — возможность того, что $\widetilde{\xi} = x \in X$ И $\widetilde{\eta} = y \in Y$, $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x, \widetilde{\eta} = y) = p) = \tau_{x,y}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(p)$. *Маргинальным распределением НН элемента* $\widetilde{\xi}$ *назовем распределение*

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = p) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x, \widetilde{\eta} \in Y) = p), \quad x \in X,\ p \in [0, 1].$$

Пусть в (3.14) $\widetilde{A}=\{\mathring{x}\}\times Y\subset X\times Y$, в (3.15) $\chi_{\widetilde{A}}(x,\,y)=1$, если $x=\mathring{x}$, $y\in Y$ и $\chi_{\widetilde{A}}(x,y)=0$, если $x\in X\backslash\{\mathring{x}\}$, $y\in Y$. Тогда согласно формуле (3.16)

$$\tau_{\mathring{x}}^{\widetilde{\xi}}(p)\stackrel{\triangle}{=}(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}=\mathring{x})=p)=\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}=\mathring{x},\widetilde{\eta}\in Y)=p))=$$
$$=\sup\left\{\inf_{(x,y)\in\widetilde{A}}\tau_{x,\,y}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\eta}}(q_{x,y})|q_{\cdot,\cdot}:X\times Y\to[0,1],\ \sup_{(x,y)\in\widetilde{A}}q_{x,y}=p\right\}=$$
$$=\sup\left\{\inf_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},y}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(\mathring{q}_y)|\ \mathring{q}_{\cdot}:Y\to[0,1],\ \sup_{y\in Y}\mathring{q}_y=p\right\}=$$
$$=\left(\bigvee_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},y}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}\right)(p),\quad \mathring{x}\in X,\ p\in[0,\,1],\quad (3.18)$$

— искомое *маргинальное распределение НН элемента* $\widetilde{\xi}\in X$. Согласно формуле (3.18)

$$\tau_{\mathring{x}}^{\widetilde{\xi}*}(p)=\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}=\mathring{x})\geqslant p)=\sup_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},\,y}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\eta}*}(p)=\left(\sup_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},\,y}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\eta}}\right)^{*}(p),$$
$$\tau_{\mathring{x}*}^{\widetilde{\xi}}(p)=\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}=\mathring{x})\leqslant p)=\inf_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},\,y*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\eta}}(p)\geqslant\left(\inf_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},\,y}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\eta}}\right)_{*}(p),\quad p\in[0,\,1],$$

где $\left(\sup\limits_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},\,y}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\eta}}\right)^{*}(p)=\sup\limits_{a\geqslant p}\sup\limits_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},\,y}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\eta}}(a)$, $\left(\inf\limits_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},\,y}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\eta}}\right)_{*}(p)=\sup\limits_{a\leqslant p}\inf\limits_{y\in Y}\tau_{\mathring{x},\,y}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\eta}}(a)$.

Пусть НН элемент $\widetilde{\zeta}=f(\widetilde{\xi})$ — функция НН элемента $\widetilde{\xi}$, $f(\cdot):X\to Z$, причем $f(X)=Z$. Тогда распределение $\widetilde{\zeta}$

$$\tau_{z}^{\widetilde{\zeta}}(p)=\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\zeta}=z)=p)=\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in f^{-1}(z))=p),\quad p\in[0,\,1],$$

где $f^{-1}(z)\stackrel{\triangle}{=}\{x\in X,\ f(x)=z\}$. Согласно формуле (3.16)

$$\tau_{z}^{\widetilde{\zeta}}(p)=\sup\{\inf_{x\in f^{-1}(z)}\tau_{x}^{\widetilde{\xi}}(q_x)|\ q_{\cdot}:\sup_{x\in f^{-1}(z)}q_x=p\}=$$
$$=\left(\bigvee_{x\in f^{-1}(z)}\tau_{x}^{\widetilde{\xi}}\right)(p),\ z\in Z,\ p\in[0,1],\quad (3.19)$$

— *распределение правдоподобия возможностей функции* $\widetilde{\zeta} = f(\widetilde{\xi})$ *НН элемента* $\widetilde{\xi}$.

В частности, если $\widetilde{\xi} = (\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2) \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n$, $\widetilde{\zeta} = f(\widetilde{\xi}) = \widetilde{\xi}_1 + \widetilde{\xi}_2 \in \mathbb{R}_n$ («обычная» сумма $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$) и $\tau_{x_1, x_2}^{\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2}(p)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n$, $p \in [0, 1]$, — распределение $\widetilde{\xi}$, то

$$\tau_z^{\widetilde{\xi}_1+\widetilde{\xi}_2}(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 + \widetilde{\xi}_2 = z) = p) =$$
$$= \sup\left\{ \inf_{x_1+x_2=z} \tau_{x_1, x_2}^{\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2}(q_{x_1, x_2}) \mid q_{\cdot, \cdot} : \sup_{x_1+x_2=z} q_{x_1, x_2} = p \right\},$$
$$z \in \mathbb{R}_n, \; p \in [0, 1].$$

Если НН векторы $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ независимы (с точностью до эквивалентности), то в последней формуле

$$\tau_{x_1, x_2}^{\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2}(p) = \sup\{\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(a_1), \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(a_2)) \mid \min(a_1, a_2) = p\} = (\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \wedge \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p),$$
$$x_1 \in \mathbb{R}_n, \, x_2 \in \mathbb{R}_n, \, p \in [0, 1].$$

3.4. Правдоподобие возможности включения «определенного нечеткого» (ОН) элемента в «определенное нечеткое» (ОН) множество

В заключение рассмотрим связь определения (3.6), (3.7) правдоподобия возможности включения НН элемента в НН множество с определением возможности $p_{f^\xi}(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ нечеткого события, данным в [1], согласно которому

$$p_{f^\xi}(f^A(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(f^A(x), f^\xi(x)), \quad f^A(\cdot), \; f^\xi(\cdot) \in \mathcal{L}(X),$$

— возможность включения нечеткого элемента, распределение возможностей значений которого есть $f^\xi(\cdot)$, в нечеткое множество A с и.ф. $f^A(\cdot)$. Для этого положим

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) = \begin{cases} 1, & p = f^A(x) \\ 0, & p \neq f^A(x), \end{cases} \quad x \in X, \; p \in [0, 1], \; f^A(\cdot) \in \mathcal{L}(X),$$

охарактеризовав тем самым нечеткое множество с и.ф. $f^A(\cdot): X \to [0,1]$ как частный случай НН множества $\widetilde{A^\eta}$, для которого неправдоподобна любая возможность включения $x \in \widetilde{A^\eta}$ кроме $f^A(x)$, $x \in X$, которая вполне правдоподобна. Такое НН множество естественно называть «определенным нечетким» (ОН). Пусть кроме того

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(q) = \begin{cases} 1, & q = f^\xi(x), \\ 0, & q \neq f^\xi(x), \end{cases} \quad x \in X,\ q \in [0,1],\ f^\xi(\cdot) \in \mathcal{L}(X).$$

Согласно этим условиям для НН элемента $\widetilde{\xi}$ неправдоподобна любая возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ кроме $f^\xi(x)$, $x \in X$, которая вполне правдоподобна. Такой НН элемент естественно называть «определенным нечетким» (ОН).

В таком случае в (3.6)

$$\tau_x(a) = \begin{cases} 1, & a = \min(f^A(x), f^\xi(x)), \\ 0, & a \neq \min(f^A(x), f^\xi(x)), \end{cases} \quad x \in X,\ a \in [0,1],$$

и соответственно в (3.7)

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A^\eta}) = p) = \begin{cases} 1, & p = \sup\limits_{x\in X} \min(f^A(x), f^\xi(x)), \\ 0, & p \neq \sup\limits_{x\in X} \min(f^A(x), f^\xi(x)), \end{cases} \quad p \in [0,1], \tag{3.20}$$

то есть правдоподобие того, что возможность включения ОН элемента $\widetilde{\xi}$ в ОН множество $\widetilde{A^\eta}$ равна p, равно единице, лишь если $p = p_{f^\xi}(f^A(\cdot))$, и — нулю во всех остальных случаях.

§ 4. Интеграл и его свойства

Определим интеграл, следуя схеме построения меры и интеграла, принятой в теории возможностей [1].

Определение 4.1. Интегралом pl назовем функцию, определенную на $\mathcal{T}(X)$ и принимающую значения в $\mathcal{T}$, $\mathrm{pl}(\cdot): \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}$, согласно следующей формуле:

$$\mathrm{pl}(t_\cdot(\cdot))(p) = \mathrm{pl}_{\pi_\cdot(\cdot)}(t_\cdot(\cdot))(p) = \left(\bigvee_{x\in X} (t_x \wedge \varPi_x)\right)(p), \quad p \in [0,1]. \tag{4.1}$$

В равенстве (4.1) $t.(\cdot)$ — произвольная, а $\Pi.(\cdot)$ — фиксированная функции из $\mathcal{T}(X)$, первая является аргументом pl, а вторая определяет pl (ср. с (3.7)).

Напомним, что

$$\left(\bigvee_{x\in X}(t_x\wedge \Pi_x)\right)(p)=$$
$$=\sup\left\{\inf_{x\in X}(t_x\wedge \Pi_x)(q_x)\,|\; q.:\; X\to[0,\,1],\;\sup_{x\in X}q_x=p\right\},$$
$$p\in[0,\,1],\quad (4.2)$$

где

$$(t_x\wedge \Pi_x)(q)=\sup\{\min_{x\in X}(t_x(a),\,\Pi_x(b))|\;a,\,b\in[0,\,1],\,\min(a,\,b)=q\},$$
$$q\in[0,\,1],\;x\in X.\quad (4.3)$$

Равенство (4.1) является другой формой записи равенства (3.7), в котором $\tau.^{\tilde{\xi}}(\cdot)=t.(\cdot)$, $\tau.^{A^{\tilde{\eta}}}(\cdot)=\Pi.(\cdot)$.

Замечание 4.1. Для любого $\gamma*\in\Gamma*$ согласно замечанию 3.1 $\mathrm{pl}_{\gamma*\pi.(\cdot)}(\gamma*t.(\cdot))(p)=\gamma*\mathrm{pl}_{\pi.(\cdot)}(t.(\cdot))$, $p\in[0,\,1]$, где $\gamma*\pi.(\cdot)$ и $\gamma*t.(\cdot)$ суть $\gamma*\pi_x(\cdot)$ и $\gamma*t_x(\cdot)$ для каждого $x\in X$.

Далее свойства интеграла (4.1) рассматриваются с точностью до эквивалентности, поэтому нам понадобятся следующие формулы (см. (3.7*)):

$$\begin{aligned}\mathrm{pl}^*(t.(\cdot))(p)&\overset{\triangle}{=}\sup_{a\geqslant p}\mathrm{pl}(t.(\cdot))(a)=\sup_{x\in X}\min(t^*_x(p),\,\Pi^*_x(p)),\\ \mathrm{pl}_*(t.(\cdot))(p)&\overset{\triangle}{=}\sup_{a\leqslant p}\mathrm{pl}(t.(\cdot))(a)=\inf_{x\in X}\max(t_{x*}(p),\,\Pi_{x*}(p)),\end{aligned}\quad p\in[0,\,1].\quad (4.4)$$

Отметим прежде всего следующее важное свойство интеграла.

4.1. Монотонность pl

Если для любого $x\in X$ $t_{1,x}(\cdot)\preccurlyeq t_{2,x}(\cdot)$, то

$$\mathrm{pl}(t_{1,\cdot}(\cdot))(\cdot)\preccurlyeq \mathrm{pl}(t_{2,\cdot}(\cdot))(\cdot);\quad (4.5)$$

если для любого $x \in X$ $t_{1,x}(\cdot) \simeq t_{2,x}(\cdot)$, то

$$\mathrm{pl}(t_{1,\cdot}(\cdot))(\cdot) \simeq \mathrm{pl}(t_{2,\cdot}(\cdot))(\cdot).$$

Действительно, если для любого $x \in X$ $t^*_{1,x}(p) \leqslant t^*_{2,x}(p)$ и $t_{1,x*}(p) \geqslant t_{2,x*}(p)$, $p \in [0, 1]$, то

$$\mathrm{pl}^*(t_{1,\cdot}(\cdot))(p) = \sup_{x\in X} \min(t^*_{1,x}(p), \mathit{\Pi}_x{}^*(p)) \leqslant \\ \leqslant \sup_{x\in X} \min(t^*_{2,x}(p), \mathit{\Pi}_x{}^*(p)) = \mathrm{pl}^*(t_{2,\cdot}(\cdot))(p),$$

$$\mathrm{pl}_*(t_{1,\cdot}(\cdot))(p) = \inf_{x\in X} \max(t_{1,x*}(p), \mathit{\Pi}_{x*}(p)) \geqslant \\ \geqslant \inf_{x\in X} \max(t_{2,x*}(p), \mathit{\Pi}_{x*}(p)) = \mathrm{pl}_*(t_{2,\cdot}(\cdot))(p).$$

Если же для любого $x \in X$ $t^*_{1,x}(p) = t^*_{2,x}(p)$ и $t_{1,x*}(p) = t_{2,x*}(p)$, $p \in$ $\in [0, 1]$, то согласно равенствам (4.4) $\mathrm{pl}^*(t_{1,\cdot}(\cdot))(p) = \mathrm{pl}^*(t_{2,\cdot}(\cdot))(p)$ и $\mathrm{pl}_*(t_{1,\cdot}(\cdot))(p) = \mathrm{pl}_*(t_{2,\cdot}(\cdot))(p)$, $p \in [0, 1]$.

4.2. Аддитивность pl

Покажем, что *для любых $t_{i,\cdot}(\cdot) \in \mathcal{T}(X)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\mathrm{pl}\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} t_{i,\cdot}\right)(\cdot)\right)(\cdot) \simeq \left(\bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot))\right)(\cdot), \tag{4.6}$$

или, что то же самое,

$$\mathrm{pl}^*\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} t_{i,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p) = \left(\bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot))\right)^*(p) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{pl}^*(t_{i,\cdot}(\cdot))(p),$$
$$\mathrm{pl}_*\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} t_{i,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p) = \left(\bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot))\right)_*(p) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{pl}_*(t_{i,\cdot}(\cdot))(p),$$
$$p \in [0, 1]. \tag{4.7}$$

Пусть $t_{i,\cdot}(\cdot) \in \mathcal{T}(X)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} t_{i,x}\right)^{*}(p) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} t^{*}_{i,x}(p), \quad \left(\bigvee_{i=1}^{n} t_{i,x}\right)_{*}(p) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} t_{i,x*}(p),$$
$$p \in [0, 1], \; x \in X,$$

то

$$\mathrm{pl}^{*}\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} t_{i,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p) = \sup_{x\in X} \min\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} t_{i,x}\right)^{*}(p), \mathit{\Pi}_{x}{}^{*}(p)\right) =$$
$$= \sup_{x\in X} \min\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} t^{*}_{i,x}(p), \mathit{\Pi}_{x}{}^{*}(p)\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{x\in X} \min(t^{*}_{i,x}(p), \mathit{\Pi}^{*}_{x}(p)) =$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{pl}^{*}(t_{i,\cdot}(\cdot))(p) = \left(\bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot))\right)^{*}(p)$$

и аналогично

$$\mathrm{pl}_{*}\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} t_{i,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p) = \inf_{x\in X} \max\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n} t_{i,x*}(p), \mathit{\Pi}_{x*}(p)\right) =$$
$$= \min_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{pl}_{*}(t_{i,\cdot}(\cdot))(p) = \left(\bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot))\right)_{*}(p), \quad p \in [0, 1].$$

4.3. Полная аддитивность pl

Если $t_{\lambda,\cdot}(\cdot) \in \mathcal{T}(X)$, $\lambda \in \Lambda$, *то*

$$\mathrm{pl}\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,\cdot}(\cdot)\right)(\cdot) \simeq \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{pl}(t_{\lambda,\cdot}(\cdot))\right)(\cdot), \tag{4.8}$$

или, что то же самое,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{pl}^{*}\left(\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p) &= \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{pl}(t_{\lambda,\cdot}(\cdot))\right)^{*}(p),\\ \mathrm{pl}_{*}\left(\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p) &= \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{pl}(t_{\lambda,\cdot}(\cdot))\right)_{*}(p), \end{aligned}\right\} \quad p \in [0, 1].$$

Так как в силу условий (V) $\forall x \in X$

$$\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,x}\right)^*(p) = \sup_{\lambda\in\Lambda} t^*_{\lambda,x}(p), \quad \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,x}\right)_*(p) = \inf_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,x*}(p), \quad p \in [0,\,1],$$

то

$$\begin{aligned}\mathrm{pl}^*\left(\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p) = \sup_{x\in X}\min\left(\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,x}\right)^*(p),\, \mathit{\Pi}_x{}^*(p)\right) =\\ = \sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{x\in X}\min(t^*_{\lambda,x}(p),\, \mathit{\Pi}_x{}^*(p)) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{pl}^*(t_{\lambda,\cdot}(\cdot))(p) =\\ = \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{pl}(t_{\lambda,\cdot}(\cdot))\right)^*(p), \quad p\in[0,\,1],\end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}\mathrm{pl}_*\left(\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p) = \inf_{x\in X}\max\left(\inf_{\lambda\in\Lambda} t_{\lambda,x*}(p),\, \mathit{\Pi}_{x*}(p)\right) =\\ = \inf_{\lambda\in\Lambda}\inf_{x\in X}\max(t_{\lambda,x*}(p),\, \mathit{\Pi}_{x*}(p)) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{pl}_*(t_{\lambda,\cdot}(\cdot))(p) =\\ = \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{pl}(t_{\lambda,\cdot}(\cdot))\right)_*(p), \quad p\in[0,\,1].\end{aligned}$$

4.4. Полунепрерывность снизу pl

Для любой последовательности $t_{i,\cdot}(\cdot)\in\mathcal{T}(X)$, $i=1,\,2,\,\ldots,$

$$\mathrm{pl}\left(\left(\bigvee_{n=1}^{n}\bigwedge_{i\geqslant n} t_{i,\cdot}\right)(\cdot)\right)(\cdot) \preccurlyeq \left(\bigvee_{n=1}^{n}\bigwedge_{i\geqslant n}\mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot))\right)(\cdot). \qquad (4.9)$$

Действительно,

$$\mathrm{pl}^*\left(\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i\geqslant n} t_{i,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p)=\sup_{x\in X}\min\left(\sup_{1\leqslant n<\infty}\inf_{i\geqslant n} t^*_{i,x}(p),\ {\mathit\Pi_x}^*(p)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{1\leqslant n<\infty}\inf_{i\geqslant n}\sup_{x\in X}\min(t^*_{i,x}(p),\ {\mathit\Pi_x}^*(p))=\sup_{1\leqslant n<\infty}\inf_{i\geqslant n}\mathrm{pl}^*(t_{i,\cdot}(\cdot))(p)=$$

$$=\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i\geqslant n}\mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot))\right)^*(p),$$

$$\mathrm{pl}_*\left(\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i\geqslant n} t_{i,\cdot}\right)(\cdot)\right)(p)=\inf_{x\in X}\max\left(\inf_{1\leqslant n<\infty}\sup_{i\geqslant n} t_{i,x*}(p),\ \mathit\Pi_{x*}(p)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\inf_{1\leqslant n<\infty}\sup_{i\geqslant n}\inf_{x\in X}\max(t_{i,x*}(p),\ \mathit\Pi_{x*}(p))=\inf_{1\leqslant n<\infty}\sup_{i\geqslant n}\mathrm{pl}_*(t_{i,\cdot}(\cdot))(p)=$$

$$=\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i\geqslant n}\mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot))\right)_*(p),\quad p\in[0,\,1].$$

Следствие 4.1. *Если* $\forall x\in X$ *последовательность* $t_{i,x}(\cdot)$, $i=1,\,2,\,\ldots$, *сходится (см. § 2.1), и* $t_x(\cdot)$ *— ее предел,*

$$t_x(\cdot)\simeq\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i\geqslant n} t_{i,x}\right)(\cdot)\simeq\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{i\geqslant n} t_{i,x}\right)(\cdot),\tag{4.10}$$

то

$$\mathrm{pl}(t_\cdot(\cdot))(\cdot)\preccurlyeq\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i\geqslant n}\mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot))\right)(\cdot).\tag{4.11}$$

Монотонные последовательности сходятся, причем если $\forall x\in X$ $t_{1,x}(\cdot)\preccurlyeq t_{2,x}(\cdot)\preccurlyeq\ldots$, то

$$t_x(\cdot)\overset{\triangle}{=}\left(\lim_{n\to\infty} t_{n,x}\right)(\cdot)=\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} t_{nx}\right)(\cdot),\tag{4.12}$$

а если $\forall x \in X\ t_{1,x}(\cdot) \succcurlyeq t_{2,x}(\cdot) \succcurlyeq \ldots$, то

$$t_x(\cdot) = \left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} t_{n,x}\right)(\cdot). \tag{4.13}$$

В первом случае в силу счетной аддитивности pl

$$\mathrm{pl}\left(\left(\lim_{n\to\infty} t_{n,x}\right)(\cdot)\right) = \mathrm{pl}\left(\left(\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} t_{n,\cdot}\right)(\cdot)\right)(\cdot) \simeq \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathrm{pl}(t_{n,\cdot}(\cdot))\right)(\cdot), \tag{4.14}$$

а в силу монотонности pl

$$\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathrm{pl}(t_{n,\cdot}(\cdot))\right)(\cdot) \simeq \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{pl}(t_{n,\cdot}(\cdot))\right)(\cdot). \tag{4.15}$$

Итак, если $\forall x \in X\ t_{1,x}(\cdot) \preccurlyeq t_{2,x}(\cdot) \preccurlyeq \ldots$, *то последовательность* $t_{i,x}(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$ *сходится и интеграл* pl *непрерывен относительно такой сходимости*:

$$\mathrm{pl}((\lim_{n\to\infty} t_{i,\cdot})(\cdot))(\cdot) = (\lim_{n\to\infty} \mathrm{pl}(t_{n,\cdot}(\cdot)))(\cdot), \tag{4.16}$$

где

$$\begin{aligned} (\lim_{n\to\infty} t_{n,x})(\cdot) &= \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} t_{n,x}\right)(\cdot), \\ (\lim_{n\to\infty} \mathrm{pl}(t_{n,\cdot}(\cdot)))(\cdot) &= \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathrm{pl}(t_{n,\cdot}(\cdot))\right)(\cdot). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Если $\forall x \in X\ t_{1,x}(\cdot) \succcurlyeq t_{2,x}(\cdot) \succcurlyeq \ldots$, то

$$t_x(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} (\lim_{n\to\infty} t_{n,x})(\cdot) = \left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} t_{n,x}\right)(\cdot), \tag{4.18}$$

но

$$\begin{aligned} \mathrm{pl}^*(t_\cdot(\cdot))(p) &= \sup_{x\in X} \min\left(\inf_{1\leqslant n<\infty} t^*_{n,x}(p),\ \mathit{\Pi}_x{}^*(p)\right) \leqslant \\ &\leqslant \inf_{1\leqslant n<\infty} \sup_{x\in X} \min(t^*_{n,x}(p),\ \mathit{\Pi}_x{}^*(p)) = \inf_{1\leqslant n<\infty} \mathrm{pl}^*(t_{n,\cdot}(\cdot))(p) = \\ &= \left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathrm{pl}(t_{n,\cdot}(\cdot))\right)(p) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{pl}_*(t_{n,\cdot}(\cdot))(p) \end{aligned}$$

и аналогично $\mathrm{pl}_*(t_{\cdot}(\cdot))(p) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{pl}_*(t_{n,\cdot}(\cdot))(p)$, $p \in [0, 1]$. В этом случае

$$\mathrm{pl}((\lim_{n\to\infty} t_{n,\cdot})(\cdot))(\cdot) \preccurlyeq (\lim_{n\to\infty} \mathrm{pl}(t_{n,\cdot}(\cdot)))(\cdot). \tag{4.19}$$

4.5. Линейность pl

Пусть $c_i(\cdot) \in \mathcal{T}$, $t_{i,\cdot}(\cdot) \in \mathcal{T}(X)$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\mathrm{pl}\left(\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}(c_i \wedge t_{i,\cdot})\right)(\cdot)\right)(\cdot) \simeq \left(\bigvee_{i=1}^{\infty}(c_i \wedge \mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot)))\right)(\cdot). \tag{4.20}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\mathrm{pl}^*((c_i \wedge t_{i,\cdot})(\cdot))(p) &= \sup_{x\in X}\min(c_i^*(p), t_{i,x}^*(p), \mathit{\Pi}_x{}^*(p)) = \\ = \min(c_i^*(p), \sup_{x\in X}\min(t_{i,x}^*(p), \mathit{\Pi}_x{}^*(p))) &= \min(c_i^*(p), \mathrm{pl}^*(t_{i,\cdot}(\cdot))(p)) = \\ &= (c_i \wedge \mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot)))^*(p)\end{aligned}$$

и аналогично $\mathrm{pl}_*((c_i \wedge t_{i,\cdot})(\cdot))(p) = (c_i \wedge \mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot)))_*(p)$, $p \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$, то есть $\mathrm{pl}((c_i \wedge t_{i,\cdot})(\cdot))(\cdot) \simeq (c_i \wedge \mathrm{pl}(t_{i,\cdot}(\cdot)))(\cdot)$. В силу счетной аддитивности pl отсюда следует (4.20).

Разумеется, и для любых семейств $c_\lambda(\cdot) \in \mathcal{T}$, $t_{\lambda,\cdot}(\cdot) \in \mathcal{T}(X)$, $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathrm{pl}\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(c_\lambda \wedge t_{\lambda,\cdot})(\cdot)\right)(\cdot) \simeq \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(c_\lambda \wedge \mathrm{pl}(t_{\lambda,\cdot}(\cdot)))\right)(\cdot). \tag{4.21}$$

4.6. Свойства правдоподобия возможности НН событий

Рассмотрим некоторые операции над многозначными отображениями, которые далее определят НН события.

Пусть $A^{\cdot}_{(\lambda)} : Y \to \mathcal{P}(X)$, $\lambda \in \Lambda$, — семейство многозначных отображений. Определим многозначные отображения: $B^{\cdot} = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A^{\cdot}_{(\lambda)}$, $C^{\cdot} = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A^{\cdot}_{(\lambda)}$ — объединение и соответственно пересечение отображений $A^{\cdot}_{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$, задав их значения для любого $y \in Y$ равенствами

$B^y = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A^y_{(\lambda)}$, $C^y = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A^y_{(\lambda)}$; дополнение $X\setminus A^{\cdot}_{(\lambda)}$ и разность $A^{\cdot}_{(\lambda)}\setminus A^{\cdot}_{(\mu)}$ определим для любого $y \in Y$ их значениями $X \setminus A^y_{(\lambda)}$ и $A^y_{(\lambda)} \setminus A^y_{(\mu)}$ соответственно.

Верхний $\bar{A}^{\cdot}$ и нижний $\underline{A}^{\cdot}$ пределы последовательности $A^{\cdot}_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, определим равенствами

$$\bar{A}^{\cdot} \overset{\triangle}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i\geqslant n} A^{\cdot}_{(i)}, \qquad \underline{A}^{\cdot} \overset{\triangle}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i\geqslant n} A^{\cdot}_{(i)}.$$

Последовательность $A^{\cdot}_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, назовем сходящейся, если $\bar{A}^{\cdot} = \underline{A}^{\cdot}$, отображение $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\cdot}_{(n)} \overset{\triangle}{=} \bar{A}^{\cdot} = \underline{A}^{\cdot}$ — ее пределом.

Последовательность $A^{\cdot}_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, назовем монотонно возрастающей (убывающей), если $\forall y \in Y$ $A^y_{(1)} \subset A^y_{(2)} \subset \ldots$ ($A^y_{(1)} \supset A^y_{(2)} \supset \ldots$). Первый случай выделим обозначением $A^{\cdot}_{(1)} \subset A^{\cdot}_{(2)} \subset \ldots$ (второй — $A^{\cdot}_{(1)} \supset A^{\cdot}_{(2)} \supset \ldots$).

Нетрудно убедиться, что монотонные последовательности многозначных отображений сходятся, причем если $A^{\cdot}_{(1)} \subset A^{\cdot}_{(2)} \subset \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\cdot}_{(n)} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A^{\cdot}_{(n)}$, а если $A^{\cdot}_{(1)} \supset A^{\cdot}_{(2)} \supset \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\cdot}_{(n)} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A^{\cdot}_{(n)}$.

Если $\widetilde{\eta}$ — НН элемент со значениями в Y, то сказанное приводит к определениям

• НН множеств

$$B^{\widetilde{\eta}} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}, \quad C^{\widetilde{\eta}} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}, \quad X \setminus A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}, \quad A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)} \setminus A^{\widetilde{\eta}}_{(\mu)}, \;\; \lambda, \mu \in \Lambda,$$

• пределов последовательностей НН множеств

$$\bar{A}^{\widetilde{\eta}} \overset{\triangle}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i\geqslant n} A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}, \quad \underline{A}^{\widetilde{\eta}} \overset{\triangle}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i\geqslant n} A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}, \quad \lim_{n\to\infty} A^{\widetilde{\eta}}_{(n)} \overset{\triangle}{=} \bar{A}^{\widetilde{\eta}} = \underline{A}^{\widetilde{\eta}};$$

• монотонных последовательностей НН множеств $A^{\widetilde{\eta}}_{(1)} \subset A^{\widetilde{\eta}}_{(2)} \subset \ldots$ и $A^{\widetilde{\eta}}_{(1)} \supset A^{\widetilde{\eta}}_{(2)} \supset \ldots$ и их пределов: $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\widetilde{\eta}}_{(n)} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^{\widetilde{\eta}}_{(n)}$ и соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\widetilde{\eta}}_{(n)} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A^{\widetilde{\eta}}_{(n)}$.

Для любой последовательности $A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, очевидно,

$$\underline{A}^{\widetilde{\eta}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i \geqslant n} A^{\widetilde{\eta}}_{(i)} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i \geqslant n} A^{\widetilde{\eta}}_{(i)} = \bar{A}^{\widetilde{\eta}}.$$

Лемма 4.1. *Пусть $A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$, — произвольное семейство НН множеств, принимающих значения в $\mathcal{P}(X)$, и $\widetilde{\xi}$ — НН элемент со значениями в X. Если $A^{\widetilde{\eta}} = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}$, то $\forall x \in X$*

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) \simeq \left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}} \right)(p), \tag{4.22}$$

$$\mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot))(p) \simeq \left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}) \right)(p), \tag{4.23}$$

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p) \simeq \left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}) = \cdot) \right)(p), \quad p \in [0,\, 1]. \tag{4.24}$$

Если $A^{\widetilde{\eta}} = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}$, то $\forall x \in X$

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) \preccurlyeq \left(\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}} \right)(p), \tag{4.25}$$

$$\mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot))(p) \preccurlyeq \left(\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}) \right)(p), \tag{4.26}$$

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p) \preccurlyeq \left(\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}) = \cdot) \right)(p), \quad p \in [0,\, 1]. \tag{4.27}$$

Доказательство. Достаточно проверить лишь отношения в (4.22) и (4.25), поскольку (4.23) следует из (4.22) в силу свойств 4.1 и 4.3

интеграла, (4.24) есть следствие (4.23), поскольку $\mathrm{Pl}(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}, p) = \mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot))(p)$, если в (4.1) $\Pi_x(p) = \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $(x, p) \in X \times [0, 1]$; аналогично, (4.26) следует из (4.25) в силу свойства 4.4 и (4.27) есть следствие (4.26).

Пусть $\tau_y^{\widetilde{\eta}}(p)$, $(y, p) \in Y \times [0, 1]$, — распределение правдоподобия возможностей значений НН элемента $\widetilde{\eta}$, и $A^{\widetilde{\eta}} = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}$. Тогда в силу формулы (3.16)

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}(p) = \mathrm{Pl}(P(x \in A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}) = p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\eta} \in A_{(\lambda)x}) = p) =$$
$$= \left(\bigvee_{y\in A_{(\lambda)x}} \tau_y^{\widetilde{\eta}}\right)(p),\ (x, p) \in X \times [0, 1], \quad (4.28)$$

и $\forall x \in X$

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}*}(p) = \sup_{y\in A_{(\lambda)x}} \tau_y^{\widetilde{\eta}*}(p), \quad \tau_{x*}^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}(p) = \inf_{y\in A_{(\lambda)x}} \tau_{y*}^{\widetilde{\eta}}(p), \quad p \in [0, 1]. \quad (4.29)$$

Далее: $\forall x \in X$

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) = \left(\bigvee_{y\in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)x}} \tau_y^{\widetilde{\eta}}\right)(p), \quad p \in [0, 1],$$

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}*}(p) = \sup_{y\in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)x}} \tau_y^{\widetilde{\eta}*}(p) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \sup_{y\in A_{(\lambda)x}} \tau_y^{\widetilde{\eta}*}(p) =$$
$$= \sup_{\lambda\in\Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}*}(p) = \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}\right)^*(p), \quad p \in [0, 1],$$

$$\tau_{x*}^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) = \inf_{y\in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)x}} \tau_{y*}^{\widetilde{\eta}}(p) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \inf_{y\in A_{(\lambda)x}} \tau_{y*}^{\widetilde{\eta}}(p) =$$
$$= \inf_{\lambda\in\Lambda} \tau_{x*}^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}(p) = \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}\right)_*(p), \quad p \in [0, 1].$$

Следовательно, $\forall x \in X$ $\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot) \simeq \left(\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}\right)(\cdot)$.

Пусть теперь $A^{\widetilde{\eta}} = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}$. Тогда $\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) = \left(\bigvee\limits_{y\in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)x}} \tau_y^{\widetilde{\eta}}\right)(p)$, и воспользовавшись равенствами (2.24), найдем $\forall x \in X$

$$\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}*}(p) = \sup_{y\in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)x}} \tau_y^{\widetilde{\eta}*}(p) \leqslant \inf_{\lambda\in\Lambda} \sup_{y\in A_{(\lambda)x}} \tau_y^{\widetilde{\eta}*}(p) =$$
$$= \inf_{\lambda\in\Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}*}(p) = \left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}\right)^*(p),$$

$$\tau_{x*}^{A^{\widetilde{\eta}}}(p) = \inf_{y\in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)x}} \tau_{y*}^{\widetilde{\eta}}(p) \geqslant \sup_{\lambda\in\Lambda} \inf_{y\in A_{(\lambda)x}} \tau_{y*}^{\widetilde{\eta}}(p) =$$
$$= \sup_{\lambda\in\Lambda} \tau_{x*}^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}(p) = \left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}\right)_*(p), \quad p\in[0,\,1].$$

Следовательно, в этом случае $\forall x \in X$ $\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot) \preccurlyeq \left(\bigwedge\limits_{\lambda\in\Lambda} \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}_{(\lambda)}}\right)(\cdot)$.

Следствием леммы 4.1 являются следующие *свойства приавдоподобия возможности НН событий.*

Теорема 4.1. *Если* $A^{\widetilde{\eta}} \subset B^{\widetilde{\eta}}$, *то* $\forall x \in X$ $\tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot) \preccurlyeq \tau_x^{B^{\widetilde{\eta}}}(\cdot)$ *и*

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p) \triangleq \mathrm{pl}(\tau_\cdot^{A^{\widetilde{\eta}}}(p))(\cdot) \preccurlyeq \mathrm{pl}(\tau_\cdot^{B^{\widetilde{\eta}}}(\cdot))(p) \triangleq$$
$$\triangleq \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in B^{\widetilde{\eta}}) = p),\ p\in[0,\,1], \quad (4.30)$$

(*монотонность*).

Для любой последовательности $A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}$, $i = 1,\,2,\,\ldots$

• *если* $A^{\widetilde{\eta}} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}$, *то*

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p) \triangleq \mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot))(p) \simeq \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}) = \cdot)\right)(p) \triangleq$$
$$\triangleq \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}}(\cdot))\right)(p), \quad p \in [0,\, 1], \quad (4.31)$$

(*счетная аддитивность*);

• *если* $\underline{A}^{\widetilde{\eta}} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i \geqslant n} A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}$ — *нижний предел последовательности* $A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}$, $i = 1,\, 2,\, \ldots,$ *то*

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \underline{A}^{\widetilde{\eta}}) = p) \triangleq \mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{\underline{A}^{\widetilde{\eta}}}(\cdot))(p) \preccurlyeq \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{i \geqslant n} \mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}}(\cdot))\right)(p) \triangleq$$
$$\triangleq \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{i \geqslant n} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}_{(i)}) = \cdot)\right)(p), \quad p \in [0,\, 1], \quad (4.32)$$

(*полунепрерывность снизу*);

• *если* $A^{\widetilde{\eta}}_{(1)} \subset A^{\widetilde{\eta}}_{(2)} \subset \ldots$, *то* $A^{\widetilde{\eta}} = \lim\limits_{n \to \infty} A^{\widetilde{\eta}}_{(n)} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^{\widetilde{\eta}}_{(n)}$ *и*

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \lim_{n \to \infty} A^{\widetilde{\eta}}_{(n)}) = p) \triangleq \mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}_{(n)}}(\cdot))(p) \simeq (\lim_{n \to \infty} \mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}_{(n)}}(\cdot)))(p) \triangleq$$
$$\triangleq \lim_{n \to \infty} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}_{(n)}) = p), \quad p \in [0,\, 1], \quad (4.33)$$

(*непрерывность относительно сходимости монотонно неубывающей последовательности НН множеств*).

§ 5. Мера правдоподобия возможности и ее свойства

Рассмотрим интеграл, определенный формулой (см. (4.1)),

$$\mathrm{pl}(t_{\cdot}^{A}(\cdot))(p) = \left(\bigvee_{x \in A} \mathit{\Pi}_x\right)(p), \quad p \in [0,\, 1], \quad (5.1)$$

в которой

$$t_x^A(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \chi_A(x), \\ 0, & \text{если } p \neq \chi_A(x), \end{cases} \quad (x,\, p) \in X \times [0,\, 1], \tag{5.2}$$

— и.ф. определенного четкого (ОЧ) множества A,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A, \end{cases} \quad x \in X.$$

Интеграл (5.1) определяет правдоподобие возможности $p \in [0,\, 1]$ включения НН элемента $\widetilde{\xi}$, имеющего распределение $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = \varPi_{\cdot}(\cdot) \in$ $\in \mathcal{T}(X)$, в ОЧ множество A с и.ф. $\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot) = t_{\cdot}^A(\cdot)$:

$$\mathrm{Pl}(A)(p) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A) = p) = \mathrm{pl}(t_{\cdot}^A(\cdot))(p), \quad p \in [0,\, 1]. \tag{5.3}$$

Заметим, что согласно определению (5.2)

$$t_x^{A*}(p) \overset{\triangle}{=} \sup_{a \geqslant p} t_x^A(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists a \in [p,1] :\ a = \chi_A(x), \\ 0, & \text{если } \forall a \in [p,1] :\ a \neq \chi_A(x), \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \chi_A(x), & \text{если } 0 < p \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } p = 0, \end{cases} \quad (x,\, p) \in X \times [0,\, 1], \tag{5.4}$$

и

$$t_{x*}^{A}(p) \overset{\triangle}{=} \sup_{a \leqslant p} t_x^A(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists a \in [0,p] :\ a = \chi_A(x), \\ 0, & \text{если } \forall a \in [0,p] :\ a \neq \chi_A(x), \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \chi_{X \setminus A}(x), & \text{если } 0 \leqslant p < 1, \\ 1, & \text{если } p = 1, \end{cases} \quad (x,\, p) \in X \times [0,\, 1], \tag{5.5}$$

где $\chi_{X \setminus A}(\cdot) = 1 - \chi_A(\cdot)$. Поэтому

$$\mathrm{pl}^*(t_{\cdot}(\cdot))(p) = \sup_{x \in X} \min(t_x^{A*}(p),\, \varPi_x^*(p)) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in A} \varPi_x{}^*(p), & 0 < p \leqslant 1, \\ \sup\limits_{x \in X} \varPi_x{}^*(p), & p = 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{pl}_*(t_{\cdot}(\cdot))(p) = \inf_{x \in X} \max(t_{x*}^{A}(p),\, \varPi_{x*}(p)) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in X \setminus A} \varPi_{x*}(p), & 0 \leqslant p < 1, \\ 1, & p = 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

Определение 5.1. Интеграл (5.3), рассматриваемый как функция $\mathrm{Pl}(A)(\cdot)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, определенная на $\mathcal{P}(X)$ и принимающая значения в $\mathcal{T}$, назовем мерой правдоподобия возможности.

Согласно равенствам (5.1) и (5.3) при $\mathit{\Pi}.(\cdot) = \tau^{\widetilde{\xi}}_{\cdot}(\cdot)$ значение $\mathrm{Pl}(A)(p)$ интеграла

$$\mathrm{Pl}(A)(p) = \left(\bigvee_{x\in A} \tau_x^{\widetilde{\xi}}\right)(p), \quad p \in [0,\,1], \tag{5.3}$$

есть правдоподобие возможности p включения фиксированного НН элемента $\widetilde{\xi}$ в определенное четкое множество $A \in \mathcal{P}(X)$. Поскольку НН элемент $\widetilde{\xi}$ определяет интеграл (5.3), будем этот факт отмечать индексом: $\mathrm{Pl}^{\widetilde{\xi}}(A)(\cdot)$, $A \in \mathcal{P}(X)$.

Замечание 5.1. Для любого преобразования $\gamma* \in \Gamma*$ $\gamma * \mathrm{Pl}^{\widetilde{\xi}}(A)(\cdot) = \left(\bigvee_{x\in A} \gamma * \tau_x^{\widetilde{\xi}}\right)(\cdot)$ так как согласно (5.2) $\gamma * t_x^A(\cdot) = t_x^A(\cdot)$ для каждого $x \in X$.

Определение 5.2. Тройку $(X,\, \mathcal{P}(X),\, \mathrm{Pl}^{\widetilde{\xi}})$ назовем пространством с мерой правдоподобия возможности, НН элемент $\widetilde{\xi}$ назовем каноническим для $(X,\, \mathcal{P}(X),\, \mathrm{Pl}^{\widetilde{\xi}})$, определяющим меру (5.3) правдоподобия возможности.

При этом согласно (5.6)

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{\xi}*}(A)(p) \triangleq \sup_{a\geqslant p} \mathrm{Pl}^{\widetilde{\xi}}(A)(a) =$$
$$= \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A) \geqslant p) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in A} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p), & 0 < p \leqslant 1, \\ \sup\limits_{x\in X} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p), & p = 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Pl}_*^{\widetilde{\xi}}(A)(p) \triangleq \sup_{a\leqslant p} \mathrm{Pl}^{\widetilde{\xi}}(A)(a) =$$
$$= \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A) \leqslant p) = \begin{cases} \inf\limits_{x\in X\setminus A} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p), & 0 \leqslant p < 1, \\ 1, & p = 1. \end{cases}$$

Согласно равенствам (5.4), (5.5), если $A = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)}$, то $\forall x \in X$

$$t_x^{A*}(p) = \sup_{\lambda\in\Lambda} t_x^{A_{(\lambda)}*}(p), \quad t_{x*}^{A}(p) = \inf_{\lambda\in\Lambda} t_{x*}^{A_{(\lambda)}}(p), \quad (x,\, p) \in X \times [0,\, 1],$$

и, следовательно, $\forall x \in X$

$$t_x^A(\cdot) \simeq \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} t_x^{A_{(\lambda)}}\right)(\cdot).$$

Аналогично, если $A = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)}$, то $\forall x \in X$

$$t_x^{A*}(p) = \inf_{\lambda\in\Lambda} t_x^{A_{(\lambda)}*}(p), \quad t_{x*}^{A}(p) = \sup_{\lambda\in\Lambda} t_{x*}^{A_{(\lambda)}}(p), \quad (x,\, p) \in X \times [0,\, 1],$$

и, следовательно, $\forall x \in X$

$$t_x^A(\cdot) \simeq \left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} t_x^{A_{(\lambda)}}\right)(\cdot).$$

При этом

$$\mathrm{Pl}^*\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)}\right)(p) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Pl}^*(A_{(\lambda)})(p),$$
$$\mathrm{Pl}_*\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)}\right)(p) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Pl}_*(A_{(\lambda)})(p), \quad p \in [0,\, 1],$$

поэтому

$$\mathrm{Pl}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)}\right)(\cdot) \simeq \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Pl}(A_{(\lambda)})\right)(\cdot);$$

между тем

$$\mathrm{Pl}^*\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)}\right)(p) \leqslant \inf_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Pl}^*(A_{(\lambda)})(p),$$
$$\mathrm{Pl}_*\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)}\right)(p) \geqslant \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Pl}_*(A_{(\lambda)})(p),$$

так что

$$\mathrm{Pl}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)}\right)(\cdot) \preccurlyeq \left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Pl}(A_{(\lambda)})\right)(\cdot).$$

Суммируем основные свойства меры правдоподобия возможности.

Теорема 5.1. *Мера правдоподобия возможности* $\mathrm{Pl}(A)(\cdot) \in \mathcal{T}$, $A \in \in \mathcal{P}(X)$, *(5.3),*

- *монотонна: если* $A \subset B$, *то*

$$\mathrm{Pl}(A)(\cdot) \preccurlyeq \mathrm{Pl}(B)(\cdot);$$

- *аддитивна:* $\forall A,\, B \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathrm{Pl}(A \cup B)(\cdot) \simeq (\mathrm{Pl}(A) \vee \mathrm{Pl}(B))(\cdot);$$

- *вполне аддитивна: для любого семейства множеств* $A_{(\lambda)} \in \in \mathcal{P}(X)$, $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathrm{Pl}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{(\lambda)}\right)(\cdot) \simeq \left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Pl}(A_{(\lambda)})\right)(\cdot);$$

- *полунепрерывна снизу: для любой последовательности* $A_{(n)} \in \in \mathcal{P}(X)$, $n = 1,\, 2,\, \ldots,$

$$\mathrm{Pl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i\geqslant n} A_{(i)}\right)(\cdot) \preccurlyeq \left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i\geqslant n} \mathrm{Pl}(A_{(i)})\right)(\cdot),$$

в частности, если последовательность $A_{(n)}$, $n = 1,\, 2,\, \ldots$, *сходится, то*

$$\mathrm{Pl}(\lim_{n\to\infty} A_{(n)})(\cdot) \preccurlyeq \left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{i\geqslant n} \mathrm{Pl}(A_{(i)})\right)(\cdot),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} A_{(n)} \overset{\triangle}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i\geqslant n} A_{(i)} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i\geqslant n} A_{(i)}$;

• *непрерывна относительно сходимости монотонно неубывающей последовательности множеств*: *если* $A_{(1)} \subset A_{(2)} \subset \ldots$, *то*

$$\mathrm{Pl}(\lim_{n\to\infty} A_{(n)})(\cdot) \simeq (\lim_{n\to\infty} \mathrm{Pl}(A_{(n)}))(\cdot),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} A_{(n)} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{(n)}$.

Доказательство следует из соотношений, предшествующих теореме. В частности, в силу монотонности $\mathrm{Pl}(A)(\cdot)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, и условия $A_{(1)} \subset A_{(2)} \subset \ldots$

$$\mathrm{Pl}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{(n)}\right)(p) = \sup_{1\leqslant n<\infty} \mathrm{Pl}^*(A_{(n)})(p) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Pl}^*(A_{(n)})(p),$$
$$\mathrm{Pl}_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{(n)}\right)(p) = \inf_{1\leqslant n<\infty} \mathrm{Pl}_*(A_{(n)})(p) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Pl}_*(A_{(n)})(p),$$
$$p \in [0,\, 1],$$

откуда следует последнее утверждение.

Теорема 5.1 является специальным случаем теоремы 4.1.

В заключение рассмотрим связь между мерой правдоподобия возможности $\mathrm{Pl}^{\widetilde{\xi}}(A)(p)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, $p \in [0,\, 1]$, и интегралом $\mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{A^{\widetilde{\eta}}}(\cdot))(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) = p)$, $p \in [0,\, 1]$, частным случаем которого является мера $\mathrm{Pl}^{\widetilde{\xi}}(A)(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A) = p)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, $p \in [0,\, 1]$.

В общем случае имеют место следующие представления для функции $t_{\cdot}(\cdot) \in \mathcal{T}(X)$

$$t_x(p) = \sup_{\lambda\in[0,\,1]} \min(\lambda,\, \chi_{\lambda,x}(p)), \quad (x,\, p) \in X \times [0,\, 1],$$

где

$$\chi_{\lambda,x}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = t_x(p), \\ 0, & \text{если } \lambda \neq t_x(p), \end{cases} \quad (x,\, p) \in X \times [0,\, 1],$$

— и.ф. множества

$$A_{(\lambda)} = \{(x,\, p) \in X \times [0,\, 1],\ t_x(p) = \lambda\} \subset X \times [0,\, 1], \quad \lambda \in [0,\, 1],$$

и

$$t_x(p) = \inf_{\lambda\in[0,1]} \max(\lambda, \vartheta \circ \chi_{\lambda,x}(p)), \quad (x, p) \in X \times [0, 1],$$

где

$$\vartheta \circ \chi_{\lambda,x}(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda = t_x(p), \\ 1, & \text{если } \lambda \neq t_x(p), \end{cases} \quad (x, p) \in X \times [0, 1]$$

— и.ф. множества $(X \times [0, 1]) \setminus A_{(\lambda)}$.

Заметим, что

$$\chi^*_{\lambda,x}(p) \triangleq \sup_{a\geqslant p} \chi_{\lambda,x}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists a \in [p, 1] \ \lambda = t_x(a), \\ 0, & \text{если } \forall a \in [p, 1]: \ \lambda \neq t_x(a), \end{cases} \tag{5.7}$$

и при этом

$$t^*_x(p) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \min(\lambda, \chi^*_{\lambda,x}(p)), \quad (x, p) \in X \times [0, 1]. \tag{5.8}$$

Если $I_x(p) = \bigcup\limits_{a\in[p,1]} \{t_x(a)\} \subset [0, 1]$, то $\chi_{\lambda,\cdot}(\cdot)$ — и.ф. множества $\{(x, p) \in X \times [0, 1], \ \lambda \in I_x(p)\}$.

Далее,

$$\vartheta \circ \chi_{\lambda,x*}(p) \triangleq \sup_{a\leqslant p} \vartheta \circ \chi_{\lambda,x}(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } \forall a \in [0, p]: \ \lambda = t_x(a), \\ 1, & \text{если } \exists a \in [0, p]: \ \lambda \neq t_x(a), \end{cases}$$

$\vartheta \circ \chi_{\lambda,\cdot*}(\cdot)$ — и.ф. множества $\{(x, p) \in X \times [0, 1], \quad \lambda \in \bigcup\limits_{a\in[0,p]} ([0, 1] \setminus \{t_x(a)\})\}$.

При этом

$$t_{x*}(p) = \inf_{\lambda\in[0,1]} \max(\lambda, \vartheta \circ \chi_{\lambda,x*}(p)), \quad (x, p) \in X \times [0, 1].$$

Согласно выражениям (5.6), (5.7), (5.8)

$$\begin{aligned} \mathrm{pl}^*(t.(\cdot))(p) &= \sup_{x\in X} \min(\lambda, \sup_{\lambda\in[0,1]} \min(\lambda, \chi^*_{\lambda,x}(p))) = \\ &= \sup_{\lambda\in[0,1]} \min(\lambda, \sup_{x\in X} \min(\mathit{\Pi}^*_x(p), \chi^*_{\lambda,x}(p))) = \\ &= \sup_{\lambda\in[0,1]} \min(\lambda, \sup_{x\in A^*_{(\lambda)}(p)} \mathit{\Pi}^*_x(p)), \quad p \in [0, 1], \end{aligned} \tag{5.9}$$

где[12] $A^*_{(\lambda)}(p) = \{x \in X,\ \chi^*_{\lambda,x}(p) = 1\} = \{x \in X,\ \lambda \in \bigcup_{a\in[p,1]} \{t_x(a)\}\}$, $p \in [0,\,1]$, а так как согласно равенствам (5.3), (5.6)

$$\sup_{x\in A^*_{(\lambda)}(p)} \mathit{\Pi}^*_x(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^*_{(\lambda)}(p)) \geqslant p), \tag{5.10}$$

то согласно (5.9), (5.10) получаем следующее *представление интеграла* $\mathrm{pl}^*(t.(\cdot))(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) \geqslant p) &= \mathrm{pl}^*(t.(\cdot))(p) = \\ &= \sup_{\lambda\in[0,\,1]} \min(\lambda,\, \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^*_{(\lambda)}(p)) \geqslant p)), \quad p \in [0,\,1]. \end{aligned}\tag{5.11}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\mathrm{pl}_*(t.(\cdot))(p) &= \inf_{\lambda\in[0,\,1]} \max(\mathit{\Pi}_{x*}(p),\, \inf_{x\in X} \max(\lambda,\, \vartheta \circ \chi_{\lambda,x*}(p))) = \\ &= \inf_{\lambda\in[0,\,1]} \max(\lambda,\, \inf_{x\in X} \max(\mathit{\Pi}_{x*}(p),\, \vartheta \circ \chi_{\lambda,x*}(p))) = \\ &= \inf_{\lambda\in[0,\,1]} \max(\lambda,\, \inf_{x\in A_{(\lambda)*}(p)} \mathit{\Pi}_{x*}(p)),\end{aligned}$$

где $A_{(\lambda)*}(p) = \{x \in X,\ \vartheta \circ \chi_{\lambda,x*}(p) = 0\} = \{x \in X,\ \lambda \in \bigcap_{a\in[0,p]} \{t_x(a)\}\}$.

Поэтому для $\mathrm{pl}_*(t.(\cdot))(\cdot)$ получаем следующее *представление*:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A^{\widetilde{\eta}}) \leqslant p) &= \mathrm{pl}_*(t.(\cdot))(p) = \\ &= \inf_{\lambda\in[0,\,1]} \max(\lambda,\, \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in A_{(\lambda)*}(p)) \leqslant p)), \quad p \in [0,\,1]. \end{aligned}\tag{5.12}$$

В связи с формулами (5.11), (5.12) см. также [8].

§ 6. Независимость в широком смысле НН событий, НН множеств. Условное в широком смысле правдоподобие возможностей

Определение 6.1. Пусть $\widetilde{\xi}$ — НН элемент, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ — НН множества. НН события $\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}$ и $\widetilde{\xi} \in \widetilde{B}$ назовем независимыми (в широком смысле), если

[12] По определению $\sup\limits_{\varnothing} = 0$, $\inf\limits_{\varnothing} = 1$.

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} \bigcap \widetilde{B}) \geqslant p) = \min(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}) \geqslant p)), \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{B}) \geqslant p),$$
$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} \bigcap \widetilde{B}) \leqslant p) = \max(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}) \leqslant p)), \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{B}) \leqslant p),$$
$$p \in [0,\, 1].$$

Вариантом условного (в широком смысле) относительно НН события $\widetilde{\xi} \in \widetilde{B}$ НН события $\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}$ назовем любое решение уравнений

$$\min(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} | \xi \in \widetilde{B}) \geqslant p),\ \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{B}) \geqslant p)) = \\ = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} \bigcap \widetilde{B}) \geqslant p),$$
$$\max(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} | \xi \in \widetilde{B}) \leqslant p),\ \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{B}) \leqslant p)) = \\ = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} \bigcap \widetilde{B}) \leqslant p),$$
$$p \in [0,\, 1]$$

относительно $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} | \xi \in \widetilde{B}) \geqslant p)$ и $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} | \xi \in \widetilde{B}) \leqslant p)$.

Пусть $\widetilde{\xi}$ — «определенный четкий» элемент, эквивалентный $y \in X$,

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \delta_y(x), \\ 0, & \text{если } p \neq \delta_y(x), \end{cases} \quad x \in X,\ p \in [0,\, 1],$$

— его распределение. Тогда $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}) = p) = \tau_y^{\widetilde{A}}(p)$, $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{B}) = p) = \tau_y^{\widetilde{B}}(p)$, и в случае независимости (с точностью до эквивалентности)

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} \bigcap \widetilde{B}) \geqslant p) = \tau_y^{\widetilde{A} \cap \widetilde{B} *}(p) = \min(\tau_y^{\widetilde{A} *}(p),\ \tau_y^{\widetilde{B} *}(p)),$$
$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A} \bigcap \widetilde{B}) \leqslant p) = \tau_{y*}^{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}}(p) = \max(\tau_{y*}^{\widetilde{A}}(p),\ \tau_{y*}^{\widetilde{B}}(p)), \tag{6.1}$$
$$y \in X,\ p \in [0,\, 1].$$

Если равенства (6.1) выполнены, НН множества назовем *независимыми в широком смысле.*

В более общей ситуации, когда речь идет о событиях $\widetilde{\xi}_1 \in \widetilde{A}_1 \in \mathcal{P}(X_1)$ и $\widetilde{\xi}_2 \in \widetilde{A}_2 \in \mathcal{P}(X_2)$, последние назовем *независимыми в широком смысле, если*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 \in \widetilde{A}_1,\ \widetilde{\xi}_2 \in \widetilde{A}_2) \geqslant p) = \\
&\qquad\qquad = \min(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 \in \widetilde{A}_1) \geqslant p),\ \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_2 \in \widetilde{A}_2) \geqslant p), \\
&\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 \in \widetilde{A}_1,\ \widetilde{\xi}_2 \in \widetilde{A}_2) \leqslant p) = \\
&\qquad\qquad = \max(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 \in \widetilde{A}_1) \leqslant p),\ \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_2 \in \widetilde{A}_2) \leqslant p), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p \in [0,1].
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Если, в частности, $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ эквивалентны обычным множествам $A_1 \in \mathcal{P}(X_1)$ и $A_2 \in \mathcal{P}(X_2)$, то

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_i \in \widetilde{A}_i) \geqslant p) = \sup_{x_i \in A_i} \tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i *}(p),$$
$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_i \in \widetilde{A}_i) \leqslant p) = \inf_{x_i \in A_i} \tau_{x_i *}^{\widetilde{\xi}_i}(p),$$

и согласно (6.2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 \in \widetilde{A}_1,\ \widetilde{\xi}_2 \in \widetilde{A}_2) \geqslant p) &= \min_{i=1,2} \sup_{x_i \in A_i} \tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i *}(p), \\
\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}_1 \in \widetilde{A}_1,\ \widetilde{\xi}_2 \in \widetilde{A}_2) \leqslant p) &= \max_{i=1,2} \inf_{x_i \in A_i} \tau_{x_i *}^{\widetilde{\xi}_i}(p).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Если эти равенства имеют место для любых $A_i \in \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, 2$, то они эквивалентны независимости в шроком смысле НН элементов $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$.

Часть III. Оптимальное оценивание

Предисловие

Правдоподобие и возможность ошибки оценивания позволяют охарактеризовать различные аспекты качества оценки, отражая ту или иную точку зрения на проблему оптимальности оценивания [6] Возможность (или, и необходимость) ошибки, в значительной степени характеризуя качество оценки, отчасти определяет и качество модели, используемой *исследователем* для оценивания, и *для последнего* обычно является одной из основных характеристик качества оценки. В этом случае важной дополнительной характеристикой качества является правдоподобие тех или иных значений возможности ошибки, показывающее, в какой степени им следует доверять. С другой стороны позиция *пользователя*, определяющая его отношение к качеству оценки, может в первую очередь основываться на том, насколько оценке можно доверять, каким бы при этом ни было ее качество, определяемое возможностью ошибки. В этом случае правдоподобие (или, и доверие) оценки является ее основной характеристикой, а возможность — дополнительной характеристикой ее правдоподобия (или доверия), [6].

Далее будет рассмотрена первая точка зрения на качество оценивания.

§ 1. Оптимальное оценивание неопределенного нечеткого (НН) элемента

1.1. Правдоподобие возможности ошибки оценивания

Пусть $\widetilde{\xi}$ — НН элемент, принимающий значения в X, $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$ — правдоподобие истинности высказывания, согласно которому $p \in [0, 1]$ — возможность равенства $\widetilde{\xi} = x \in X$, $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in Y$, — семейство НН множеств, принимающих значения в $\mathcal{P}(X)$, $\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)$ — правдоподобие истинности высказывания, согласно которому $p \in [0, 1]$ — возможность покрытия $x \in X$ НН множеством $\widetilde{A}_{(y)}$ (возможность $x \in \widetilde{A}_{(y)}$)[1], пусть, наконец, $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{A}_{(y)}$ независимы при любом $y \in Y$ (см. ч. II). Для каждого $x \in X$ значение $\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)$ правдоподобия возможности $p \in [0, 1]$ включения $x \in \widetilde{A}_{(y)}$ будем интерпретировать как значение правдоподобия возможности p ошибки оценивания $x \in X$ значением[2] $y \in Y$,

[1]Условимся далее этот же смысл вкладывать в «укороченные» фразы: $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$ — правдоподобие возможности p равенства $\widetilde{\xi} = x$, $\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)$ — правдоподобие возможности p включения $x \in \widetilde{A}_{(y)}$ и т.п.

[2]В общем случае возможно $Y \subset X$, $Y = X$, или $Y \supset X$.

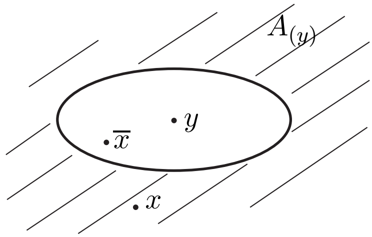

Рис. 8. Элемент $x \in X$ покрыт, элемент $\overline{x} \in X$ — не покрыт множеством $A_{(y)}$, которое является значением НН множества $\widetilde{A}_{(y)}$ при $y \in Y$, (см. ч. I).

ср. с определением возможности ошибки в [1].

В данном случае, см. ч. II,

$$\begin{aligned} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) &= \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = p), \\ \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) &= \mathrm{Pl}(P(x \in \widetilde{A}_{(y)}) = p),\ p \in [0,\,1],\ x \in X, \end{aligned} \tag{1.1}$$

и соответственно *правдоподобие возможности* p *ошибки оценивания* НН *элемента* $\widetilde{\xi}$ *значением* $y \in Y$ *по определению есть правдоподобие возможности* p *включения* $\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}$,

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = p) = \sup\{\inf_{x \in X} \tau_x^{(y)}(q_x) |\ \sup_{x \in X} q_x = p\} \triangleq$$
$$\triangleq \left(\bigvee_{x \in X} \tau_x^{(y)}\right)(p), \quad p \in [0,\,1]. \tag{1.2}$$

Здесь

$$\tau_x^{(y)}(q) = \sup\{\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a),\, \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(b)) |\, a,\, b \in [0,\,1],\ \min(a,\,b) = q\} \triangleq$$
$$\triangleq (\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}})(q), \quad q \in [0,\,1], \tag{1.3}$$

и считается, что неопределенная функция $P(\widetilde{\xi} = x,\, x \in \widetilde{A}_{(y)})$, $x \in X$, имеет независимые значения при любом[3] $y \in Y$. Соответственно

[3] В этом случае $\mathrm{Pl}(\forall x \in X\ \ P(\widetilde{\xi} = x,\, x \in \widetilde{A}_{(y)}) = q_x) = \inf_{x \in X} (\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}})(q_x)$, $q_\cdot : X \to [0,\,1]$, см. части I, II.

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\geqslant p) &= \sup_{x\in X}\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\ \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p)),\\
\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\leqslant p) &= \inf_{x\in X}\max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\ \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)),
\end{aligned}\right\}\quad p\in[0,\,1]. \tag{1.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p) &\triangleq \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}=x)\geqslant p),\\
\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p) &\triangleq \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}=x)\leqslant p),\\
\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p) &\triangleq \mathrm{Pl}(P(x\in\widetilde{A}_{(y)})\geqslant p),\\
\tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) &\triangleq \mathrm{Pl}(P(x\in\widetilde{A}_{(y)})\leqslant p),\ p\in[0,\,1],\ x\in X,\ y\in Y,\ \text{см. ч. II.}
\end{aligned}
$$

1.2. Критерий качества оценивания, основанный на правдоподобии возможности ошибки

Согласно точке зрения на качество оценивания, принятой в этом параграфе, для оптимального оценивания НН элемента $\widetilde{\xi}$ значением $y\in Y$ последнее следует выбирать, *минимизируя правдоподобие больших возможностей и максимизируя правдоподобие малых возможностей ошибки,* то есть исходить из условий

$$
\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\geqslant p)\sim\min_{y\in Y},\quad \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\leqslant p)\sim\max_{y\in Y}, \tag{1.5}
$$

определяющих соответственно множества

$$
\left.\begin{aligned}
Y^*(p)\triangleq\{y^*(p)\in Y,\ &\sup_{x\in X}\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\ \tau_x^{\widetilde{A}_{(y^*(p))}*}(p)) =\\
&=\min_{y\in Y}\sup_{x\in X}\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\ \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p))\},\\
Y_*(p)\triangleq\{y_*(p)\in Y,\ &\inf_{x\in X}\max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\ \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y_*(p))}}(p)) =\\
&=\max_{y\in Y}\inf_{x\in X}\max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\ \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p))\},
\end{aligned}\right\}\quad p\in[0,\,1]. \tag{1.6}
$$

Если $Y^*(p) \cap Y_*(p) \neq \varnothing$, то решением задачи (1.5) является любой элемент $y(p) \in Y^*(p) \cap Y_*(p)$, $p \in [0,\, 1]$.

Далее будет показано, что именно такая ситуация характерна для задачи (1.5). Следующий результат несколько проясняет ситуацию в задаче (1.5).

Лемма 1.1. *Для любых* $p \in [0,\, 1]$ *и* $y \in Y$

$$\max(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p),\, \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p)) = 1. \tag{1.7}$$

Доказательство. Равенство (1.7) означает, что $\forall p \in [0,\, 1]$, $\forall y \in \in Y$ по крайней мере одно из высказываний $P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p$ или $P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p$ вполне правдоподобно. Проверим это аналитически. Начнем с того, что заметим, что так как

$$\begin{aligned} \max(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\, \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)) = 1, &\quad p \in [0,\, 1],\ x \in X, \\ \max(\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p),\, \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)) = 1, &\quad p \in [0,\, 1],\ x \in X,\ y \in Y, \end{aligned} \tag{1.8}$$

то

$$m = \max(\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\, \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p)),\, \max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\, \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p))) = 1, \\ p \in [0,\, 1],\, x \in X,\, y \in Y. \tag{1.9}$$

Действительно, если $\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\, \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p)) = 1$, то $m = 1$. Если же, скажем, $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p) < 1$, то согласно (1.8) $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p) = 1$ и, следовательно, опять-таки $m = 1$.

Обозначим

$$\begin{aligned} &F_x^{(1)}(y,\, p) = \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\, \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p)), \quad F_x^{(2)}(y,\, p) = \max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\, \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)), \\ &m = \max(F_x^{(1)}(y,\, p),\, F_x^{(2)}(y,\, p)), \qquad p \in [0,\, 1],\ x \in X,\ y \in Y. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Пусть $X^{(i)}(y,\, p) = \{x \in X,\, F_x^{(i)}(y,\, p) = 1\}$, $i = 1,\, 2$, причем в силу (1.9), (1.10) $X^{(1)}(y,\, p) \cup X^{(2)}(y,\, p) = X$. Если $X^{(1)}(y,\, p) \neq \varnothing$, то

$$\max(\sup_{x \in X} F_x^{(1)}(y,\, p),\, \inf_{\overline{x} \in X} F_{\overline{x}}^{(1)}(y,\, p)) = 1, \tag{1.11}$$

если же $X^{(1)}(y, p) = \varnothing$, то $F_x^{(2)}(y, p) = 1$, $x \in X$, и, следовательно, равенство (1.11) выполнено, ибо $\inf\limits_{\overline{x} \in X} F_{\overline{x}}^{(2)}(y, p)) = 1$, $p \in [0, 1]$, $y \in Y$.

Пусть в задаче (1.5) задача на минимум разрешима при любом $p \in [0, 1]$, $\min\limits_{y \in Y} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p) \stackrel{\Delta}{=} m^*(p)$ достигается на некотором $y^*(p) \in Y^*(p)$ и существует $p \in [0, 1]$, при котором $m^*(p) < 1$. Тогда в силу леммы 1.1 в (1.5) при этом p $m_*(p) \stackrel{\Delta}{=} \max\limits_{y \in Y} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p) = 1$ и достигается на этом же $y^*(p) \in Y_*(p)$, то есть при этом p разрешима и задача на максимум в (1.5), причем $Y^*(p) \subset Y_*(p)$. А поскольку при любом $y \in Y$ $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p)$ — невозрастающая, а $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p)$ — неубывающая функции $p \in [0, 1]$, то, соответственно, $m^*(p)$ и $m_*(p)$ — невозрастающая и неубывающая функции[4] $p \in [0, 1]$, и, следовательно, задача на максимум в (1.5) разрешима при любом $p > \underline{p}$, где $\underline{p} = \inf\{p \in [0, 1], m^*(p) < 1\}$, и для $p > \underline{p}$ $Y^*(p) \subset Y_*(p)$, $m_*(p) = 1$.

С другой стороны, если для некоторого $p \in [0, 1]$ $\min\limits_{y \in Y} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p) = m^*(p) = 1$ и $\overline{p} = \sup\{p \in [0, 1], m^*(p) = 1\}$, то для $p < \overline{p}$ задача (1.5) сводится к задаче на максимум и, если последняя разрешима при $p < \overline{p}$, то $Y^*(p) \supset Y_*(p)$, $p < \overline{p}$. Поскольку функция $m^*(p)$, $p \in [0, 1]$, монотонно невозрастает, то $\underline{p} = \overline{p} \stackrel{\Delta}{=} \widehat{p}$.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1.1. *Пусть $Y^*(p)$ и $Y_*(p)$ — множества решений задач на минимум и соответственно максимум в (1.5), $m^*(p) = \min\limits_{y \in Y} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p)$, $m_*(p) = \max\limits_{y \in Y} \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p)$, $p \in [0, 1]$. Тогда*

1. *если задача на минимум в (1.5) разрешима при любом $p \in [0, 1]$, то*
   - *если $0 < \inf\{p \in [0, 1], m^*(p) < 1\} = \widehat{p} = \sup\{p \in \in [0, 1], m^*(p) = 1\}$, то*
     для всех $p > \widehat{p} : m^*(p) < 1$, задача на максимум в (1.5) разрешима, $m_*(p) = 1$ и $Y_*(p) \supset Y^*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$;

[4]Например, при $p' > p$ $m_*(p) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y_*(p))}) \leqslant p) \leqslant \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y_*(p))}) \leqslant p') \leqslant \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y_*(p'))}) \leqslant p') = m_*(p')$.

для всех $p < \widehat{p}: m^*(p) = 1$, *задача* (1.5) *сводится к задаче на максимум*, $Y^*(p) \supset Y_*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$;

- *если* $\widehat{p} = 1$, *то*
  при $m^*(1) < 1$ *для* $p = 1$ *задача на максимум разрешима*, $m_*(1) = 1$ *и* $Y_*(1) \supset Y^*(1) = Y_*(1) \cap Y^*(1)$, *а для всех* $p < 1$ $m^*(p) = 1$, *задача* (1.5) *сводится к задаче на максимум и* $Y^*(p) \supset Y_*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$;
  при $m^*(1) = 1$ *для всех* $p \in [0, 1]$ *задача* (1.5) *сводится к задаче на максимум и* $Y^*(p) \supset Y_*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$;
- *если* $\widehat{p} = 0$, *то*
  при $m^*(0) < 1$ *для всех* $p \in [0, 1]$ $m^*(p) < 1$, *задача на максимум в* (1.5) *разрешима*, $m_*(p) = 1$ *и* $Y_*(p) \supset Y^*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$;
  при $m^*(0) = 1$ *задача на максимум разрешима при всех* $p \in (0, 1]$, $m_*(p) = 1$ *и* $Y_*(p) \supset Y^*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$, *а при* $p = 0$ *задача* (1.5) *сводится к задаче на максимум и* $Y^*(p) \supset Y_*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$.

2. *Если задача на максимум в* (1.5) *разрешима при всех* $p \in [0, 1]$, *то*
   - *если* $0 < \inf\{p \in [0, 1], m_*(p) = 1\} = \check{p} = \sup\{p \in \in [0, 1], m_*(p) < 1\}$, *то*
     для всех $p < \check{p}$ $m_*(p) < 1$, *задача на минимум в* (1.5) *разрешима*, $m^*(p) = 1$ *и* $Y^*(p) \supset Y_*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$;
     для всех $p > \check{p}$ $m_*(p) = 1$, *задача* (1.5) *сводится к задаче на минимум.*
   - *если* $\check{p} = 0$, *то при* $m_*(0) < 1$ *для* $p = 0$ *задача на минимум в* (1.5) *разрешима*, $m^*(0) = 1$ *и* $Y^*(p) \supset Y_*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$, *а для* $p > 0$ $m_*(p) = 1$, *задача* (1.5) *сводится к задаче на минимум*;
     при $m_*(0) = 1$ *задача* (1.5) *сводится к задаче на минимум при всех* $p \in [0, 1]$;
   - *если* $\check{p} = 1$, *то при* $m_*(1) < 1$ *задача на минимум в* (1.5) *разрешима при всех* $p \in [0, 1]$, $m^*(p) = 1$, *ибо в этом случае* $m_*(p) < 1$; *при* $m_*(1) = 1$ *задача* (1.5) *при* $p = 1$ *сводится к задаче на минимум, а при* $p \in [0, 1)$ *задача на минимум разрешима*, $m^*(p) = 1$, $Y^*(p) \supset Y_*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$;

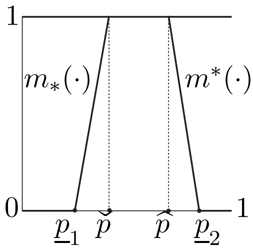

Рис. 9. Графики функций $m^*(\cdot)$ и $m_*(\cdot)$

3. *Если в* (1.5) *обе задачи разрешимы при всех* $p \in [0, 1]$, *то при* $\check{p} > 0$, $\widehat{p} < 1$

$$p > \widehat{p} \Rightarrow m^*(p) < 1 \Rightarrow m_*(p) = 1 \Rightarrow p \geqslant \check{p};$$
$$p < \check{p} \Rightarrow m_*(p) < 1 \Rightarrow m^*(p) = 1 \Rightarrow p \leqslant \widehat{p},$$

следовательно, $\check{p} \leqslant \widehat{p}$, $\max(m_*(p), m^*(p)) = 1$, $p \in [0, 1]$, *причем* $m_*(p) = m^*(p) = 1$, *если* $\check{p} < p < \widehat{p}$, $m^*(p) < 1$, *если* $p > \widehat{p}$, *и* $m_*(p) < 1$, *если* $p < \check{p}$. *При этом* $Y_*(p) \supset Y^*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$ *для* $p > \widehat{p}$, $Y^*(p) \supset Y_*(p) = Y_*(p) \cap Y^*(p)$ *для* $p < \widehat{p}$, *а если* $m^*(\widehat{p}) < 1$, *то* $Y_*(p) \cap Y^*(p) = Y^*(p)$ *для* $p \geqslant \widehat{p}$, *если же* $m^*(p) = 1$, *то* $Y_*(p) \cap Y^*(p) = Y_*(p)$ *для* $p \leqslant \widehat{p}$, *то есть*

$$Y_*(p) \cap Y^*(p) = \begin{cases} Y^*(p) & \textit{для } p > \widehat{p}, \\ Y^*(\widehat{p}) & \textit{если } m^*(\widehat{p}) < 1, \\ Y_*(\widehat{p}) & \textit{если } m^*(\widehat{p}) = 1, \\ Y_*(p) & \textit{для } p < \widehat{p}. \end{cases}$$

Согласно теореме 1.1 и графикам функций $m^*(\cdot)$ и $m_*(\cdot)$, приведенными на рис. 9, для $p \in (\check{p}, \widehat{p})$ *вполне правдоподобно*, что возможность ошибки не меньше и не больше p, то есть равна p, для $p \in (\widehat{p}, \underline{p}_2)$ *сомнительно*, что возможность ошибки не меньше p, причем тем более сомнительно, чем больше p, для $p \in [\underline{p}_2, 1)$ *неправдоподобно*, что возможность ошибки не меньше p, для $p \in (\underline{p}_1, \check{p})$ сомнительно, что возможность ошибки не больше p, причем тем более сомнительно, чем меньше p, наконец, для $p \in [0, \underline{p}_1)$ неправдоподобно, что возможность ошибки не больше p.

Рассмотрим несколько примеров задач оптимального оценивания.

§ 2. Примеры оптимального оценивания

2.1. Оценивание определенного нечеткого элемента

Пусть $\widetilde{\xi}$ — «определенный нечеткий» (ОН) (см. ч. I) элемент, эквивалентный нечеткому элементу ξ,

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = f^{\xi}(x), \\ 0, & \text{если } p \neq f^{\xi}(x), \end{cases} \qquad x \in X,\ p \in [0,\,1], \tag{2.1}$$

— распределение правдоподобия возможностей его значений, где $f^{\xi}(\cdot) : X \to [0,\,1]$ — распределение возможностей значений ξ; $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in$ $\in Y$, — семейство «определенных нечетких» (ОН) множеств (см. ч. I), эквивалентных нечетким множествам семейства $A_{(y)}$, $y \in Y$,

$$\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = f^{A_{(y)}}(x), \\ 0, & \text{если } p \neq f^{A_{(y)}}(x), \end{cases} \qquad x \in X,\ p \in [0,\,1],\ y \in Y, \tag{2.2}$$

— семейство индикаторных функций $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in Y$, где $f^{A_{(y)}}(\cdot) :\ X \to$ $[0,\,1]$ — индикаторная функция нечеткого множества $A_{(y)}$, $y \in Y$, значение $f^{A_{(y)}}(x)$ — возможность покрытия $x \in X$ нечетким множеством $A_{(y)}$, в данном случае — возможность ошибки при оценивании $x \in X$ значением $y \in Y$ [1]. Соответственно, значение $\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)$ — правдоподобие возможности $p \in [0,\,1]$ ошибки при оценивании $x \in X$ элементом $y \in Y$. В данном случае правдоподобие возможности $p \in [0,\,1]$ ошибки при оценивании ОН элемента $\widetilde{\xi}$ значением $y \in Y$

$$\mathrm{Pl}^{(y)}(p) \triangleq \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\ f^{A_{(y)}}(x)), \\ 0, & \text{если } p \neq \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\ f^{A_{(y)}}(x)), \end{cases} \tag{2.3}$$

где

$$\sup_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\ f^{A_{(y)}}(x)) = P(\xi \in A_{(y)}) \triangleq p_{(y)} \tag{2.4}$$

— возможность ошибки при оценивании нечеткого элемента ξ значением $y \in Y$.

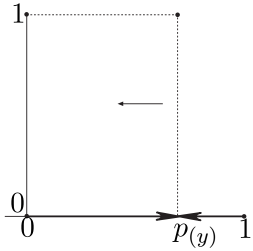

Рис. 10. График функции $\mathrm{Pl}^{(y)}(p)$, $p \in [0, 1]$, (2.3). Стрелками $\to\leftarrow$ выделено единственное значение $p_{(y)} = P(\xi \in A_{(y)})$ возможности ошибки, правдоподобие которого равно единице, правдоподобие любого другого значения возможности ошибки равно нулю. Стрелка $\leftarrow$ указывает направление движения значения $p_{(y)}$ при минимизации правдоподобия большой и максимизации правдоподобия малой возможности ошибки, $y \in Y$.

В рассматриваемом случае минимизация правдоподобия большой возможности ошибки означает минимизацию значения $p_{(y)} = \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\, f^{A_{(y)}}(x))$ (2.4) по $y \in Y$, при котором $\mathrm{Pl}_{(y)}(p) = 1$ (2.3), см. рис. 10. Минимизация определит множество

$$Y^*(p) = \{y \in Y,\, p_{(y)} = \min_{\overline{y} \in Y} p_{(\overline{y})}\} \stackrel{\triangle}{=} Y^*, \tag{2.5}$$

которое в данном случае не зависит от $p \in [0, 1]$. Эти же значения $y \in Y^*$ максимизируют правдоподобие малой возможности ошибки, причем $Y_*(p) \stackrel{\triangle}{=} Y_* = Y^*$.

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \leqslant \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\, f^{A_{(y)}}(x)), \\ 0, & \text{если } p > \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\, f^{A_{(y)}}(x)), \end{cases} \\ &\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \geqslant \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\, f^{A_{(y)}}(x)), \\ 0, & \text{если } p < \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\, f^{A_{(y)}}(x)). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Согласно выражениям (2.6) задача минимизации $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p)$ эквивалентна задаче минимизации максимального значения $\sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\ f^{A_{(y)}}(x))$ возможности $p \in [0,\ 1]$, при котором $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p) = 1$, то есть задаче

$$\sup_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\ f^{A_{(y)}}(x)) \sim \min_{y \in Y}. \tag{2.7}$$

При этом

$$Y^*(p) = \{y \in Y,\ P(\xi \in A_{(y)}) = \min_{\overline{y} \in Y} \sup_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\ f^{A_{(\overline{y})}}(x))\} = Y^*$$

и не зависит от $p \in [0,\ 1]$. Эта же задача (2.7) дает и решение задачи

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p) \sim \max_{y \in Y},$$

эквивалентной задаче минимизации по $y \in Y$ максимального значения

$$\sup_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\ f^{A_{(y)}}(x))$$

возможности $p \in [0,\ 1]$, при котором $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p) = 0$. Поэтому $Y_*(p) = Y_* = Y^*$.

В рассмотренном случае единственное значение возможности

$$p = \widehat{p} = \check{p} = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\ f^{A_{(y)}}(x))$$

ошибки оценивания ОН элемента $\widetilde{\xi}$ значением $y \in Y_* = Y^*$ вполне правдоподобно, а любые другие значения возможности ошибки оценивания, как меньшие, так и бóльшие $\widehat{p} = \check{p}$, неправдоподобны, см. рис. 11.

В данном случае задача оценивания ОН элемента $\widetilde{\xi}$, эквивалентного нечеткому элементу ξ, эквивалентна задаче оценивания нечеткого элемента ξ с минимальной возможностью ошибки [1].

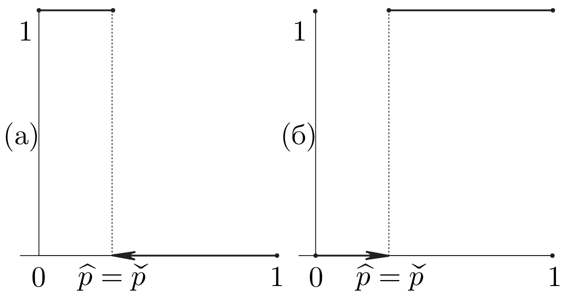

Рис. 11. Графики $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p)$, $p \in [0, 1]$, (а), и $\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p)$, $p \in [0, 1]$, (б), при любом значении $y \in \{y \in Y, P(\xi \in \in A_{(y)}) = \min\limits_{\overline{y} \in Y} \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x), f^{A_{(\overline{y})}}(x))\} = Y_* = Y^*$, минимизирующем возможности ошибки при оценивании нечеткого элемента ξ значением $y \in Y$.

2.2. Оценивание неопределенного нечеткого (НН) элемента

Выберем в качестве семейства $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in Y$, семейство «определенных четких» (ОЧ) множеств (см. ч. I), эквивалентных обычным множествам $A_{(y)}$, $y \in Y = X$, индикаторные функции которых

$$\chi_{A_{(y)}}(x) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \qquad x \in X,\ y \in X. \tag{2.8}$$

Согласно (2.2) в таком случае

$$\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \chi_{A_{(y)}}(x) \\ 0, & \text{если } p \neq \chi_{A_{(y)}}(x) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } \begin{cases} p = 1, & x \neq y, \\ p = 0, & x = y, \end{cases} \\ 0, & \text{если } 0 < p < 1, \end{cases}$$
$$x, y \in X. \tag{2.9}$$

Равенству (2.9) соответствуют

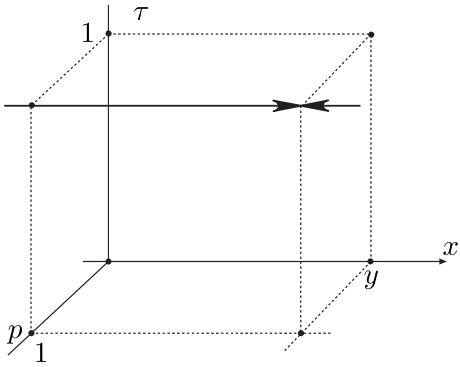

Рис. 12. График функции $\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0, 1]$.

$$\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1,\ x \neq y, \\ 1, & \text{если } p = 0,\ x = y, \\ 0, & \text{если } 0 < p \leqslant 1,\ x = y, \end{cases}$$
$$\tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1,\ x = y, \\ 1, & \text{если } p = 1,\ x \neq y, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\ x \neq y. \end{cases} \tag{2.10}$$

Пусть $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0, 1]$, — распределение правдоподобия возможностей значений НН элемента $\widetilde{\xi}$. Тогда согласно равенствам (2.9)

$$\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\, \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p)) = \begin{cases} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p), & \text{если } \begin{cases} 0 \leqslant p \leqslant 1, & x \neq y, \\ p = 0, & x = y, \end{cases} \\ 0, & \text{если } 0 < p \leqslant 1,\ x = y; \end{cases}$$
$$\max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\, \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \begin{cases} 0 \leqslant p \leqslant 1, & x = y, \\ p = 1, & x \neq y, \end{cases} \\ \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p), & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\ x \neq y; \end{cases}$$
$$x, y \in X,\ p \in [0, 1]. \tag{2.11}$$

Наконец,

$$\sup_{x\in X}\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\, \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p)) = \begin{cases}\sup\limits_{x\in X}\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p), & \text{если } p=0\\ \sup\limits_{x\neq y}\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p), & \text{если } 0<p\leqslant 1\end{cases} =$$

$$= \sup_{x\neq y}\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\ 0\leqslant p\leqslant 1; \tag{2.12}$$

$$\inf_{x\in X}\max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\, \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)) = \begin{cases}1, & \text{если } p=1\\ \inf\limits_{x\neq y}\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p), & \text{если } 0\leqslant p<1\end{cases} =$$

$$= \inf_{x\neq y}\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\ 0\leqslant p\leqslant 1.$$

В рассматриваемом случае задача (1.5) обретает следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\geqslant p) &= \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq y}}\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)\sim\min_{y\in Y},\ p\in[0,\,1];\\ \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\leqslant p) &= \inf_{\substack{x\in X\\ x\neq y}}\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)\sim\max_{y\in Y},\ p\in[0,\,1].\end{aligned} \tag{2.13}$$

Следующая лемма полезна при решении задачи (2.13).

Лемма 2.1. *Пусть задачи на минимум и на максимум в* (2.13) *разрешимы,* $Y^*(p)$ *и* $Y_*(p)$ *— множества их решений, и*

$$\begin{aligned}\widehat{p}(y) &= \inf\{p\in[0,\,1],\ \sup_{x\neq y}\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)<1\} = \sup\{p\in[0,\,1],\ \sup_{x\neq y}\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)=1\},\\ \check{p}(y) &= \inf\{p\in[0,\,1],\ \inf_{x\neq y}\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)=1\} = \sup\{p\in[0,\,1],\ \inf_{x\neq y}\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)<1\}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Тогда для любого $y\in Y$ $\check{p}(y)\leqslant\widehat{p}(y)$, $\check{p}\leqslant\check{p}(y)$, $\widehat{p}\leqslant\widehat{p}(y)$, см. рис. 13.

Доказательство. Неравенства $\check{p}\leqslant\check{p}(y)$, $\widehat{p}\leqslant\widehat{p}(y)$ следуют соответственно из неравенств

$$\sup_{x\neq y^*(p)}\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)\leqslant\sup_{x\neq y}\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\qquad \inf_{x\neq y_*(p)}\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)\geqslant\inf_{x\neq y}\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}*}(p),$$

$$y^*(p)\in Y^*(p),\ y_*(p)\in Y_*(p),$$

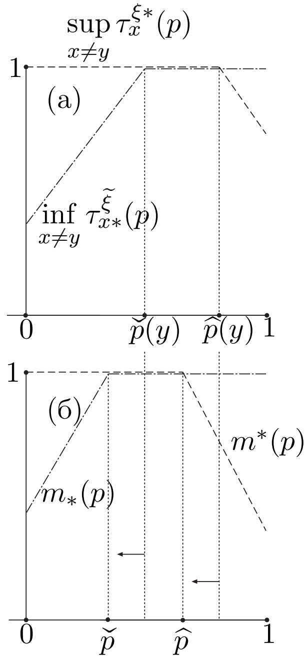

Рис. 13. Графики функций $\inf\limits_{x \neq y} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)$, $\sup\limits_{x \neq y} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)$, $m_*(p)$ и $m^*(p)$, $p \in \in [0, 1]$. Стрелки $\leftarrow$ указывают смещения $\breve{p}(y)$ и $\widehat{p}(y)$ к значениям $\breve{p}$ и $\widehat{p}$ соответственно, определяемым при решении задачи (2.13). Значения возможности $p \in (\breve{p}, \widehat{p})$ ошибки вполне правдоподобны; значения, меньшие $\breve{p}$ и бо́льшие $\widehat{p}$ — сомнительны.

$p \in [0, 1]$. Заметим теперь, что в согласии с леммой 1.1

$$\max(\sup_{x \neq y} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p), \inf_{x \neq y} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)) = \sup_{x \neq y} \inf_{\overline{x} \neq y} \max(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p), \tau_{\overline{x}*}^{\widetilde{\xi}}(p)) = 1, \ p \in [0, 1]. \tag{2.15}$$

Предположим, что $\exists y \in Y$, для которого $\widehat{p}(y) < \breve{p}(y)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0$, для которого $\widehat{p}(y) < \breve{p}(y) - \varepsilon < \breve{p}(y)$, и в силу определения (2.14) $\widehat{p}(y)$ и $\breve{p}(y)$ $\sup\limits_{x \neq y} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(\breve{p}(y) - \varepsilon) < 1$, ибо $\widehat{p}(y) < \breve{p}(y) - \varepsilon$, и $\inf\limits_{x \neq y} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(\breve{p}(y) - \varepsilon) < 1$, ибо $\breve{p}(y) - \varepsilon < \breve{p}(y)$, и, следовательно, вопреки (2.15)

$$\max(\sup_{x \neq y} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(\breve{p}(y) - \varepsilon), \inf_{x \neq y} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}*}(\breve{p}(y) - \varepsilon)) < 1.$$

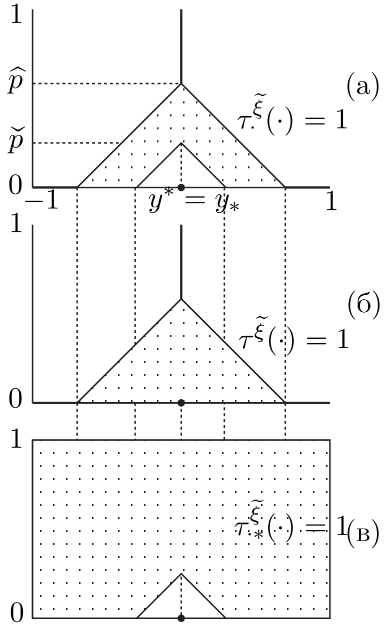

Рис. 14. Распределение $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $(x, p) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ равно единице всюду в заштрихованной области, нулю — в незаштрихованной, (а), аналогично представлены $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)$, $(x, p) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, (б), и $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)$, $(x, p) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, (в); $y^* = y_*$ — оптимальная оценка $\widetilde{\xi}$, см. рис. 15.

Пусть, например, $\widetilde{\xi}$ — НН элемент, принимающий значения на отрезке $[-1, 1] = X = Y$, распределение правдоподобия возможностей значений которого представлено на рис. 14. На рис. 15 проиллюстрировано решение задачи (2.13) для этого случая.

Для наилучшей оценки $y^* = y_*$ НН элемента $\widetilde{\xi}$ вполне правдоподобны лишь значения возможности $p \in [\breve{p}, \widehat{p}]$ ошибки оценивания. Для любой другой оценки y вполне правдоподобны возможности $p \in \in (\breve{p}, 1]$ ошибки, в частности, вполне правдоподобна возможность $p = 1$.

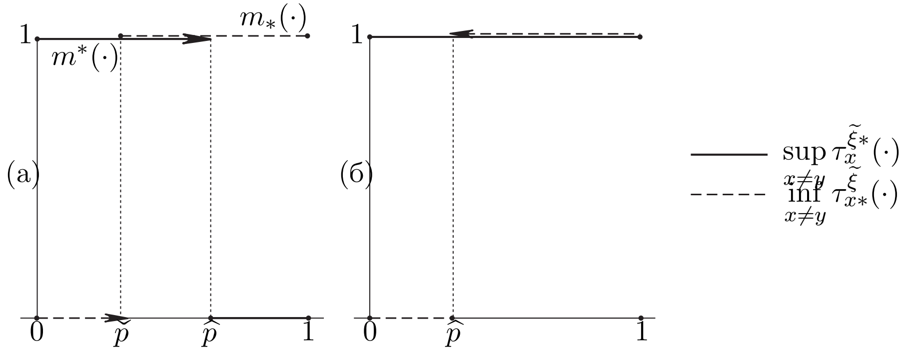

Рис. 15. Графики функций $m^*(p) = \sup\limits_{x\neq y^*} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)$, $p \in [0,\, 1]$, (———), и $m_*(p) = \inf\limits_{x\neq y_*} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)$, $p \in [0,\, 1]$, (– – – –), $y^* = y_*$, (а); графики функций $\sup\limits_{x\neq y} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)$, $p \in [0,\, 1]$, и $\inf\limits_{x\neq y} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)$, $p \in [0,\, 1]$, при $y \neq y^* = y_*$, (б), см. рис. 14. Для наилучшей оценки $y^* = y_*$ НН элемента $\widetilde{\xi}$ вполне правдоподобны лишь значения возможности $p \in [\breve{p},\, \widehat{p}]$ ошибки оценивания. Для любой другой оценки y вполне правдоподобны возможности $p \in (\breve{p},\, 1]$ ошибки, в частности, вполне правдоподобна возможность $p = 1$.

§ 3. Критерий качества оценивания, основанный на правдоподобии необходимости (неизбежности) ошибки

Охарактеризуем качество оценивания значением правдоподобия необходимости ошибки оценивания, а именно значением правдоподобия истинности высказывания, согласно которому n — необходимость (неизбежность) ошибки оценивания НН элемента $\widetilde{\xi}$ значением $y \in Y$:

$$\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = n) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in X \setminus \widetilde{A}_{(y)}) = \vartheta(n)), \quad n \in [0,\, 1],\, y \in Y. \tag{3.1}$$

Здесь и далее $\vartheta(\cdot) : \; [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ — непрерывная, строго монотонно убывающая функция, $\vartheta(0) = 1$, $\vartheta(1) = 0$, $\vartheta(\vartheta(a)) = a$, $a \in [0,\, 1]$, см. части I, II.

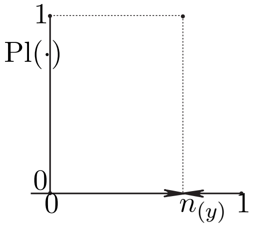

Рис. 16. Стрелками →← отмечено единственное значение $n_{(y)} = N(\xi \in A_{(y)})$ необходимости ошибки оценивания ОН элемента $\widetilde{\xi}$ значением $y \in Y$, правдоподобие которого равно единице, другие значения необходимости ошибки — неправдоподобны.

Пусть $\widetilde{\xi}$ — ОН элемент, эквивалентный нечеткому элементу ξ, распределенный согласно (2.1), $A_{(y)}$, $y \in Y$, — семейство ОН множеств, индикаторные функции которых определены в (2.2). Тогда в рассматриваемом случае согласно равенствам (2.3)

$$\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)})=n) = \begin{cases} 1, \text{ если } \vartheta(n) = \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\, f^{X \setminus A_{(y)}}(x)) \\ 0, \text{ если } \vartheta(n) \neq \sup\limits_{x \in X} \min(f^{\xi}(x),\, f^{X \setminus A_{(y)}}(x)) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, \quad \text{если } n = \inf\limits_{x \in X} \max(\vartheta \circ f^{\xi}(x),\, \vartheta \circ f^{X \setminus A_{(y)}}(x)), \\ 0, \quad \text{если } n \neq \inf\limits_{x \in X} \max(\vartheta \circ f^{\xi}(x),\, \vartheta \circ f^{X \setminus A_{(y)}}(x)), \end{cases}$$

$$n \in [0,\, 1],\ y \in Y, \quad (3.2)$$

где

$$\inf_{x \in X} \max(\vartheta \circ f^{\xi}(x),\, \vartheta \circ f^{X \setminus A_{(y)}}(x)) = N(\xi \in A_{(y)}) \stackrel{\triangle}{=} n_{(y)} \qquad (3.3)$$

— необходимость ошибки оценивания нечеткого элемента ξ значением $y \in Y$, см. рис. 16 [1].

Оптимизация оценивания в данном случае означает минимизацию правдоподобия больших необходимостей и максимизацию правдоподобия малых необходимостей ошибки оценивания, оба требования удовлетворяются путем минимизации $n_{(y)}$ по $y \in Y$:

$$n_{(y)} = \max(\vartheta \circ f^{\xi}(x),\, \vartheta \circ f^{X\setminus A_{(y)}}(x)) \sim \min_{y\in Y}, \tag{3.4}$$

см. рис. 17.

Пусть

$$f^{X\setminus A_{(y)}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f^{A_{(y)}}(x) < 1, \\ 0, & \text{если } f^{A_{(y)}}(x) = 1, \end{cases} \qquad x \in X,$$

множество $X_\xi = \{x \in X,\ f^{\xi}(x) = 1\}$ максимально возможных значений нечеткого элемента ξ не пусто, $X_{(y)} = \{x \in X,\ f^{A_{(y)}}(x) < 1\}$, $y \in Y$, и $Y_0 = \{y \in Y,\ X_\xi \cap X_{(y)} \neq \varnothing\}$. Тогда Y_0 — множество решений задачи (3.4), причем $n_{(y)} = 0$, $y \in Y_0$, поскольку $\vartheta \circ f^{\xi}(x) = 0$, $x \in X_\xi$, и $\vartheta \circ f^{X\setminus A_{(y)}}(x) = 0$, $x \in X_{(y)}$. В этом случае для любой оценки $y \in Y_0$ ОН элемента $\widetilde{\xi}$ вполне правдоподобна необходимость ошибки лишь равная нулю, остальные значения необходимости неправдоподобны.

Этот же результат можно получить, рассматривая задачу

$$\begin{aligned} \mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant n) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in X \setminus \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant \vartheta(n)) \sim \min_{y\in Y}, \\ \mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant n) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in X \setminus \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant \vartheta(n)) \sim \max_{y\in Y}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

которая в детальной записи имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant n) = \\ &\qquad = \begin{cases} 1, & \text{если } n \leqslant \inf\limits_{x\in X} \max(\vartheta \circ f^{\xi}(x),\, \vartheta \circ f^{X\setminus A_{(y)}}(x)) \\ 0, & \text{если } n > \inf\limits_{x\in X} \max(\vartheta \circ f^{\xi}(x),\, \vartheta \circ f^{X\setminus A_{(y)}}(x)) \end{cases} \sim \min_{y\in Y}, \\ &\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant n) = \\ &\qquad = \begin{cases} 1, & \text{если } n \geqslant \inf\limits_{x\in X} \max(\vartheta \circ f^{\xi}(x),\, \vartheta \circ f^{X\setminus A_{(y)}}(x)) \\ 0, & \text{если } n < \inf\limits_{x\in X} \max(\vartheta \circ f^{\xi}(x),\, \vartheta \circ f^{X\setminus A_{(y)}}(x)) \end{cases} \sim \max_{y\in Y}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in Y$, — семейство определенных четких множеств, эквивалентных соответственно обычным множествам $A_{(y)}$, $y \in$

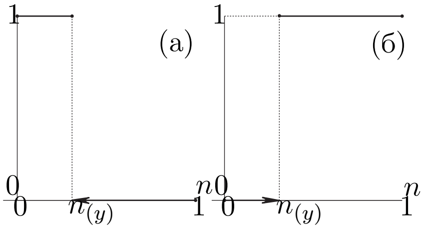

Рис. 17. Графики функций $\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant n)$, $n \in [0, 1]$, (а), и $\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant n)$, $n \in [0, 1]$, (б). При любом $y \in Y_0$ $n_{(y)} = 0$.

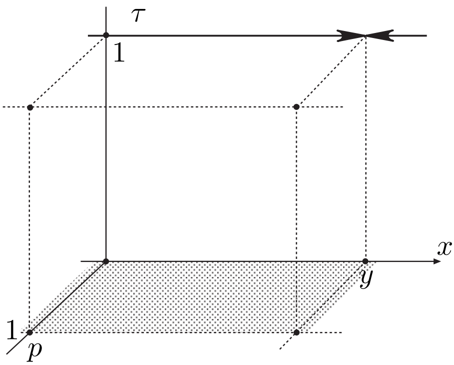

Рис. 18. График функции $\tau_x^{X \setminus \widetilde{A}_{(y)}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0, 1]$, (3.6).

$\in Y$; их индикаторные функции определены равенствами (2.8), согласно которым

$$\tau_x^{X \setminus \widetilde{A}_{(y)}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \chi_{X \setminus A_{(y)}}(x), \\ 0, & \text{если } p \neq \chi_{X \setminus A_{(y)}}(x), \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } \begin{cases} p = 1, & x = y, \\ p = 0, & x \neq y, \quad p \in [0, 1],\ x, y \in X = Y. \end{cases} \\ 0, & \text{если } \quad 0 < p < 1, \end{cases} \tag{3.6}$$

Равенствам (3.6) соответствуют

$$\tau_x^{X\setminus\widetilde{A}_{(y)}*}(p)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant p\leqslant 1,\ x=y,\\ 1, & \text{если } p=0,\ x\neq y,\\ 0, & \text{если } 0<p\leqslant 1,\ x\neq y,\end{cases}\qquad x,\,y\in X,\ p\in[0,\,1],$$

$$\tau_{x*}^{X\setminus\widetilde{A}_{(y)}}(p)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant p\leqslant 1,\ x\neq y,\\ 1, & \text{если } p=1,\ x=y,\\ 0, & \text{если } 0\leqslant p<1,\ x=y,\end{cases}\qquad x,\,y\in X,\ p\in[0,\,1]. \tag{3.7}$$

Если $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $p\in[0,\,1]$, $x\in X$, — распределение оцениваемого НН элемента, то

$$\sup_{x\in X}\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\,\tau_x^{X\setminus\widetilde{A}_{(y)}*}(p))=\begin{cases}\sup\limits_{x\neq y}\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(0)=1, & p=0\\ \tau_y^{\widetilde{\xi}*}(p), & 0<p\leqslant 1\end{cases}=\tau_y^{\widetilde{\xi}*}(p),$$

$$\inf_{x\in X}\max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\,\tau_{x*}^{X\setminus\widetilde{A}_{(y)}}(p))=\tau_{y*}^{\widetilde{\xi}}(p),$$

$$p\in[0,\,1]. \tag{3.8}$$

Поэтому согласно равенствам (1.4), (3.8), получаем следующую задачу:

$$\begin{gathered}\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\geqslant n)=\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in X\setminus\widetilde{A}_{(y)})\leqslant\vartheta(n))=\\ =\tau_{y*}^{\widetilde{\xi}}(\vartheta(n))\sim\min_{y\in Y},\quad n\in[0,\,1],\\ \mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\leqslant n)=\tau_y^{\widetilde{\xi}*}(\vartheta(n))\sim\max_{y\in Y},\quad n\in[0,\,1].\end{gathered} \tag{3.9}$$

Для анализа задачи (3.9) следует несколько дополнить теорему 1.1. Определим функции

$$\begin{gathered}l^*(n)=\min_{y\in Y}\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\leqslant\vartheta(n)),\quad n\in[0,\,1],\\ l_*(n)=\max_{y\in Y}\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}\in\widetilde{A}_{(y)})\geqslant\vartheta(n)),\quad n\in[0,\,1].\end{gathered} \tag{3.10}$$

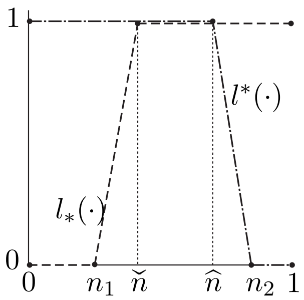

Рис. 19. Графики функций $l_*(n)$, $n \in [0,\,1]$, и $l^*(n)$, $n \in [0,\,1]$.

Ограничимся случаем, когда обе задачи (3.9) разрешимы. Обозначим $Y^*(n)$ множество решений первой задачи (3.9), $Y_*(n)$ — второй, $n \in [0,\,1]$. Проверим, что $l^*(\cdot)$ невозрастает, а $l_*(\cdot)$ неубывает. Действительно, для $n < n'$

$$\begin{gathered}
l^*(n) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y^*(n))}) \leqslant \vartheta(n)) \geqslant \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y^*(n))}) \leqslant \vartheta(n')) \geqslant \\
\geqslant \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y^*(n'))}) \leqslant \vartheta(n')) = l^*(n'), \\
y^*(n) \in Y^*(n),\ y^*(n') \in Y^*(n');
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
l^*(n) = \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y_*(n))}) \geqslant \vartheta(n)) \leqslant \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y_*(n))}) \geqslant \vartheta(n')) \leqslant \\
\leqslant \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y_*(n'))}) \geqslant \vartheta(n')) = l^*(n'), \\
y_*(n) \in Y_*(n),\ y_*(n') \in Y_*(n').
\end{gathered}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
\widehat{n} &= \sup\{n \in [0,\,1],\ l^*(n) = 1\} = \inf\{n \in [0,\,1],\ l^*(n) < 1\}, \\
\check{n} &= \sup\{n \in [0,\,1],\ l_*(n) < 1\} = \inf\{n \in [0,\,1],\ l_*(n) = 1\}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Тогда решения (3.10) задачи (3.9) можно охарактеризовать следующим образом, см. рис. 19.

Для $n < \widehat{n}$ множество $Y_*(n) \cap Y^*(n)$ решений задачи (3.9) совпадает с множеством $Y_*(n)$ решений задачи на максимум в (3.9), для $n > \widehat{n}$ $Y_*(n) \cap Y^*(n) = Y^*(n)$, наконец,

$$Y_*(\widehat{n}) \cap Y^*(\widehat{n}) = \begin{cases} Y^*(\widehat{n}), & \text{если } l^*(\widehat{n}) < 1, \\ Y_*(\widehat{n}), & \text{если } l^*(\widehat{n}) = 1. \end{cases}$$

Следовательно, доказана

Теорема 3.1. *Пусть обе задачи в* (3.9) *разрешимы,* $Y^*(n)$ *и* $Y_*(n)$ *— множества решений задач на минимум и соответственно — на максимум,* $n \in [0,\, 1]$. *Тогда множество* $Y_*(n) \cap Y^*(n)$ *решений задачи* (3.9) *определится следующим образом:*

$$Y_*(n) \cap Y^*(n) = \begin{cases} Y^*(n) & \textit{для } n > \widehat{n}, \\ Y^*(\widehat{n}) & \textit{если } l^*(\widehat{n}) < 1, \\ Y_*(\widehat{n}) & \textit{если } l^*(\widehat{n}) = 1, \\ Y_*(n) & \textit{для } n < \widehat{n}. \end{cases} \qquad (*)$$

Замечание 3.1. Если $\forall x \in X \;\; \tau_x^{\widetilde{\xi}}(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{T}}$ (см. ч. II), то есть если $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\, \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p))$, $p \in [0,\, 1]$, $x \in X$, то в силу равенств $(*)$ теоремы 3.1 для каждого решения $y(n) \in Y_*(n) \cap Y^*(n)$ задачи (3.9)

$$\tau_{y(n)}^{\widetilde{\xi}}(\vartheta(n)) = \mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y(n))}) = n) =$$
$$= \min(\tau_{y(n)}^{\widetilde{\xi}*}(\vartheta(n)),\, \tau_{y(n)*}^{\widetilde{\xi}}(\vartheta(n))) \equiv \min(l^*(n),\, l_*(n)), \quad n \in [0,\, 1].$$

В этом случае решение задачи (3.9) характеризуется распределением правдоподобия необходимостей ошибки, представленным на рис.20, согласно которому вполне правдоподобны значения $n \in (\check{n},\, \widehat{n})$ необходимостей ошибки, сомнительны значения необходимостей $n \in (\underline{n}_1,\, \check{n}) \cup (\widehat{n},\, \underline{n}_2)$, и неправдоподобны значения $n \in [0,\, \underline{n}_1] \cup [\underline{n}_2,\, 1]$.

Пусть, например, оцениваемый НН элемент $\widetilde{\xi}$ имеет распределение правдоподобия возможностей значений, представленное на рис. 21 а. На рис. 21 г,д представлены значения функций $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)$, $(x,\, p) \in X \times [0,\, 1]$, и $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)$, $(x,\, p) \in X \times [0,\, 1]$, согласно которым решение задачи (3.9) охарактеризовано графиками $l^*(n) = \min\limits_{y \in Y} \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(\vartheta(n))$, $n \in [0,\, 1]$, $l_*(n) = \max\limits_{y \in Y} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(\vartheta(n))$, $n \in [0,\, 1]$, представленными на

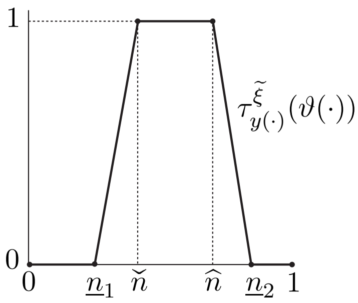

Рис. 20. График распределения $\tau^{\widetilde{\xi}}_{y(n)}(\vartheta(n))$, $n \in [0,\, 1]$.

рис. 22 а,б. Согласно этим графикам вполне правдоподобны любые значения необходимости ошибки оценивания в интервале $[\check{n},\, \widehat{n}) = [0,\, \hat{n})$, неправдоподобны значения необходимости ошибки $\geqslant \widehat{n}$.

§ 4. О критериях оптимальности оценивания, основанных на значениях доверия возможности и доверия необходимости ошибок

Критерий оптимальности оценивания, основанный на значениях доверия возможности ошибки, можно определить условиями

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Bel}^{(}(P)(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) < p) = \vartheta(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p)) \sim \max_{y \in Y},\\
&\mathrm{Bel}^{(}(P)(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) > p) = \vartheta(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p)) \sim \min_{y \in Y},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

эквивалентными задаче

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p) \sim \min_{y \in Y},\\
&\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p) \sim \max_{y \in Y}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Поскольку задача (4.2) совпадает с рассмотренной ранее задачей (1.5), критерий оптимальности, основанный на значениях доверия возможности ошибки, можно специально не рассматривать.

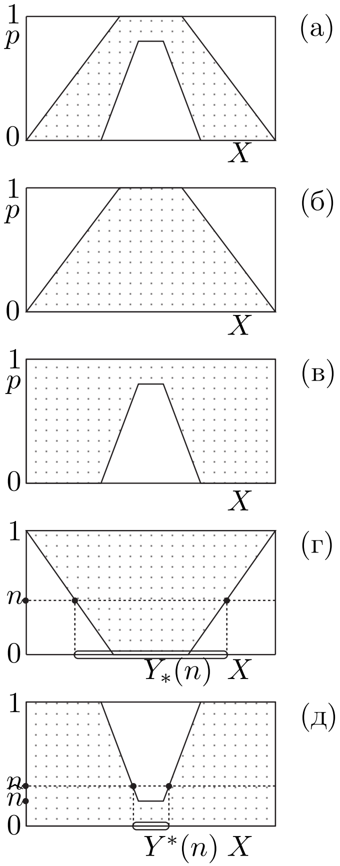

Рис. 21. (а) $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)=1$, $(x,p)\in$(заштрихованная область)$\subset X\times[0,\,1]$; $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)=0$, $(x,p)\in(X\times[0,\,1])\setminus$(заштрихованная область). (б) $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)=1$, $(x,p)\in$(заштрихованная область)$\subset X\times[0,\,1]$; $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)=0$, $(x,p)\in(X\times[0,\,1])\setminus$(заштрихованная область). (в) $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)=1$, $(x,p)\in$(заштрихованная область)$\subset X\times[0,\,1]$; $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p)=0$, $(x,p)\in(X\times[0,\,1])\setminus$(заштрихованная область). (г) $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(\vartheta(n))=1$, $(x,n)\in$(заштрихованная область)$\subset X\times[0,\,1]$; $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(\vartheta(n))=0$, $(x,n)\in(X\times[0,\,1])\setminus$(заштрихованная область). (д) $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(\vartheta(n))=1$, $(x,n)\in$(заштрихованная область)$\subset X\times[0,\,1]$; $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(\vartheta(n))=0$, $(x,n)\in(X\times[0,\,1])\setminus$(заштрихованная область). $Y^*(n)\subset Y_*(n)$, $n>\widehat{n}$; $Y=X$, $Y^*(n)\supset Y_*(n)$, $n<\widehat{n}$.

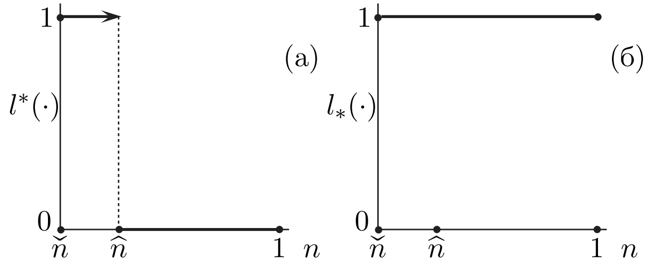

Рис. 22. Графики функций (а) $l^*(n) = \min\limits_{y \in Y} \tau_{y*}^{\widetilde{\xi}}(\vartheta(n))$, $n \in [0, 1]$; (б) $l_*(n) = \max\limits_{y \in Y} \tau_{y}^{\widetilde{\xi}*}(\vartheta(n))$, $n \in [0, 1]$, $Y = X$.

Критерий оптимальности оценивания, основанный на значениях доверия необходимости ошибки, можно определить условиями

$$\begin{aligned} &\mathrm{Bel}^{(}(N)(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) < n) = \vartheta(\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant n)) \sim \max_{y \in Y}, \\ &\mathrm{Bel}^{(}(N)(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) > n) = \vartheta(\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant n)) \sim \min_{y \in Y}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

эквивалентными задаче

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant n) \sim \min_{y \in Y}, \\ &\mathrm{Pl}(N(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant n) \sim \max_{y \in Y}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Поскольку задача (4.4) совпадает с рассмотренной ранее задачей (3.9), этот критерий оптимальности также далее не рассматривается.

Вместе с тем эти критерии позволяют уточнить формулировки решений задач (1.5) и (3.9). Например, решения задач на минимум и на максимум в (4.2), минимизирующие правдоподобие больших и соответственно — максимизирующие правдоподобие малых возможностей ошибок оценивания, в то же время максимизируют доверие малых и минимизируют доверие больших возможностей ошибки в (4.1). Аналогично решения задач в (4.4), минимизирующие и максимизирующие правдоподобия больших и соответственно — малых необходимостей ошибки, максимизируют и соответственно минимизируют доверия малых и больших необходимостей ошибки.

§ 5. Оптимальное оценивание с учетом результатов наблюдений

Полученные ранее результаты позволяют решать задачи оценивания, учитывая наблюдения. При этом, однако, в задаче оценивания НН элемента, понимаемой теперь как задача интерпретации наблюдений, появляется новый момент, обусловленный тем, что истинность модели, используемой исследователем для оценивания, практически никогда нельзя считать абсолютной. Поэтому теперь при решении задачи оценивания НН элемента с учетом данных наблюдений последние должны быть использованы и для анализа адекватности модели оцениваемого НН элемента.

5.1. Критерий адекватности модели измерения и модели оценивания

Рассмотрим в общих чертах проблему адекватности модели НН элемента $\widetilde{\xi}$, заданной распределением $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$ правдоподобия возможностей $p \in [0, 1]$ его значений $x \in X$. Основным требованием к модели НН элемента, значения которого наблюдаемы, является ее достаточная определенность, допускающая экспериментальную проверку. В данном случае одно из требований состоит в том, что для каждого значения $x \in X$ НН элемента $\widetilde{\xi}$ должно существовать *вполне правдоподобное*[5] значение $p \in [0, 1]$ возможности равенства $\widetilde{\xi} = x$, то есть для любого $x \in X$ можно указать $p \in [0, 1]$, для которого $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1$, что эквивалентно условию нормировки $\max\limits_{0 \leqslant p \leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1$, $x \in X$. Поскольку, вообще говоря, $\max\limits_{0 \leqslant p \leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$ не обязательно существует, в общем случае первое условие достаточной определенности модели $\widetilde{\xi}$ формулируется так:

$$\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in [0, 1] : \; \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) \geqslant 1 - \varepsilon, \tag{5.1}$$

[5]Поскольку «0» и «1» — «неподвижные» точки шкалы $\mathcal{L} = ([0, 1], \leqslant, \max, \min)$ значений правдоподобия, смысл которых в любой шкале $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in -$ (см. части I, II), одинаков, подчеркнем «абсолютность» и «категоричность» высказываний, правдоподобие которых равно единице, назвав их вполне правдоподобными, и соответственно — неправдоподобными, если их правдоподобие равно нулю.

или, что то же самое[6],

$$\sup_{0\leqslant p\leqslant 1}\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)=1,\quad x\in X. \tag{5.2}$$

Далее будет показано, что условие (5.2) играет ключевую роль при построении критерия неадекватности модели НН элемента $\widetilde{\xi}$.

Но для построения такого критерия одного условия (5.2) недостаточно. Необходимо еще исключить модели, для которых вполне правдоподобны возможные и одновременно невозможные значения $\widetilde{\xi}$. Иначе говоря, достаточно определенная модель НН элемента $\widetilde{\xi}$ должна удовлетворять еще одному условию:

$$\{x\in X,\ \sup_{0<p\leqslant 1}\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)=1\}\cap\{x\in X,\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0)=1\}=\varnothing. \tag{5.3}$$

Рассмотрим следующие подмножества множества X :

$$X_{(0,\,1]}^{\{1\}}\stackrel{\triangle}{=}\{x\in X,\ \sup_{0<p\leqslant 1}\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)=1\}, \tag{5.4}$$

$$X_{(0,\,1]}^{(0,\,1)}\stackrel{\triangle}{=}\{x\in X,\ 0<\sup_{0<p\leqslant 1}\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)<1\}, \tag{5.5}$$

$$X_{(0,\,1]}^{\{0\}}\stackrel{\triangle}{=}\{x\in X,\ \sup_{0<p\leqslant 1}\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)=0\}. \tag{5.6}$$

Согласно определениям (5.4), (5.5), (5.6)

- $X_{(0,\,1]}^{\{1\}}$ — множество тех $x\in X$, для которых положительная возможность равенства $\widetilde{\xi}=x$ вполне правдоподобна. $X_{(0,\,1]}^{\{1\}}$ назовем множеством вполне правдоподобных возможных значений НН элемента $\widetilde{\xi}$, ибо для любого $x\in X_{(0,\,1]}^{\{1\}}$

$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi}=x)\in(0,\,1])=1 \tag{5.7}$$

[6]Это условие инвариантно относительно группы автоморфизмов шкалы значений правдоподобия возможности (см. ч. II).

- $X_{(0,\,1]}^{(0,\,1)}$ — множество тех $x \in X$, для которых положительная возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ сомнительна. $X_{(0,\,1]}^{(0,\,1)}$ назовем множеством сомнительно возможных значений $\widetilde{\xi}$, ибо для любого $x \in X_{(0,\,1]}^{(0,\,1)}$
$$0 < \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) \in (0,\,1]) < 1 \tag{5.8}$$
- $X_{(0,\,1]}^{\{0\}}$ — множество тех $x \in X$, для которых положительная возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ неправдоподобна. $X_{(0,\,1]}^{\{0\}}$ назовем множеством неправдоподобно возможных значений $\widetilde{\xi}$, ибо для любого $x \in X_{(0,\,1]}^{\{0\}}$
$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) \in (0,\,1]) = 0 \tag{5.9}$$

Заметим, что множества (5.4), (5.5), (5.6) попарно не пересекаются и их объединение
$$X_{(0,\,1]}^{\{1\}} \bigcup X_{(0,\,1]}^{(0,\,1)} \bigcup X_{(0,\,1]}^{\{0\}} = X.$$

Рассмотрим еще множества[7]
$$X_{\{0\}}^{\{1\}} \triangleq \{x \in X,\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) = 1\}, \tag{5.10}$$
$$X_{\{0\}}^{(0,\,1)} \triangleq \{x \in X,\ 0 < \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) < 1\}, \tag{5.11}$$
$$X_{\{0\}}^{\{0\}} \triangleq \{x \in X,\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) = 0\}. \tag{5.12}$$

Согласно определениям (5.10), (5.11), (5.12)

- $X_{\{0\}}^{\{1\}}$ — множество тех $x \in X$, для которых невозможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ вполне правдоподобна. $X_{\{0\}}^{\{1\}}$ назовем множеством вполне правдоподобно невозможных значений $\widetilde{\xi}$, ибо для любого $x \in X_{\{0\}}^{\{1\}}$
$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = 0) = 1 \tag{5.13}$$

[7]Множества (5.4)—(5.6) и (5.10)—(5.12) инвариантны относительно группы автоморфизмов шкалы значений правдоподобия возможности (см. ч. II).

- $X^{(0,1)}_{\{0\}}$ — множество тех $x \in X$, для которых невозможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ сомнительна. $X^{(0,1)}_{\{0\}}$ назовем множеством сомнительно невозможных значений $\widetilde{\xi}$, ибо для любого $x \in X^{(0,1)}_{\{0\}}$
$$0 < \mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = 0) < 1 \tag{5.14}$$
- $X^{\{0\}}_{\{0\}}$ — множество тех $x \in X$, для которых невозможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ неправдоподобна. $X^{\{0\}}_{\{0\}}$ назовем множеством неправдоподобно невозможных значений $\widetilde{\xi}$, ибо для любого $x \in$ $\in X^{\{0\}}_{\{0\}}$
$$\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) = 0) = 0. \tag{5.15}$$

Заметим, что множества (5.10), (5.11), (5.12) попарно не пересекаются и их объединение
$$X^{\{1\}}_{\{0\}} \bigcup X^{(0,1)}_{\{0\}} \bigcup X^{\{0\}}_{\{0\}} = X.$$

Заметим также, что так как
$$\mathrm{Bel}^{(}(P)(\widetilde{\xi} = x) \in Q) = \vartheta(\mathrm{Pl}(P(\widetilde{\xi} = x) \in [0,\, 1]) \setminus Q), \;\; Q \subset [0,\, 1],\; x \in X,$$
где $\vartheta(\cdot):\; [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ — непрерывная строго монотонно убывающая функция, $\vartheta(0) = 1$, $\vartheta(1) = 0$, $\vartheta(\vartheta(a)) = a,\; a \in [0,\, 1]$, то условия (5.13), (5.14) и (5.15) эквивалентны соответственно следующим условиям
$$\mathrm{Bel}^{(}(P)(\widetilde{\xi} = x) \in (0,\, 1]) = 0, \tag{5.13*}$$

$$0 < \mathrm{Bel}^{(}(P)(\widetilde{\xi} = x) \in (0,\, 1]) < 1, \tag{5.14*}$$

$$\mathrm{Bel}^{(}(P)(\widetilde{\xi} = x) \in (0,\, 1]) = 1 \tag{5.15*}$$
(ср. с соответственно с (5.9), (5.8), (5.7)).

Образуем следующие множества:
$$\widehat{X} \triangleq X^{\{1\}}_{(0,1]} \bigcup X^{\{0\}}_{\{0\}} = X^{\{1\}}_{(0,1]}, \tag{5.16}$$
$$\widetilde{X} \triangleq X^{(0,1)}_{(0,1]} \bigcup X^{(0,1)}_{\{0\}}, \tag{5.17}$$
$$\check{X} \triangleq X^{\{0\}}_{(0,1]} \bigcup X^{\{1\}}_{\{0\}} = X^{\{1\}}_{\{0\}}, \tag{5.18}$$
среди которых

- $\widehat{X}$ можно интерпретировать как множество тех $x \in X$, для которых равенство $\widetilde{\xi} = x$ не противоречит модели НН элемента $\widetilde{\xi}$. Заметим, что согласно условию (5.2), если $x' \in X^{\{0\}}_{\{0\}} \triangleq \{x \in X,\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) = 0\}$, то $x' \in X^{\{1\}}_{(0,\,1]} \triangleq \{x \in X,\ \sup\limits_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1\}$; поэтому $X^{\{0\}}_{\{0\}} \subset X^{\{1\}}_{(0,\,1]}$, откуда следует второе равенство в (5.16).
- $\widetilde{X}$ можно интерпретировать как множество тех $x \in X$, для которых как возможность, так и невозможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ сомнительны. Равенство $\widetilde{\xi} = x$ может породить сомнение как в адекватности, так и в неадекватности модели $\widetilde{\xi}$.
- $\check{X}$ можно интерпретировать как множество тех $x \in X$, для которых равенство $\widetilde{\xi} = x$ противоречит модели $\widetilde{\xi} = x$, причем согласно условию (5.2), если $x' \in X^{\{0\}}_{(0,\,1]} = \{x \in X,\ \sup\limits_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 0\}$, то $x' \in X^{\{1\}}_{\{0\}} = \{x \in X,\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) = 1\}$, то есть $X^{\{0\}}_{(0,\,1]} \subset X^{\{1\}}_{\{0\}}$, откуда следует второе равенство в (5.18).

Заметим однако, что в силу условия (5.2), если $x' \in X^{(0,\,1)}_{(0,\,1]}$ (5.5), то $x' \in X^{\{1\}}_{\{0\}}$ (5.10) и, следовательно,

$$X^{(0,\,1)}_{(0,\,1]} \triangleq \check{\widetilde{X}} \subset \check{X} = X^{\{1\}}_{\{0\}}, \tag{5.19}$$

а если $x' \in X^{(0,\,1)}_{\{0\}}$ (5.5), то $x' \in X^{\{1\}}_{(0,\,1]}$ и, следовательно,

$$X^{(0,\,1)}_{\{0\}} \triangleq \widehat{\widetilde{X}} \subset \widehat{X} = X^{\{1\}}_{(0,\,1]}. \tag{5.20}$$

Поэтому множество $\widetilde{X} = \check{\widetilde{X}} \cup \widehat{\widetilde{X}}$ «сомнительных» значений $\widetilde{\xi}$ может быть исключено из схемы проверки адекватности модели НН элемента $\widetilde{\xi}$. Его часть $\check{\widetilde{X}}$ может быть выделена как подмножество значений $\widetilde{\xi}$, противоречащих его модели, но не настолько, чтобы ее отвергать, а часть $\widehat{\widetilde{X}}$ множества $\widetilde{X}$ может быть выделена как подмножество $\widehat{X}$ значений $\widetilde{\xi}$, хотя и не противоречащих его модели, но тем не менее дающих повод сомневаться в ее адекватности.

Заметим, наконец, что множества $\widehat{X} = X^{\{1\}}_{(0,1]}$ и $\check{X} = X^{\{1\}}_{\{0\}}$ в силу условия (5.3) не пересекаются и при этом

$$\widehat{X} \cup \check{X} = X, \tag{5.21}$$

поскольку, с одной стороны, очевидно, $\{x \in X,\ \sup\limits_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1\} \cup \{x \in X,\ \sup\limits_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) < 1\} = X$, а, с другой стороны, $\{x \in X,\ \sup\limits_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) < 1\} \subset \{x \in X,\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) = 1\}$.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 5.1. *Пусть для любого $x \in X$ выполнены следующие условия:*

$$\sup_{0\leqslant p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1; \tag{5.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\textit{если } \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1, \ \textit{то}\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) < 1;\\ &\textit{если } \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) = 1, \ \textit{то} \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) < 1. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Тогда:

$$\widehat{X} = \{x \in X,\ \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1\} \tag{5.16}$$

— множество тех $x' \in X$, для которых равенство $\widetilde{\xi} = x'$ не свидетельствует против адекватности модели НН элемента $\widetilde{\xi}$, хотя и не исключает ее неадекватности, особенно если $x' \in \widehat{\widehat{X}} \triangleq \{x \in X,\ 0 < \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) < 1\}$;

$$\check{X} = \{x \in X,\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) = 1\} \tag{5.18}$$

— множество тех $x' \in X$, для которых равенство $\widetilde{\xi} = x'$ свидетельствует против модели НН элемента $\widetilde{\xi}$, хотя и не исключает ее адекватности, если $x' \in \check{\check{X}} \triangleq \{x \in X,\ 0 < \sup\limits_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) < 1\}$;

Множества $\widehat{X}$ и $\check{X}$ инвариантны относительно группы автоморфизмов шкалы значений правдоподобия возможности и при условиях (5.2), (5.3) $\widehat{X} \cap \check{X} = \varnothing$ и $\widehat{X} \cup \check{X} = X$.

5.2. Схема измерения НН элемента и ее модель

Рассмотрим задачу оценивания, в которой наблюдаем результат $\widetilde{\xi}=x$ измерения НН элемента $\widetilde{\varphi}\in F$, выполненного по схеме

$$\widetilde{\xi}=A\widetilde{\varphi}+\widetilde{\nu}. \tag{5.22}$$

В равенстве (5.22) $A:\ F\to X$ — оператор, моделирующий измерительный прибор, $\widetilde{\nu}$ — НН элемент, моделирующий ошибку измерения, шум. *Модель* $[A,\tau_{\cdot}^{\widetilde{\varphi}}(\cdot),\tau_{\cdot}^{\widetilde{\nu}}(\cdot)]$ *измерения*, выполненного по схеме (5.22), определяется оператором A и распределениями правдоподобия возможностей значений НН шума $\widetilde{\nu}$ $\tau_x^{\widetilde{\nu}}(p)$, $x\in X$, $p\in[0,\,1]$, и НН элемента $\widetilde{\varphi}$ $\tau_f^{\widetilde{\varphi}}(p)$, $f\in F$, $p\in[0,\,1]$, моделирующего измеряемый прибором A НН сигнал $\widetilde{\varphi}$. Согласно равенству (5.22)

$$\tau_{x|f}^{\widetilde{\xi}|\widetilde{\varphi}}(p)=\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}(p),\quad x\in X,\ f\in F,\ p\in[0,\,1], \tag{5.23}$$

— переходное распределение НН элемента $\widetilde{\xi}$ при $\widetilde{\varphi}=f$, значение $\tau_{x|f}^{\widetilde{\xi}|\widetilde{\varphi}}(p)$ — правдоподобие истинности высказывания, согласно которому p — возможность равенства $\widetilde{\xi}=x$, при $\widetilde{\varphi}=f$ (см. ч. I). Поэтому

$$\tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(p)=(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}\wedge\tau_f^{\widetilde{\varphi}})(p),\quad x\in X,\ f\in F,\ p\in[0,\,1], \tag{5.24}$$

— совместное распределение правдоподобия возможностей значений НН элементов $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\varphi}$, и, как следствие,

$$\begin{aligned}\tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}*}(p)&=\min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(p),\,\tau_f^{\widetilde{\varphi}*}(p)),\\ \tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(p)&=\max(\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(p),\,\tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(p)),\end{aligned}\qquad x\in X,\ f\in F,\ p\in[0,\,1]. \tag{5.25}$$

Далее при анализе адекватности модели $[A,\tau_{\cdot}^{\widetilde{\varphi}}(\cdot),\tau_{\cdot}^{\widetilde{\nu}}(\cdot)]$ потребуется распределение

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)=(\vee_{f\in F}(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}\wedge\tau_f^{\widetilde{\varphi}}))(p),\ x\in X,\ p\in[0,\,1], \tag{5.26}$$

правдоподобия возможностей значений результатов измерений (5.22), которое является следствием равенства (5.24) (см. ч. II).

Задача оптимального оценивания НН элемента $\widetilde{\varphi}$ формулируется аналогично задаче (1.4), (1.5):

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in X,\, f\in F}\min(\tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}*}(p),\ \tau_f^{\widetilde{A}_{(y(x))}*}(p))\sim \min_{y(\cdot)\colon X\to F},\\&\inf_{x\in X,\, f\in F}\max(\tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(p),\ \tau_{f*}^{\widetilde{A}_{(y(x))}}(p))\sim \max_{y(\cdot)\colon X\to F}.\end{aligned} \tag{5.27}$$

В задаче (5.27) требуется найти правило $y(\cdot)\,:\ X\to F$ оценивания НН элемента $\widetilde{\varphi}$, минимизирующее правдоподобие больших возможностей и максимизирующее правдоподобие малых возможностей ошибки оценивания значений НН элемента $\widetilde{\varphi}$ значениями НН элемента $y(\widetilde{\xi})$, основанными на модели и результатах измерения $\widetilde{\xi}$ (5.22).

Нетрудно заметить, что решение задачи (5.27) будет найдено, если при каждом фиксированном результате измерения $\widetilde{\xi}=x$ будет решена задача

$$\begin{aligned}&\sup_{f\in F}\min(\tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}*}(p),\ \tau_f^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p))\sim \min_{y\in F},\\&\inf_{f\in F}\max(\tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(p),\ \tau_{f*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p))\sim \max_{y\in F},\end{aligned} \tag{5.28}$$

в которой требуется найти не функцию $y(\cdot)$, а ее значение $y=y(x)$ при каждом $x\in X$, не противоречащем модели схемы измерения (5.22).

Если об измеряемом НН элементе $\widetilde{\varphi}$ априори ничего не известно, то

$$\tau_f^{\widetilde{\varphi}}(p)=\begin{cases}1, & \text{если } p=1,\ f\in F,\\0, & \text{если } 0\leqslant p<1,\ f\in F,\end{cases} \tag{5.29}$$

и при этом в (5.24)

$$\begin{aligned}\tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(p)&=(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}\wedge\tau_f^{\widetilde{\varphi}})(p)\overset{\Delta}{=}\\&\overset{\Delta}{=}\sup\{\min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}(a_1),\tau_f^{\widetilde{\varphi}}(a_2))|a_1,a_2\in[0,\,1],\ \min(a_1,a_2)=p\}=\\&=\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}(p),\ x\in X,\ f\in F,\ p\in[0,\,1],\end{aligned} \tag{5.30}$$

соответственно в (5.26)

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = (\vee_{f\in F}\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}})(p),\ x\in X,\ p\in[0,\,1], \tag{5.31}$$

и

$$\tau_f^{\widetilde{\varphi}*}(p) = 1,\ f\in F,\ p\in[0,\,1];$$
$$\tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(p) = \begin{cases} 1,\ \text{если } p=1, & f\in F,\\ 0,\ \text{если } 0\leqslant p<1, & f\in F,\end{cases} = \tau_f^{\widetilde{\varphi}}(p),\ p\in[0,\,1]. \tag{5.32}$$

В этом случае задача оценивания (5.5) упрощается, ибо

$$\tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}*}(p) = \tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(p),\quad \tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(p) = \tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(p),\quad x\in X,\ f\in F,\ p\in[0,\,1], \tag{5.33}$$

и при определенных требованиях к качеству функции $\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}(p)$, $f\in$ $\in F$, $p\in[0,\,1]$, см. теорему 2.1 из ч. II, в (5.31)

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \min(\sup_{f\in F}\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(p),\ \inf_{f\in F}\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(p)),\ x\in X,\ p\in[0,\,1]. \tag{5.34}$$

Вместо (5.28) теперь речь пойдет о задаче

$$\begin{gathered}\sup_{f\in F}\min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(p),\ \tau_f^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p)) \sim \min_{y\in F},\\ \inf_{f\in F}\max(\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(p),\ \tau_{f*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)) \sim \max_{y\in F}.\end{gathered} \tag{5.35}$$

Для дальнейшего следует детальнее охарактеризовать модель шума $\widetilde{\nu}$ и задать семейство НН множеств $\widetilde{A}_{(y)}$, $y\in F$.

5.3. Пример оптимального оценивания и анализа адекватности

НН модель ошибки $\widetilde{\nu}$ зададим распределением возможностей нечеткого элемента $\nu_u = \widetilde{\nu}|_{\widetilde{u}=u}$ для каждого значения $u\in \mathrm{U}=\mathbb{R}_+$

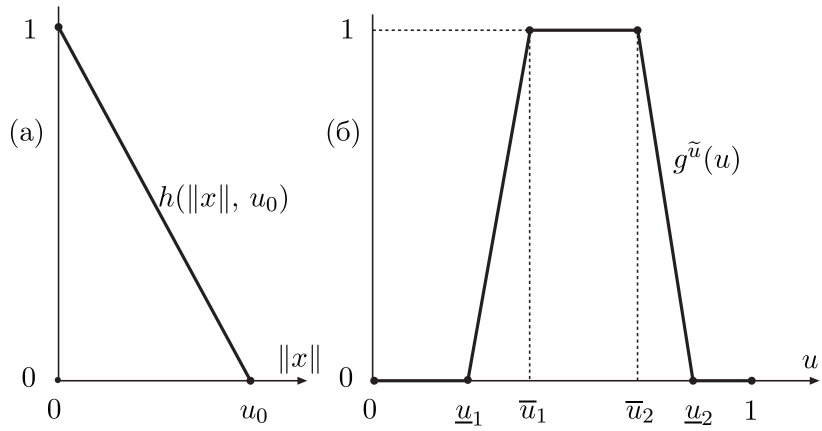

Рис. 23. Графики функций: (а) $h(\|x\|,\,u_0)$, $\|x\| \in \mathbb{R}_+ = [0,\,+\infty)$, $u_0 \in \in U = \mathbb{R}_+$ фиксировано, $h(0,\,u) = 1$, $u \in \mathbb{R}_+$; (б) $g^{\widetilde{u}}(u)$, $u \in \mathbb{R}_+$, $g^{\widetilde{u}}(u) = 1$, если $\overline{u}_1 \leqslant u \leqslant \overline{u}_2$, $g^{\widetilde{u}}(u) = 0$, если $0 \leqslant u \leqslant \underline{u}_1$ или $u \geqslant \underline{u}_2$.

неопределенного элемента $\widetilde{u}$ равенством (см. ч. I)

$$f^{\nu_u}(x) = h(\|x\|,\,u) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\|x\|}{u}, & \text{если } 0 \leqslant \|x\| \leqslant u, \\ 0, & \text{если } \|x\| > u,\ u > 0,\ x \in X = \mathbb{R}_n; \end{cases}$$
$$f^{\nu_0}(0) = h(0,0) \stackrel{\triangle}{=} 1, \tag{5.36}$$

см. рис. 23(а). В (5.36) значение $\widetilde{u} = u$ определяет верхнюю границу возможных значений погрешности $|\nu_u|$ и, тем самым, — распределение возможностей $f^{\widetilde{\nu}}(\cdot)$ (неопределенную функцию). Распределение $g^{\widetilde{u}}(\cdot)$ неопределенного элемента $\widetilde{u}$ представлено на рис.23 б, где $[\overline{u}_1,\,\overline{u}_2]$ — промежуток вполне правдоподобных значений $\widetilde{u}$, значения $\widetilde{u}$, меньшие или равные $\underline{u}_1$ или бóльшие или равные $\underline{u}_2$, — неправдоподобны, а все остальные значения $\widetilde{u}$ в той или иной мере сомнительны.

В таком случае, см. рис. 24(а)

$$\tau_x^{\nu}(p) = \sup\{g^{\widetilde{u}}(u)|\ u \in \mathbb{R}_+,\ h(\|x\|, u) = p\} =$$
$$= \begin{cases} g^{\widetilde{u}}\left(\dfrac{\|x\|}{1-p}\right) > 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\ \underline{u}_1 < \dfrac{\|x\|}{1-p} < \underline{u}_2, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\ \dfrac{\|x\|}{1-p} \leqslant \underline{u}_1 \text{ или } \underline{u}_2 \leqslant \dfrac{\|x\|}{1-p}, \\ 1, & \text{если } p = 1,\ \|x\| = 0, \\ 0, & \text{если } p = 1,\ \|x\| > 0, \end{cases}$$
$$x \in X. \quad (5.37)$$

Согласно равенствам (5.37), принятая модель НН погрешности $\widetilde{\nu}$ удовлетворяет условиям (5.2), (5.3), если и только если $X = \{x \in \in \mathbb{R}_n,\ \|x\| < \underline{u}_2\}$ и $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 \triangleq \overline{u}$. При этом

$$\begin{aligned} &\widehat{X} \triangleq \{x \in X,\ \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\nu}}(p) = 1\} = [0, \overline{u}), \\ &\widehat{\widehat{X}} \triangleq \{x \in X,\ 0 < \tau_x^{\widetilde{\nu}}(0) < 1\} = (\underline{u}_1, \overline{u}), \\ &\check{X} \triangleq \{x \in X,\ \tau_x^{\widetilde{\nu}}(0) = 1\} = \{\overline{u}\}, \\ &\check{\check{X}} \triangleq \{x \in X,\ 0 < \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\nu}}(p) < 1\} = \varnothing \end{aligned} \quad (5.38)$$

Согласно равенствам (5.37)

$$\tau_x^{\widetilde{\nu}*}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \leqslant 1 - \dfrac{\|x\|}{\overline{u}_2}, \\ \tau_x^{\widetilde{\nu}}(p), & \text{если } p > 1 - \dfrac{\|x\|}{\overline{u}_2}, \end{cases}$$
$$\tau_{x*}^{\widetilde{\nu}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \geqslant 1 - \dfrac{\|x\|}{\overline{u}_1}, \\ \tau_x^{\widetilde{\nu}}(p), & \text{если } p < 1 - \dfrac{\|x\|}{\overline{u}_1}, \end{cases} \qquad x \in X,\ p \in [0,\ 1]. \quad (5.39)$$

Заметим, что в рассматриваемом примере согласно равенствам (5.39) $\tau_x^{\widetilde{\nu}}(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{T}}$, $x \in X$, см. §1.4 в ч. II, то есть

$$\tau_x^{\widetilde{\nu}}(p) = \min(\tau_x^{\widetilde{\nu}*}(p),\ \tau_{x*}^{\widetilde{\nu}}(p)), \quad p \in [0,\ 1],\ x \in X. \quad (5.40)$$

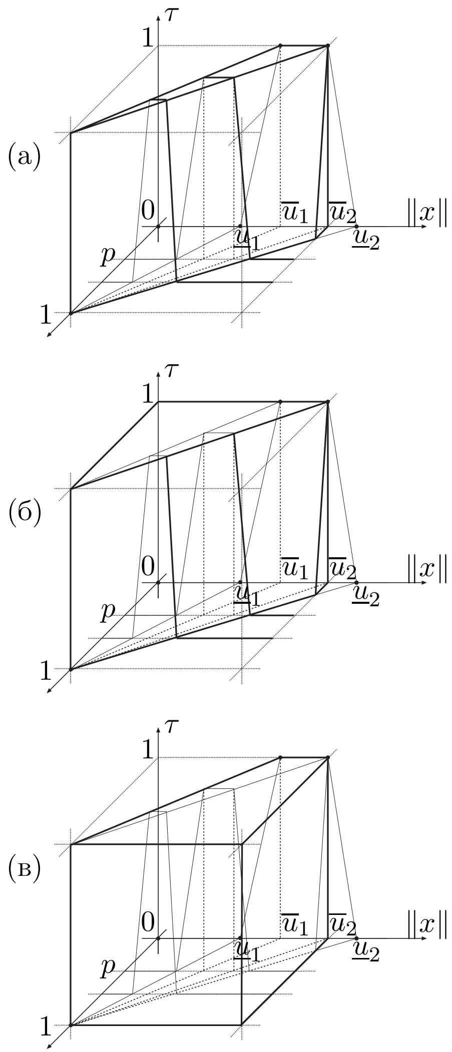

Рис. 24. (а) График функции (поверхность) $\tau_x^{\widetilde{\nu}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0, 1]$. Приведена зависимость от $\|x\| \in [0, \infty)$, $\|x\| \in [0, \overline{u}_2]$ и $p \in [0, 1]$. (б) График функции (поверхность) $\tau_x^{\widetilde{\nu}*}(p)$, $x \in X$, $p \in [0, 1]$. Показаны зависимости от $\|x\| \in [0, \infty)$, $\|x\| \in [0, \overline{u}_2]$ и $p \in [0, 1]$. (в) График функции (поверхность) $\tau_{x*}^{\widetilde{\nu}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0, 1]$. Показаны зависимости от $\|x\| \in [0, \infty)$, $\|x\| \in [0, \overline{u}_2]$ и $p \in [0, 1]$.

На рис.24 приведены графики $\tau_x^{\widetilde{\nu}}(p)$, $\tau_x^{\widetilde{\nu}*}(p)$, и $\tau_{x*}^{\widetilde{\nu}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\, 1]$.

Что касается семейства НН множеств $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in F$, то будем считать его семейством определенных четких множеств, заданных условиями (2.8), (2.9) и (2.10).

Определим качество оценивания значением правдоподобия необходимости ошибки (3.1), что при сделанных предположениях приводит к задаче (см. (3.9))

$$\begin{aligned} &\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(\vartheta(n)) \sim \min_{f \in F}, \\ &\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(\vartheta(n)) \sim \max_{f \in F}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Согласно полученным результатам, см. (5.39), задача (5.41) минимизации правдоподобия больших и максимизации правдоподобия малых значений необходимостей ошибки сводится к задаче на минимум $\|x - Af\| \sim \min\limits_{f \in F}$ для каждого значения $x \in X$ результата измерения НН элемента $\widetilde{\xi}$, полученного по схеме (5.22). Пусть $\widetilde{\xi} = x$ — результат измерения, выполненного по схеме (5.22), и

$$\|z(x)\| = \|x - Af(x)\| = \min_{f \in F} \|x - Af\|, \tag{5.42}$$

где $f(x)$ — какое-либо решение задачи (5.42)[8], определяющее искомую оценку $\widetilde{\varphi} = f(\widetilde{\xi})$ НН элемента $\widetilde{\varphi}$, равную $f(x)$ при $\widetilde{\xi} = x \in X$.

Поскольку в рассматриваемом случае условия, обеспечивающие равенство (5.34), выполнены, то в силу (5.40)

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \min(\tau_{x-Af(x)}^{\widetilde{\nu}*}(p),\, \tau_{x-Af(x)*}^{\widetilde{\nu}}(p)) = \tau_{x-Af(x)}^{\widetilde{\nu}}(p),$$

и, следовательно, согласно равенствам (5.29),(5.38),(5.42) результат измерения $\widetilde{\xi} = x$

- не противоречит модели $[A, \tau_{\cdot}^{\widetilde{\varphi}}(\cdot), \tau_{\cdot}^{\widetilde{\nu}}(\cdot)]$, если $\|z(x)\| \in \widehat{X} = [0, \overline{u})$, но если при этом $\|z(x)\| \in \widehat{\widehat{X}} = (\underline{u}_1, \overline{u})$, то адекватность модели может быть подвергнута сомнению;

[8] Если $A: \ F = \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n = X$ — линейный оператор, $n \geqslant m = \operatorname{rank} A$, то $f(x) = A^- x$ — единственное решение задачи (5.42), где A^- — линейный оператор, псевдообратный к A, $A^- = (A^*A)^{-1}A^*$, [9].

- противоречит модели $[A, \tau_{\cdot}^{\widetilde{\varphi}}(\cdot), \tau_{\cdot}^{\widetilde{\nu}}(\cdot)]$, если $\|z(x)\| \in \check{X} = \{\overline{u}\}$ и при этом сомнений в неадекватности модели быть не может, поскольку $\check{\check{X}} = \varnothing$.

В заключение мне приятно выразить признательность Г. Животникову, О. Фаломкиной, О. Мондрус и Е. Шалашникову, принимавшим деятельное участие в обсуждениях понятий неопределенной нечеткой математики, элементы которой представлены в этой работе, и помогавшим оформить рукопись.

Часть Список литературы

[1] Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[2] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь.

[3] Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. **8**. P. 235–350.

[4] Zadeh L.A. Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1978. N 1. P. 3–28.

[5] Shafer G. A mathematical theory of evidence. Princeton N. J.: Princeton University Press, 1976.

[6] Pytyev Yu.P. Uncertain Fuzzy Sets. Theory and Applications // Pattern Recognition and Image Analysis. 1995. **5**. N 1. P. 13–34.

[7] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

[8] Sugeno M. Fuzzy measure and fuzzy integrals. Trans. S.I.C.E. 1972. 8. N 2.

[9] Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высшая школа, 1989.