

Простое доказательство обходимости плоских лабиринтов коллективом автоматов*

Е.Г. Сыркина

В работе приводится простое доказательство обходимости семейства всех конечных плоских шахматных лабиринтов конечным коллективом автоматов. Известные доказательства существенно сложнее приводимого.

Введение

Задача обхода лабиринтов автоматами восходит к К. Шеннону [1]. Л. Будахом и А.С. Подколзиным установлено, что один автомат не может обойти семейство всех плоских лабиринтов [2, 4]. В то же время, М. Блюм и Д. Козен установили, что коллектив автоматов уже в состоянии решить эту задачу. Однако имеющиеся на сегодня обоснования этого факта выглядят громоздко [3]. Целью этой работы является предложение простого доказательства указанного факта. Рассматривается коллектив из одного автомата и шести камней и конструктивно показывается, что он обходит любой заданный конечный плоский шахматный лабиринт. Подробнее о достижениях и проблемах, связанных с поведением систем автоматов в лабиринтах, можно найти в работе [5].

Автор выражает благодарность В.Б. Кудрявцеву за постановку задачи и научное руководство, а также А.В. Галатенко за помощь в работе.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 02-01-00162а.

1. Основные понятия и результаты

Элементы целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 будем называть *полями*. Обозначим

$$\vec{0} = (0, 0), \quad e = (1, 0), \quad s = (0, -1), \quad w = (-1, 0), \quad n = (0, 1),$$

$$\theta = \{a \in \mathbb{Z}^2 \mid \|a\| \leq 1\} = \{\vec{0}, e, s, w, n\},$$

$$\theta' = \{a \in \mathbb{Z}^2 \mid \|a\| < 2\} = \{\vec{0}, e, s, w, n, e + s, e + n, w + s, w + n\}.$$

Для произвольного множества $M \subseteq \mathbb{Z}^2$, содержащего нулевой элемент $\vec{0}$, через $\mathcal{P}_0(M)$ обозначим множество всех его подмножеств, содержащих нулевой элемент.

Поля a и b из \mathbb{Z}^2 называются *соседними* (*слабо соседними*), если $\|a - b\| = 1$ ($0 < \|a - b\| < 2$).

Говорят, что поля $a = p_0, p_1, \dots, p_m = b$ при $m \geq 1$ образуют *цепь* (*слабую цепь*), связывающую a и b , если p_{i-1} и p_i соседние (слабо соседние) для $\forall i = 1, \dots, m$. Множество $V \subseteq \mathbb{Z}^2$ называется *связным* (*слабо связным*), если для $\forall a, b \in V$ существует связывающая их цепь (слабая цепь) или $a = b$.

Граф (неориентированный) $G = (P_G, X_G)$, в котором P_G — множество всех его вершин, X_G — множество всех его ребер, будем называть *плоским шахматным лабиринтом*, если $P_G \subseteq \mathbb{Z}^2$ является конечным связным множеством и любые две его вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они соседние.

Дырой лабиринта G называется произвольная компонента слабой связности множества $\mathbb{Z}^2 \setminus P_G$. Ограниченные дыры будем называть внутренними, а неограниченную дыру — внешней (в конечном лабиринте она одна).

Граница дыры V лабиринта — это множество полей из P_G , слабо соседних хотя бы с одним полем из V . Обозначение: $\partial_G V = \partial V$.

Пешкой будем называть любой инициальный конечный автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi_{\mathfrak{A}}, \psi_{\mathfrak{A}}, q_0)$ такой, что $A = \mathcal{P}_0(\theta)$ — входной алфавит, Q — множество состояний, $B = \theta$ — выходной алфавит, $\varphi_{\mathfrak{A}} : A \times Q \rightarrow Q$ — функция переходов состояния, $\psi_{\mathfrak{A}} : A \times Q \rightarrow B$ — функция выходов.

Предположим, пешка \mathfrak{A} находится на поле z лабиринта G , то есть $z \in P_G$. Тогда в качестве входной буквы эта пешка \mathfrak{A} получает множество всех векторов $\omega \in \theta$, переместившись на которые из поля z , она снова окажется в лабиринте G , то есть $z + \omega \in P_G$. Таким образом, всякий раз, когда пешка находится на поле $z \in P_G$, она получает на вход множество $\{\omega \in \theta \mid z + \omega \in P_G\}$, обозначаемое далее $\theta_G(z)$. Выходной алфавит $B = \theta$ интерпретируется как множество всех векторов возможных перемещений из \mathbb{Z}^2 . Иногда в качестве A берут $P_0(\theta')$, расширяя тем самым обзор пешки до θ' .

Пешка называется *регулярной*, если для $\forall a \in A$ и $\forall q \in Q$ имеет место $\psi_{\mathfrak{A}}(a, q) \in a$. Регулярность пешки означает, что она, будучи помещенной на любое поле произвольного лабиринта, не выходит за его пределы. Далее будем рассматривать только регулярные пешки.

Поведением пешки \mathfrak{A} в лабиринте G с началом в $p_0 \in P_G$ называется последовательность четвёрок $(z_t, a_t, q_t, b_t)_{t=0}^{\infty}$, определяемая индукцией по $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} z_0 &= p_0, & a_t &= \theta_G(z_t), & q_{t+1} &= \varphi_{\mathfrak{A}}(q_t, a_t), \\ b_t &= \psi_{\mathfrak{A}}(q_t, a_t), & z_{t+1} &= z_t + b_t. \end{aligned}$$

Если множество полей $\bigcup_{t=0}^{\infty} \{z_t\}$, где побывала пешка \mathfrak{A} , стартуя с поля p_0 , совпадает с P_G , то говорят, что \mathfrak{A} *обходит лабиринт G с началом в p_0* . Пешка *слабо обходит* лабиринт, если она обходит его хотя бы с одним началом, и *сильно обходит*, если она обходит его с любым началом из P_G . Возможность остановки пешки означает существование такого n , что $(z_n, q_n, a_n, b_n) = (z_{n+k}, q_{n+k}, a_{n+k}, b_{n+k})$ для $\forall k \in \mathbb{N}$. В этом случае q_n называем конечным состоянием.

В лабиринте можно также рассмотреть систему взаимодействующих пешек $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$ (частный случай коллектива автоматов). Каждой пешке \mathfrak{A}_i на вход, кроме множества всех векторов перемещений из θ , которые она может сделать, не покидая лабиринта, подаётся ещё и информация о наличии на полях, куда она может попасть, делая эти перемещения, других пешек системы \mathcal{A} и их состояниях. Дадим точное определение. Пусть $I = \{1, \dots, n\}$. Тогда *системой взаимодействующих пешек* будем называть любую систему пешек $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n) = (\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ такую, что каждая i -тая пешка ($i \in I$) имеет вид $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i, q_0^i)$, где $B_i = \theta$ — выходной

алфавит пешки \mathfrak{A}_i , A_i — входной алфавит пешки \mathfrak{A}_i , состоящий, по определению, из всех упорядоченных пар (Ω, F) , удовлетворяющих следующим трём условиям:

$$1) \vec{0} \in \Omega \subseteq \theta,$$

$$2) F \subseteq \{(j, \omega, q) \mid j \in I \setminus \{i\}, \omega \in \Omega, q \in Q_j\} = \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} (\{j\} \times \Omega \times Q_j),$$

3) для $\forall j, \omega', q', \omega'', q''$ из того, что (j, ω', q') и $(j, \omega'', q'') \in F$ следует, что $\omega' = \omega''$ и $q' = q''$.

Регулярность пешки \mathfrak{A}_i из системы \mathcal{A} определяется условием: для $\forall (\Omega, F) \in A_i$ и $\forall q \in Q_i$ имеет место $\psi_i((\Omega, F), q) \in \Omega$.

Поведением системы \mathcal{A} в лабиринте G с началом в $p_0 \in P_G$ называется последовательность $((z_t^1, \dots, z_t^n), (a_t^1, \dots, a_t^n), (q_t^1, \dots, q_t^n), (b_t^1, \dots, b_t^n))_{t=0}^\infty$, определяемая индукцией по $t \geq 0$. Для всех $i \in I$ полагаем:

$$z_0^i = p_0,$$

$$a_t^i = (\theta_G(z_t^i), \{(j, z_t^j - z_t^i, q_t^j) \mid j \in I \setminus \{i\}, z_t^j - z_t^i \in \theta_G(z_t^i)\}) = \\ = (\theta_G(z_t^i), \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} (\{j\} \times (z_t^j - z_t^i) \cap \theta_G(z_t^i)) \times \{q_t^j\}),$$

$$q_{t+1}^i = \varphi_i(a_t^i, q_t^i), \quad b_t^i = \psi_i(a_t^i, q_t^i), \quad z_{t+1}^i = z_t^i + b_t^i.$$

Если $\bigcup_{t=0}^\infty (\bigcup_{i \in I} \{z_t^i\}) = P_G$, то говорят, что *система \mathcal{A} обходит лабиринт G с началом в p_0* ; если последнее имеет место для любого $p_0 \in P_G$, то система \mathcal{A} *сильно обходит G* .

Пусть в J есть непустое подмножество множества номеров I , такое что $J \neq I$. Подсистему $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$ системы взаимодействующих пешек $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ будем называть *камнями в системе $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$* , если для любого номера j из J выполняются следующие условия:

1) $Q_j = \{q_0^j\}$, то есть \mathfrak{A}_j имеет только одно состояние;

2) для $\forall (\Omega, F) \in A_j$ из условия $\psi_j((\Omega, F), q_0^j) \neq \vec{0}$ следует, что $\exists i \in I \setminus J$ и $\exists q \in Q_i$, такое что $(i, \vec{0}, q) \in F$ и $\psi_j((\Omega, F), q_0^j) = \psi_i((\Omega, (F \setminus \{(i, \vec{0}, q)\}) \cup \{(j, \vec{0}, q_0^j)\}), q)$. Это означает, что пешка \mathfrak{A}_j может передвигаться (в ненулевом направлении), только если с ней на одном поле находится ещё одна пешка \mathfrak{A}_i (не из подсистемы $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$), причём \mathfrak{A}_j может переместиться только на то же поле, что и \mathfrak{A}_i .

Для пешек, которые не являются камнями, камни играют роль ограниченной внешней памяти.

Теорема 1. *Существует коллектив, состоящий из одной пешки и шести камней (коллектив типа (1,6)), который сильно обходит (то есть обходит, стартуя с любого поля) произвольный плоский шахматный лабиринт и останавливается после обхода.*

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. [3] *Существует пешка \mathfrak{A}^+ (соответственно, \mathfrak{A}^-) с 4 состояниями, которая, находясь на границе ∂V дыры V лабиринта G , последовательно обходит все поля ∂V в направлении против часовой стрелки (соответственно, по часовой стрелке), то есть поля лабиринта при обходе остаются справа (соответственно, слева).*

Доказательство. Для определённости рассмотрим случай \mathfrak{A}^+ .

Пусть $Q = \{q_e, q_s, q_w, q_n\}$, и состояние у \mathfrak{A}^+ меняется так: если пешка сделала шаг в направлении ω , то она переходит в состояние q_ω .

Обозначим через π циклическую перестановку (e, s, w, n) , через $-\omega$ — направление, противоположенное ω . Пусть пешка находится в состоянии q_ω , d_0 — минимальное из всех натуральных d , таких что в направлении $\pi^d(-\omega)$ находится поле из P_G . Тогда пешка идёт в направлении $\pi^{d_0}(-\omega)$ и переходит в состояние $q_{\pi^{d_0}(-\omega)}$. Осталось выбрать начальное состояние q_0 .

Предположим, в начальный момент времени пешка находится на поле $a \in \partial V$. Если в направлении $\omega \in \theta, \omega \neq \vec{0}$ находится поле из V ($a + \omega \in V$), то за q_0 можно взять $q_{\pi(\omega)}$. Если среди полей соседних с a нет полей из V , но есть поле из V , слабо соседнее с a ($a + \omega + \pi(\omega) \in V$), то обзора θ недостаточно для определения q_0 , и его расширяют до θ' , что в нашем случае не достижимо, и тогда полагаем $q_0 = q_{-\omega}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Существует коллектив типа (1,6), такой что если он оказался на границе ∂V какой-либо дыры V лабиринта G , и в направлении n оказалось поле из V , то этот коллектив распознаёт (то есть находит и останавливается) ближайшее сверху (не строго) поле на ∂V , находящееся на той же вертикали.*

Доказательство. Обозначим через p_0 поле на ∂V , на котором в начальный момент времени находится коллектив пешек $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_6)$, где $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_6$ — камни в коллективе; через $l_\omega(z, z')$ — число шагов, сделанных пешкой \mathfrak{A}^+ в направлении ω при однократном прохождении части границы ∂V от $z \in \partial V$ до $z' \in \partial V$. Фиксируем на поле p_0 камень \mathfrak{B}_1 .

Нам надо найти поле z^* на ∂V , такое что $l_w(p_0, z^*) - l_e(p_0, z^*) = 0$, $0 \leq l_n(p_0, z^*) - l_s(p_0, z^*) \leq l_n(p_0, z) - l_s(p_0, z)$ для $\forall z \in \partial V$.

Через z_i обозначим поле, на котором в каждый данный момент времени находится камень \mathfrak{B}_i . Положим z' в начальный момент времени равным p_0 .

Шаг 1. С помощью трех камней пешка может распознать ближайшее по ходу \mathfrak{A}^+ поле $z'' \in \partial V$ на одной вертикали с исходным полем $z' \in \partial V$ ($l_w(z', z'') - l_e(z', z'') = 0$):

- (1) Оставляем камни \mathfrak{B}_2 и \mathfrak{B}_3 на поле z' .
- (2) \mathfrak{A} и \mathfrak{B}_4 движутся как \mathfrak{A}^+ до первого шага в направлении e или w , делают этот шаг, \mathfrak{A} запоминает направление (обозначим его ω), \mathfrak{B}_4 остается.
- (3) \mathfrak{A} идёт как \mathfrak{A}^- до \mathfrak{B}_3 и передвигает его на 1 шаг по ходу \mathfrak{A}^- , если $\omega = w$, и по ходу \mathfrak{A}^+ , если $\omega = e$.
- (4) \mathfrak{A} движется как \mathfrak{A}^+ до первой встречи с \mathfrak{B}_4 .

Затем повторяем (2), (3), (4) до тех пор, пока после действия (3) \mathfrak{B}_3 снова не окажется на одном поле с \mathfrak{B}_2 . В этот момент $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ находятся на поле z' , а \mathfrak{B}_4 на искомом поле z'' . Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Аналогично вычисляется разность $l_n(p_0, z'') - l_s(p_0, z'')$ при прохождении от поля с \mathfrak{B}_1 до поля с \mathfrak{B}_4 (используя \mathfrak{B}_2 и \mathfrak{B}_3):

- (1) Оставляем камень \mathfrak{B}_2 на поле p_0 .
- (2) \mathfrak{A} и \mathfrak{B}_3 движутся как \mathfrak{A}^+ до первого шага в направлении n или s , делают этот шаг (\mathfrak{A} запоминает направление - ω), \mathfrak{B}_3 остается.
- (3) \mathfrak{A} идёт как \mathfrak{A}^- до \mathfrak{B}_2 , далее \mathfrak{B}_2 передвигается на 1 шаг по ходу \mathfrak{A}^- , если $\omega = s$ и по ходу \mathfrak{A}^+ , если $\omega = n$.
- (4) \mathfrak{A} движется как \mathfrak{A}^+ до \mathfrak{B}_3 .

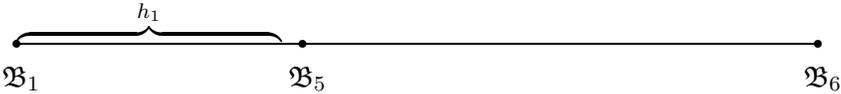
Затем повторяем (2), (3), (4) до тех пор, пока после действия (1) \mathfrak{B}_3 не окажется на одном поле с \mathfrak{B}_4 .

У \mathfrak{A} можно ввести дополнительное состояние $q_{\text{sgn}}(z) = \text{sgn}(l_n(p_0, z) - l_s(p_0, z))$ (меняется при переходе \mathfrak{B}_2 через \mathfrak{B}_1 ; в на-

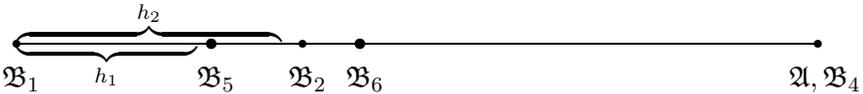
чальный момент времени $q_{\text{sgn}} = 0$; после первого шага $g_{\text{sgn}} = +1$, если $\omega = n$, и $q_{\text{sgn}} = -1$, если $\omega = s$). Тогда в зависимости от значения $q_{\text{sgn}}(z'')$ после шага 2 возможны 3 случая:

1) Если $q_{\text{sgn}}(z'') = -1$, то поле z'' ниже p_0 и \mathfrak{A} забирает \mathfrak{B}_2 и идёт на z'' . После этого переходим к шагу 1 (в качестве z' берём z''). Таким образом находим следующее ближайшее против часовой стрелки поле на данной вертикали.

2) Если $q_{\text{sgn}}(z'') = +1$, то поле z'' выше поля p_0 . Предположим, это первое поле по ходу \mathfrak{A}^+ , которое выше p_0 . В этом случае камни $\mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ заменяются, соответственно, на $\mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_6$, которые фиксируются.



После этого переходим к шагу 1 (в качестве z' берём z''). Если это не первое поле по ходу \mathfrak{A}^+ , которое выше p_0 , то камнями \mathfrak{B}_6 и \mathfrak{B}_5 уже помечены некоторые поля (см. рис.). Обозначим $l_n(p_0, z_6) - l_s(p_0, z_6)$ через h_1 , а $l_n(p_0, z_4) - l_s(p_0, z_4)$ через h_2 .



Тогда \mathfrak{A} сравнивает h_1 и h_2 , двигаясь от z_4 до первой встречи с \mathfrak{B}_2 или с \mathfrak{B}_5 . Если раньше произошла встреча с \mathfrak{B}_5 (то есть $h_2 < h_1$), то \mathfrak{B}_2 и \mathfrak{B}_4 заменяются на \mathfrak{B}_5 и \mathfrak{B}_6 . Затем $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ продолжают искать поле с минимальной высотой над уровнем p_0 . Поиск продолжается до тех пор, пока q_{sgn} не станет равным нулю.

3) Если $q_{\text{sgn}}(z'') = 0$, то \mathfrak{A} обошел полный оборот вокруг дыры V и снова оказался на поле p_0 , помеченном \mathfrak{B}_1 . В этот момент искомое поле помечено камнем \mathfrak{B}_6 . Лемма 2 доказана.

Замечание. Очевидно, что описанная система может распознать отсутствие полей лабиринта выше данного на той же вертикали ($q_{\text{sgn}}(z) \neq +1$ для $\forall z \in \partial V$ на данной вертикали).

Лемма 3. *Существует коллектив типа (1,6), который обходит любой лабиринт, начиная с самого нижнего среди самых левых его полей и останавливается после обхода.*

Доказательство. Пусть дан произвольный лабиринт, и коллектив находится на самом нижнем среди самых левых его полей в начальном состоянии.

Шаг 1. С самого нижнего поля вертикали коллектив движется в направлении n , пока это возможно, то есть пока в направлении n не встретит поле из $\mathbb{Z}^2 \setminus P_G$. Пусть впервые это случится на границе дыры V . Тогда, применив лемму 2, перейдём на ближайшее сверху поле на той же вертикали (отличное от данного). С этого поля идём так же, как в начальный момент времени. И так далее, пока это возможно (см. замечание). Таким образом, мы обошли все поля данной вертикали.

Шаг 2. Пусть весь коллектив находится на поле z (оно принадлежит границе внешней дыры). \mathfrak{A} с помощью трех камней может вычислить первое по ходу \mathfrak{A}^+ поле z' границы внешней дыры на ближайшей справа вертикали ($l_e(z, z') - l_w(z, z') = 1$) и перейти туда. Таким образом весь коллектив окажется на ближайшей справа вертикали.

Шаг 3. Аналогично шагу 1 спустимся до самого нижнего поля вертикали.

Шаг 4. Повторяем последовательно шаги 1, 2, 3.

В некоторый момент мы не сможем выполнить действия шага 2, так как $l_e(z, z') - l_w(z, z')$ будет ≤ 0 для $\forall z'$ с границы внешней дыры, то есть правее данной вертикали нет полей лабиринта. В этот момент лабиринт обойдён. Лемма 3 доказана.

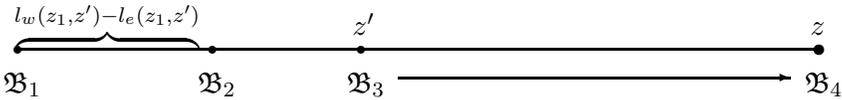
Лемма 4. *Существует коллектив типа (1,6), который, начиная с любого поля произвольного лабиринта, приходит в самое нижнее среди самых левых его полей и останавливается.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный лабиринт.

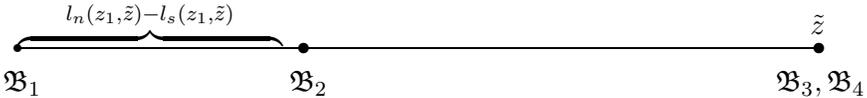
Шаг 1. С любого поля лабиринта пешка с шестью камнями может распознать самое левое поле данной горизонтали (доказательство аналогично предыдущим леммам). Помечаем его камнем \mathfrak{B}_1 .

Шаг 2. Начинаем с этого поля (оно принадлежит границе внешней дыры) двигаться вдоль границы по ходу \mathfrak{A}^- , разыскивая ближайшее поле \tilde{z} , которое строго левее. Это можно сделать с помощью пешки и трех камней (не считая \mathfrak{B}_1).

Для каждого поля z , принадлежащего границе внешней дыры, они вычисляют $l_w(z_1, z) - l_e(z_1, z)$ (поле z каждый раз помечаем камнем \mathfrak{B}_4):



Если для некоторого поля $z = \tilde{z}$ эта разность положительная (то есть поле \tilde{z} левее исходного),



то весь коллектив переходит туда (поле помечено камнем \mathfrak{B}_4) и шаг 2 выполняется с начала. Если разность отрицательная или равна нулю, то \mathfrak{A} перемещает \mathfrak{B}_4 на 1 шаг по ходу \mathfrak{A}^- и для этого поля снова вычисляет $l_w(z_1, z_4) - l_e(z_1, z_4)$.

Процесс завершается, когда мы находим такое поле z^* , что для любого поля z с границы внешней дыры разность $l_w(z^*, z) - l_e(z^*, z)$ не будет положительной (\mathfrak{B}_4 пройдет всю границу и вернётся к \mathfrak{B}_1). Поле z^* принадлежит самой левой вертикали. Весь коллектив переходит на z^* .

Шаг 3. На самой левой вертикали коллектив типа (1,6) распознаёт самое нижнее поле. Лемма 4 доказана.

3. Доказательство теоремы

По лемме 4 существует коллектив типа (1,6), который в любом лабиринте, стартуя с произвольного поля, распознаёт (находит и оста-

навливается) самое нижнее среди самых левых полей. Если после того, как пешка из этого коллектива перейдёт в конечное состояние, заменить её функции перехода и выхода функциями перехода и выхода коллектива, который обходит весь лабиринт, начиная с этого поля, и останавливается после обхода (он существует по лемме 3), то получим искомый коллектив. При этом конечное состояние пешки из первого коллектива заменяем начальным состоянием пешки из второго коллектива. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Shannon Cl.E. Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found / Editor: H. Foerster. 1951. P. 173–180.
- [2] Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха–Подколзина // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 3.
- [3] Килибарда Г. Об обходе конечных лабиринтов системами автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 2.
- [4] Кудрявцев В.Б., Алёшин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
- [5] Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 1992. Т. 4. Вып. 3.