О предельных теоремах теории возможностей*

Ю.П. Пытьев

Введение

Как известно [1], законы больших чисел теории вероятностей устанавливают факт и условия сходимости по вероятности некоторых функций последовательностей случайных величин к определенным постоянным. Такие функции определяют правила комбинирования случайных наблюдений, позволяющие с увеличением числа наблюдений уменьшать влияние их случайных составляющих и тем самым — выявлять в достаточно длинных сериях наблюдений закономерности, сколь угодно близкие к неслучайным. Например, если $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность взаимно независимых копий случайной величины ξ, и существует математическое ожидание $\mathbf{E}\,\xi$, то для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\Pr(|(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n - \mathbf{E}\,\xi| > \varepsilon) \to 0. \tag{1}$$

Согласно (1) вероятность любого уклонения функции $f_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$ от $\mathbf{E}\,\xi$ стремится к нулю при $n \to \infty$, и в этом смысле $f_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ сколь угодно точно оценивает $\mathbf{E}\,\xi$, если n достаточно велико. Если, кроме того, существует и дисперсия $\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\,\xi)^2 = \sigma^2$, то факт сходимости (1), известный как *закон больших чисел*, можно уточнить, ибо в этом случае при $n \to \infty$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 02–01–00424.

$$\Pr\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}-\mathbf{E}\,\xi\right)<x\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt \qquad (2)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}_1$. Согласно (2) распределение функции $f_n^{(2)}(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots) = \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\big(f_n^{(1)}(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots) - \mathbf{E}\,\xi\big)$ при $n \to \infty$ сходится к нормальному распределению $\mathcal{N}(0,1)$. Этот факт, известный как *центральная предельная теорема*, позволяет более определенно судить о характере сходимости (1), например, — оценить точность аппроксимации $\mathbf{E}\,\xi$ значениями $f_n^{(1)}(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots)$ при достаточно больших n.

Прикладной аспект предельных теорем (1) и (2) поясним на примере задачи оценивания для теоретико-вероятностной модели измерений величины $\tau \in \mathbb{R}_1$, выполняемых по схеме

$$\xi_i = \tau + \nu_i, \quad i = 1,\,\ldots,\,n, \qquad (3)$$

где ξ_i — результат, а ν_i — ошибка i-го измерения τ, $\mathbf{E}\,\nu_i = 0$, $i = 1,\,\ldots,\,n$. С увеличением числа измерений n $f_n^{(1)}(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots)$ по вероятности сходится к измеряемой величине τ и в этом смысле точнее и точнее приближает τ. Этот эффект накопления информации при повторении *статистически независимых* измерений, характерный для статистических моделей, количественно выражается в уменьшении дисперсии ошибки оценивания:

$$\mathbf{E}(f_n^{(1)}(\xi_1,\xi_2,\ldots)-\tau) = \sigma^2/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

причем при больших n распределение невязки оценивания $f_n^{(1)}(\xi_1,\xi_2,\ldots) - \tau$ близкó к нормальному $\mathcal{N}(0,\sigma^2/n)$.

Что касается возможности [2], то поскольку последняя, в отличие от вероятности, не имеет частотной интерпретации, предельные теоремы для последовательностей независимых нечетких элементов в теории возможностей занимают существенно более скромное место. Чтобы яснее представить себе причину такого положения, обсудим вкратце неформальную связь между понятиями вероятности и возможности. Рассмотрим регулярный стохастический эксперимент Э, обозначим $\omega_1, \omega_2, \ldots$ его исходы, $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$ — их вероятности. Если в последовательности n независимых копий Э [3] $\nu_{(n)i}$ — частота i-го элементарного исхода Э, то в силу (1) при $n \to \infty$ $\nu_{(n)i}$ сходится по вероятности к pr_i, ибо $\mathbf{E}\,\nu_{(n)i} = \mathrm{pr}_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Следовательно, *значение вероятности* pr_i *может быть использовано для прогноза частоты* $\nu_{(n)i}$ *исхода* ω_i *в достаточно длинной серии* n *испытаний*, а если вероятность pr_i неизвестна, то частота $\nu_{(n)i}$ *может служить ее экспериментальной оценкой*, $i = 1, 2, \ldots$. Подчеркнем, что в рамках теории вероятностей речь не идет и не может идти о *предсказании исхода* Э или, если угодно, — о *сравнении возможностей исходов* Э.

Вместе с тем при любом определении возможности p_i исхода ω_i как меры, учитывающей обстоятельства, определяющие относительную предпочтительность исхода ω_i в сравнении со всеми другими элементарными исходами Э, следует считать, что $p_i \geqslant p_j$, если $\mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j$, $i, j = 1, 2, \ldots$. Но для такого заключения не обязательно знать значения вероятностей $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, достаточно лишь знать, как они упорядочены. Если, скажем, $1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1$, то $1 = p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, и если последняя упорядоченность — единственное ограничение на распределение $p_1, p_2, \ldots$ возможностей исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots$, то, как показано в [3], получим один из вариантов теории возможностей [2, 3]. В этом варианте шкала $\mathcal{L} = ([0, 1], \leqslant, \max, \min)$ значений возможности определена как отрезок $[0, 1] \subset \mathbb{R}_1$ с естественной упорядоченностью $\leqslant$ и двумя правилами композиции: max как сложение и min как умножение[1].

Поскольку внутренняя структура этого варианта теории возможностей и ее содержательное толкование в значительной степени определяются лишь отношением упорядоченности $\leqslant$, не следует ожидать, что повторение наблюдений может привести к существенной эволюции распределения. Для этого, образно говоря, «объект» следовало бы наблюдать «с разных сторон», а не повторять наблюдение «с одной и той же стороны». И напротив, при такой стратегии исследований, свойственной, например, азартным играм, в которых ожидаемый эффект оценивается «в среднем», решающую роль играет многократное повторение однотипных независимых наблюдений.

---

[1] $\mathcal{L}$ — полная дистрибутивная решетка, инвариантная относительно группы изотонных автоморфизмов отрезка $[0, 1]$.

Вместе с тем, если шкала значений возможности $\mathcal{L}$ наделяется другими свойствами, определяемыми правилами композиции, то, как показано в [2], появляется и «эффект накопления информации» при повторных независимых наблюдениях — теоретико-возможностный вариант закона больших чисел.

В этой работе некоторые предельные теоремы рассмотрены для возможности, принимающей значения в шкале $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$.

1. Предварительные замечания и примеры

В этом параграфе рассмотрены асимптотические свойства распределений некоторых функций $f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \triangleq \zeta_n$ независимых нечетких элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$, каждый их которых является копией некоторого нечеткого элемента ξ, при $n \to \infty$. Если $\varphi^{\xi}(\cdot) : X \to [0, 1]$ — распределение[2] нечеткого элемента ξ, принимающего значения в X, и $f_n(\cdot, \ldots, \cdot) : X^n \to Z$, то распределение $\varphi^{\zeta_n}(\cdot) : Z \to [0, 1]$ нечеткого элемента ζ_n дается равенством

$$\varphi^{\zeta_n}(z) = \sup\Big\{\min\Big(\varphi^{\xi}(x_1), \ldots, \varphi^{\xi}(x_n)\Big) \mid x_1, \ldots, x_n \in X, \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = z\Big\}, \quad z \in Z. \quad (4)$$

Пусть, например, $\zeta^{(n)} = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $X = Z = \mathbb{R}_1$. Тогда, согласно (4)

$$\varphi^{\zeta^{(n)}}(z) = \sup\Big\{\min\Big(\varphi^{\xi}(x_1), \ldots, \varphi^{\xi}(x_n)\Big) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_1, \\ \max(x_1, \ldots, x_n) = z\Big\},\ z \in \mathbb{R}_1.$$

Поскольку условие $\max(x_1, \ldots, x_n) = z$ означает, что все $x_j \leqslant z$, $j = 1, \ldots, n$, причем для некоторого j_k $x_{j_k} = z$, где x_{j_k} может быть любым из $x_1, \ldots, x_n$, то

[2]Значение $\varphi^{\xi}(x)$ есть возможность равенства $\xi = x$, возможность включения $\xi \in A \subset X$ есть $P(\xi \in A) = \sup\limits_{x \in A} \varphi^{\xi}(x)$, [2].

$$\varphi^{\zeta^{(n)}} = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\{\min\Big(\sup_{x_1\leqslant z}\varphi^{\xi}(x_1),\,\ldots,\,\sup_{x_{k-1}\leqslant z}\varphi^{\xi}(x_{k-1}),\,\varphi^{\xi}(z),$$
$$\sup_{x_{k+1}\leqslant z}\varphi^{\xi}(x_{k+1}),\,\ldots,\,\sup_{x_n\leqslant z}\varphi^{\xi}(x_n)\Big)\Big\} = \varphi^{\xi}(z),\quad z\in\mathbb{R}_1,\quad (5)$$

ибо $\sup\limits_{x_k\leqslant z}\varphi^{\xi}(x_k)\geqslant\varphi^{\xi}(z)$, $k=1,\ldots,n$.

Итак, нечеткий элемент $\zeta^{(n)}=\max(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ распределен так же, как ξ при любом $n=1,2,\ldots$ Нетрудно показать, что это верно и для нечеткого элемента $\zeta_{(n)}=\min(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n)$, а именно,

$$\varphi^{\zeta_{(n)}}(z)=\varphi^{\xi}(z),\quad z\in\mathbb{R}_1,\,n=1,2,\ldots\quad (6)$$

Равенства (5) и (6) представляют *простейшие предельные теоремы теории возможностей.*

Теорема 1. *Если нечеткие элементы $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n\in\mathbb{R}_1$ взаимно независимы и одинаково распределены как нечеткий элемент $\xi\in\mathbb{R}_1$, то и нечеткие элементы $\zeta^{(n)}=\max(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n)$ и $\zeta_{(n)}=\min(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n)$ при любом $n=1,\,2,\,\ldots$ распределены как ξ,* [2].

В качестве примера, в котором встречаются нечеткие элементы $\zeta^{(n)}$ и $\zeta_{(n)}$, рассмотрим задачу оценивания нечеткого элемента τ на основе измерений, выполненных по схеме (3). Пусть $\nu_1,\,\ldots,\,\nu_n$ — независимые копии нечеткого элемента ν, $\varphi^{\nu}(\cdot):\,\mathbb{R}_1\to[0,\,1]$ — его распределение, $\varphi^{\tau}(\cdot):\,\mathbb{R}_1\to[0,\,1]$ — распределение τ, и нечеткие элементы $\nu_1,\,\ldots,\,\nu_n$, τ независимы. Тогда, согласно схеме (3), условное распределение ξ_i при условии $\tau=t$ является «сдвигом на t» распределения ν:

$$\varphi^{\xi_i|\tau}(x_i|t)=\varphi^{\nu}(x_i-t),\quad i=1,\ldots,n,$$

и, поскольку $\xi_1,\ldots,\xi_n$ при фиксированном значении параметра сдвига $\tau=t$ независимы, условное распределение нечеткого вектора $\overline{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ при условии $\tau=t$

$$\varphi^{\overline{\xi}|\tau}(\overline{x}|t)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi^{\nu}(x_i-t),\quad \overline{x}=(x_1,\ldots,x_n),\quad t\in\mathbb{R}_1,$$

и совместное распределение $\overline{\xi}, \tau$

$$\varphi^{\overline{\xi},\,\tau}(\overline{x},\,t) = \min(\varphi^{\overline{\xi}|\tau}(\overline{x}|t),\,\varphi^{\tau}(t)), \quad \overline{x} \in \mathbb{R}_n = (\mathbb{R}_1)^n,\ t \in \mathbb{R}_1,\ [2].$$

Пусть значения τ априори равновозможны, то есть $\varphi^{\tau}(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}_1$. Тогда

$$\varphi^{\overline{\xi},\,\tau}(\overline{x},\,t) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \varphi^{\nu}(x_i - t), \quad x_1,\,\ldots,\,x_n, \quad t \in \mathbb{R}_1,$$

и, как известно [2], оценка $\widehat{\tau} = d(\overline{\xi})$, минимизирующая необходимость ошибки оценивания τ, при достаточно общих предположениях определяется стратегией оценивания $d(\cdot) : (\mathbb{R}_1)^n \to \mathbb{R}_1$, удовлетворяющей уравнению

$$\varphi^{\overline{\xi},\,\tau}(\overline{x},\,d(\overline{x})) = \max_{t\in\mathbb{R}_1} \varphi^{\overline{\xi},\,\tau}(\overline{x},\,t), \quad \overline{x} \in (\mathbb{R}_1)^n.$$

Если функция $\varphi^{\nu}(\cdot)$ равна единице в нуле, четная, $\varphi^{\nu}(x) = \varphi^{\nu}(|x|)$, $x \in \mathbb{R}_1$, и строго монотонно убывает на $\mathbb{R}_+ = [0,\,\infty)$, то искомая стратегия оценивания $d(\cdot)$ параметра сдвига t является решением задачи

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - d(\overline{x})| = \min_{t\in\mathbb{R}_1} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - t|$$

и определяется равенством

$$d(\overline{x}) = \Bigl(\max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i + \min_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\Bigr)/2.$$

В данном случае $d(\overline{x})$ — центр отрезка минимальной длины, содержащего $x_1,\,\ldots,\,x_n$. Нечеткая ошибка оценивания τ посредством $\widehat{\tau} = d(\overline{\xi})$

$$d(\overline{\xi}) - \tau = \Bigl(\Bigl(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \xi_i - \tau\Bigr) + \Bigl(\min_{1\leqslant i\leqslant n} \xi_i - \tau\Bigr)\Bigr)/2 = \Bigl(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \nu_i + \min_{1\leqslant i\leqslant n} \nu_i\Bigr)/2,$$

а ее распределение

$$\varphi^{\widehat{\tau}-\tau}(z) = \sup\Bigl\{\min(\varphi^{\nu}(x_1),\,\ldots,\,\varphi^{\nu}(x_n))| \\ x_1,\,\ldots,\,x_n \in \mathbb{R}_1,\ \Bigl(\max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i + \min_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\Bigr)/2 = z\Bigr\}, \quad z \in \mathbb{R}_1.$$

Поскольку в силу оговоренных выше свойств распределения $\varphi^{\nu}(\cdot)$ величина $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \varphi^{\nu}(x_i)$ определяется лишь значениями $z_1 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ и $z_2 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$, то

$$\varphi^{\widehat{\tau}-\tau}(z) = \sup\bigl\{\min(\varphi^{\nu}(z_1), \varphi^{\nu}(z_2)) |\ z_1, z_2 \in \mathbb{R}_1,\ (z_1+z_2)/2 = z\bigr\},\ z \in \mathbb{R}_1.$$

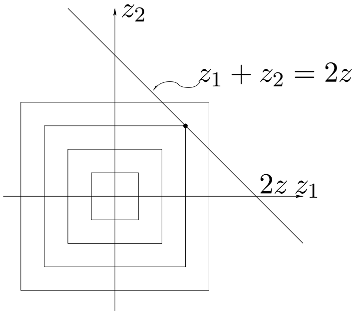

Рис. 1. Линии уровня $\{(z_1,\, z_2) \in (\mathbb{R}_1)^2 :\ \min(\varphi^{\nu}(z_1),\, \varphi^{\nu}(z_2)) = \mathrm{const}\}$. Точкой выделено наибольшее значение const, при котором линии уровня пересекаются с прямой $z_1 + z_2 = 2z$.

Как нетрудно заметить (см. рис. 1)

$$\varphi^{\widehat{\tau}-\tau}(z) = \varphi^{\nu}(z), \quad z \in \mathbb{R}_1.$$

Этот результат показывает, что *распределение ошибки оценивания* $\widehat{\tau} - \tau$, *ра́вно как и распределения нечетких элементов* $\zeta^{(n)}$ *и* $\zeta_{(n)}$, *не зависят от числа измерений.* Эти факты разительно отличаются от их статистических и теоретико-вероятностных аналогов [4].

Пусть теперь в (3) ошибки измерений ν_i, $i = 1, \ldots, n$, по-прежнему независимы, но имеют разные распределения, например, $\varphi^{\nu_i}(x) = \rho\Bigl(\dfrac{|x|}{\sigma_i}\Bigr)$, $x \in \mathbb{R}_1$, $i = 1, \ldots, n$, где функция $\rho(\cdot) :\ [0, \infty) \to [0, 1]$, $\rho(0) = 1$, строго монотонно убывает на $[0, 1]$ и $\rho(z) = 0$, $z \geqslant 1$. Пусть по-прежнему $\varphi^{\tau}(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}_1$, и для простоты $n = 2$. Тогда

$$\varphi^{\overline{\xi},\tau}(\overline{x},\, t) = \min\left(\rho\left(\frac{|x_1 - t|}{\sigma_1}\right),\, \rho\left(\frac{|x_2 - t|}{\sigma_2}\right)\right) =$$

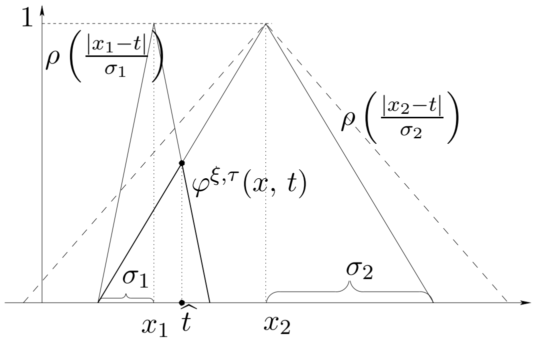

Рис. 2. Графики функций $\rho\left(\dfrac{|x_1-t|}{\sigma_1}\right)$, $\rho\left(\dfrac{|x_2-t|}{\sigma_2}\right)$ и $\varphi^{\overline{\xi},\tau}(\overline{x},\,t)$, $t \in \mathbb{R}_1$, в случае $\sigma_2 > \sigma_1$, $x_2 > x_1$, $x_1 - \sigma_1 < x_2 - \sigma_2$; $\widehat{t} = (x_1\sigma_2 + x_2\sigma_1)/(\sigma_1 + \sigma_2)$. Штрихом выделен случай $x_1 - \sigma_1 > x_2 - \sigma_2$.

$$= \rho\left(\max\left(\frac{|x_1-t|}{\sigma_1}, \frac{|x_2-t|}{\sigma_2}\right)\right),\ \overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2),\ \overline{x} = (x_1, x_2),\ x_1, x_2, t \in \mathbb{R}_1.$$

Оценка $\widehat{\tau}$ сдвига τ, минимизирующая необходимость ошибки оценивания, есть

$$\widehat{\tau} = \frac{\xi_1\sigma_2 + \xi_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

соответственно ошибка оценивания

$$\widehat{\tau} - \tau = \frac{\nu_1\sigma_2 + \nu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

и ее распределение (см. рис. 2, 3, 4)

$$\varphi^{\widehat{\tau}-\tau}(z) = \sup\left\{\min\left(\rho\left(\frac{|x_1|}{\sigma_1}\right), \rho\left(\frac{|x_2|}{\sigma_2}\right)\right) \Bigm| x_1, x_2 \in \mathbb{R}_1, \frac{x_1\sigma_2 + x_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = z\right\} = \rho\left(\frac{z}{2\sigma_1\sigma_2/(\sigma_1+\sigma_2)}\right),\ z \in \mathbb{R}_1. \quad (7)$$

Так как для $\sigma_1 < \sigma_2$

$$\sigma_1 < \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} < \sigma_2,$$

то возможность любого значения ошибки оценивания с учетом результатов двух измерений больше (не меньше), чем с учетом лишь первого измерения, когда $\widehat{\tau} = \xi_1$, $\widehat{\tau} - \tau = \nu_1$, см. рис. 4.

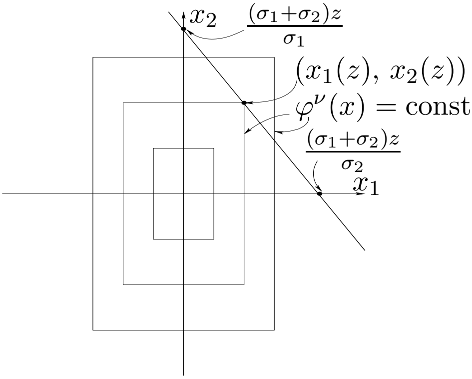

Рис. 3. Линии уровня $\varphi^{\overline{\nu}}(\overline{x}) = \mathrm{const}$, $\overline{x} = (x_1,\, x_2)$, $\overline{\nu} = (\nu_1,\, \nu_2)$ и прямая $\dfrac{x_1\sigma_2 + x_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = z$; точкой $(x_1(z),\, x_2(z))$ выделено значение $\overline{x} = (x_1,\, x_2)$, на котором достигается sup в (7). $\dfrac{x_1(z)}{\sigma_1} = \dfrac{x_2(z)}{\sigma_2} = z\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_1\sigma_2}$.

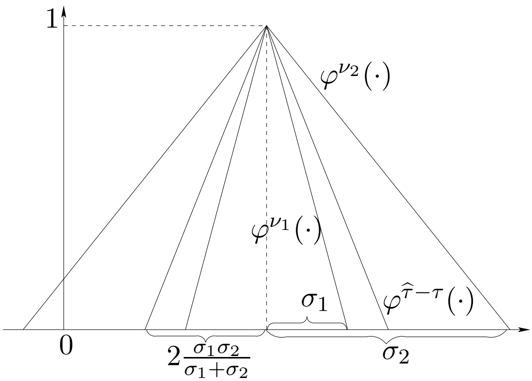

Рис. 4. Для возможности любого значения $z \in \mathbb{R}_1$, $|z| < \dfrac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ ошибки $\widehat{\tau} - \tau$ выполнены неравенства $\varphi^{\nu_1}(z) < \varphi^{\widehat{\tau}-\tau}(z) < \varphi^{\nu_2}(z)$; для любого $z \in \mathbb{R}_1$, $\varphi^{\nu_1}(z) \leqslant \varphi^{\widehat{\tau}-\tau}(z) \leqslant \varphi^{\nu_2}(z)$.

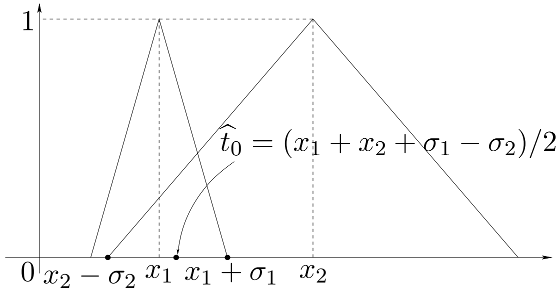

Рис. 5. Оценка $\widehat{\tau}_0$ — центр отрезка, концы которого суть $\xi_1 + \sigma_1$ и $\xi_2 - \sigma_2$.

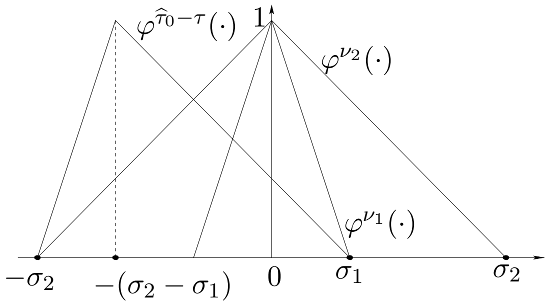

Рис. 6. Распределения $\varphi^{\nu_1}(\cdot)$, $\varphi^{\nu_2}(\cdot)$ ошибок ν_1, ν_2 и распределение $\varphi^{\widehat{\tau}_0-\tau}(\cdot)$ ошибки оценивания.

Этот результат противоречит тому, что свойственно оптимальному оцениванию при теоретико-вероятностной модели (3), когда, как известно (см., например, [7]), учет любого дополнительного измерения не может увеличить ошибку оценивания.

Рассмотрим, наконец, оценку $\widehat{\tau}_0$, минимизирующую максимальную из возможных ошибок оценивания (см. рис. 5)

$$\widehat{\tau}_0 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \sigma_1 - \sigma_2).$$

Для нее $\widehat{\tau}_0 - \tau = \dfrac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2 + \sigma_1 - \sigma_2)$ и

$$\varphi^{\widehat{\tau}_0-\tau}(z) = \rho\left(\frac{|2z + \sigma_2 - \sigma_1|}{\sigma_1 + \sigma_2}\right), \quad z \in \mathbb{R}_1.$$

И в этом случае учет менее «качественного» измерения ξ_2 приводит к увеличению возможности ошибки оценивания (см. рис. 6), основанной лишь на измерении ξ_1.

Далее сосредоточим внимание на асимптотических свойствах распределений нечетких элементов

$$\zeta_k = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{k}, \quad \xi_1, \ldots, \xi_k, \zeta_k \in \mathbb{R}_n, \; k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

при $k \to \infty$.

2. Класс предельных распределений

Для того, чтобы охарактеризовать асимптотику распределения ζ_k (8) при $k \to \infty$, нам потребуются дополнительные математические конструкции. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое множество в $\mathbb{R}_n$. Обозначим $\Phi(\mathcal{D})$ класс функций $\varphi(\cdot) : \mathcal{D} \to [0, 1]$, таких, что для любых $x_0, x_1 \in \mathcal{D}$, $\lambda_0, \lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$

$$\varphi(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1) \geqslant \min(\varphi(x_0), \varphi(x_1)). \tag{9}$$

Обозначим

$$\mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\} \triangleq \{\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_k x_k |\; \lambda_0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0, \lambda_0 + \ldots + \lambda_k = 1\}$$

выпуклую оболочку множества $\{x_0, \ldots, x_k\}$ точек $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}_n$. В частности, $\mathrm{co}\{x_0, x_1\}$ — отрезок прямой, x_0, x_1 — его концы, и условие (9) эквивалентно следующему: функция $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, если и только если для любых $x_0, x_1 \in \mathcal{D}$ и $x \in \mathrm{co}\{x_0, x_1\}$

$$\varphi(x) \geqslant \min(\varphi(x_0), \varphi(x_1)).$$

Класс $\Phi(\mathcal{D})$ удобно охарактеризовать, выделив его из более обширного класса $\Psi(\mathcal{D})$ всех функций $\psi(\cdot) : \mathcal{D} \to [0, 1]$. С этой целью определим оператор $T_k : \Psi(\mathcal{D}) \to \Psi(\mathcal{D})$

$$(T_k\psi)(x) = \sup\{\min(\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k))| \\ x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{D},\, x \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\}\},\; x \in \mathcal{D},\; k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы функция* $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, *достаточно, чтобы хотя бы для одного* $k = 1, 2, \ldots$ *и необходимо, чтобы для любого* $k = 1, 2, \ldots$ *выполнялось одно из следующих (эквивалентных) условий:*

1. *для любых* $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{D}$ *и любого* $x \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\}$

$$\varphi(x) \geqslant \min(\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_k)); \tag{11}$$

2.
$$(T_k\varphi)(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{D}. \tag{12}$$

Доказательство. 1. Достаточность условия (11) очевидна. Необходимость проверим по индукции. Пусть (11) выполнено, тогда для любых $x_0, \ldots, x_{k+1} \in \mathcal{D}$, любого $z \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\}$ и любого $x \in \mathrm{co}\{z, x_{k+1}\}$

$$\min(\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_k), \varphi(x_{k+1})) \leqslant \min(\varphi(z), \varphi(x_{k+1})) \leqslant \varphi(x). \tag{13}$$

Поскольку в (13) $z \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\}$ и, следовательно, принимает любое значение $\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_k x_k$ при $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_0 + \ldots + \lambda_k = 1$, а x принимает любое значение $\mu_0 z + \mu_1 x_{k+1}$, $\mu_0, \mu_1 \geqslant 0$, $\mu_0 + \mu_1 = 1$, то $x = \mu_0(\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_k x_k) + \mu_1 x_{k+1} = \theta_0 x_0 + \ldots + \theta_{k+1} x_{k+1}$, где $\theta_0 = \mu_0\lambda_0 \geqslant 0, \ldots, \theta_k = \mu_0\lambda_k \geqslant 0$, $\theta_{k+1} = \mu_1 \geqslant 0$, $\theta_0 + \ldots + \theta_{k+1} = 1$, то есть в (13) x — любой элемент из $\mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_{k+1}\}$.

2. Пусть $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, тогда выполнено условие (11), и согласно (10)

$$(T_k\varphi)(x) \leqslant \varphi(x), \quad x \in \mathcal{D}.$$

С другой стороны, выбрав в (11) $x_0 = \ldots = x_k = x$, получим равенство. Наоборот, если верно (12), то согласно (10) отсюда следует (11). Эти же рассуждения доказывают эквивалентность условий (11) и (12).

Пример 1. Любая функция $\varphi(\cdot) : \mathcal{D} \to [0, 1]$, вогнутая на $\mathcal{D}$, то есть такая, что

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2),$$
$$x_1, x_2 \in \mathcal{D}, \;\; \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0, \;\; \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

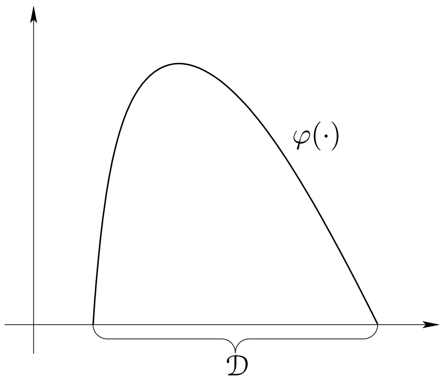

Рис. 7. Вогнутая на $\mathcal{D}$ функция $\varphi(\cdot)$ принадлежит классу $\Phi(\mathcal{D})$.

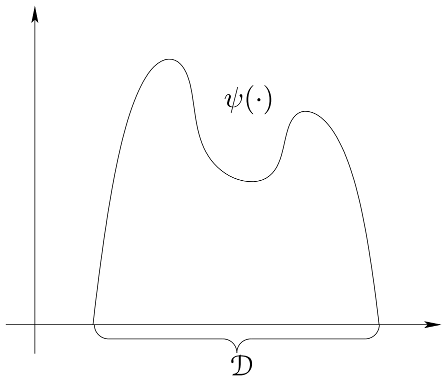

Рис. 8. Функция $\psi(\cdot) : \mathcal{D} \to [0,1]$, имеющая строгий локальный минимум во внутренней точке $\mathcal{D}$, не принадлежит $\Phi(\mathcal{D})$.

принадлежит классу $\Phi(\mathcal{D})$, ибо $\lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2) \geqslant \min(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$, см. рис. 7.

Пример 2. Пусть $\mathring{x} \in \mathcal{D}$ — точка строгого локального минимума функции $\psi(\cdot) : \mathcal{D} \to [0,1]$, причем пусть $\mathring{x}$ — внутренняя точка $\mathcal{D}$, принадлежащая $\mathcal{D}$ вместе с некоторым отрезком $\mathrm{co}\{x_0, x_1\} \ni \mathring{x}, \mathring{x} \neq x_0, \mathring{x} \neq x_1$. Тогда $\psi(\mathring{x}) \leqslant \min(\psi(x_0), \psi(x_1))$, то есть $\psi(\cdot) \notin \Phi(\mathcal{D})$, см. рис. 8.

Пример 3. Пусть $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, тогда[3] $\varphi(\cdot) = \min(\varphi_1, \varphi_2)(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, см. рис. 9. Действительно, для любых $x_0, x_1 \in \mathcal{D}$ и любого $x \in \mathrm{co}\{x_0, x_1\}$

$$\begin{gathered}\varphi(x) = \min(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \geqslant \\ \geqslant \min\left[\min(\varphi_1(x_0), \varphi_1(x_1)), \min(\varphi_2(x_0), \varphi_2(x_1))\right] = \\ = \min\left[\min(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)), \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1))\right] = \min(\varphi(x_0), \varphi(x_1)).\end{gathered}$$

Пример 4. Пусть $\widetilde{\varphi}(\cdot) : \mathbb{R}_n \to [0,1]$ — продолжение $\varphi(\cdot) : \mathcal{D} \to [0,1]$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_n$, на $\mathbb{R}_n$

[3] $\min(\varphi_1, \varphi_2)(x) \triangleq \min(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $\quad \max(\varphi_1, \varphi_2)(x) \triangleq \max(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$

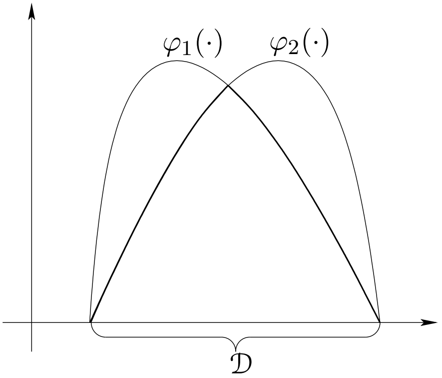

Рис. 9. $\varphi(\cdot) = \min(\varphi_1, \varphi_2)(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, если $\varphi_1(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D}), \varphi_2(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, но $\max(\varphi_1, \varphi_2)(\cdot)$ может и не принадлежать $\Phi(\mathcal{D})$ (ср. с примером 2).

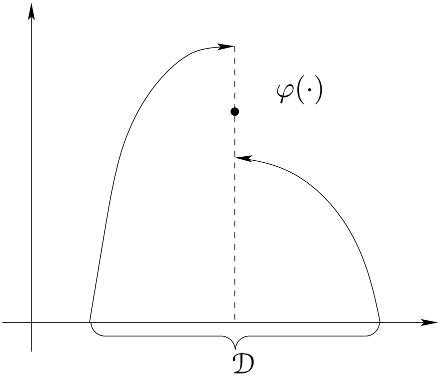

Рис. 10. Пример функции $\varphi(\cdot)$, принадлежащей классу $\Phi(\mathcal{D})$.

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \mathcal{D}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}_n \backslash \mathcal{D}. \end{cases}$$

Тогда включения $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$ и $\widetilde{\varphi}(\cdot) \in \Phi(\mathbb{R}_n)$ эквивалентны: $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, если и только если $\widetilde{\varphi}(\cdot) \in \Phi(\mathbb{R}_n)$. Действительно, если $x_0, x_1 \in \mathcal{D}$, то $\widetilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0), \widetilde{\varphi}(x_1) = \varphi(x_1)$ и $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x), x \in \operatorname{co}\{x_0, x_1\} \subset \mathcal{D}$. Если же хотя бы одна точка, скажем $x_0 \notin \mathcal{D}$, то $\widetilde{\varphi}(x) \geqslant \min(\widetilde{\varphi}(x_0), \widetilde{\varphi}(x_1)) = 0, x \in \operatorname{co}\{x_0, x_1\}$.

Далее $\mathcal{D}$ всюду отождествляется с $\mathbb{R}_n$.

Пример 5. Пусть $\widetilde{\psi}(\cdot) : \widetilde{\mathcal{D}} \to [0, 1]$ — сужение $\psi(\cdot) : \mathcal{D} \to [0, 1]$, $\widetilde{\mathcal{D}}$ — выпуклое подмножество $\mathcal{D}$, $\widetilde{\psi}(x) = \psi(x), x \in \widetilde{D}$. Тогда, очевидно, включение $\psi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$ влечет включение $\widetilde{\psi}(\cdot) \in \Phi(\widetilde{\mathcal{D}})$.

Еще один пример функции $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$ приведен на рис. 10.

Далее будет показано, что $\Phi(\mathbb{R}_n)$ — класс предельных распределений для нечеткого элемента $\zeta_k = \dfrac{\xi_0 + \ldots + \xi_k}{k+1}$ при $k \to \infty$.

3. Свойства семейства операторов T_k, $(k = 1, 2, ...)$

Рассмотрим пристальнее свойства операторов $T_k\colon \Psi(\mathbb{R}_n) \to \Psi(\mathbb{R}_n)$, $k = 1, 2, \ldots$ (10). Пусть $\psi(\cdot) \in \Psi(\mathbb{R}_n)$, определим семейство множеств

$$\mathcal{E}_t \triangleq \psi^{-1}(t) = \{x \in \mathbb{R}_n, \psi(x) = t\}, \quad t \in [0, 1].$$

Лемма 1. *Для любой функции* $\psi(\cdot) \in \Psi(\mathbb{R}_n)$
1. $(T_1\psi)(x) \leqslant (T_2\psi)(x) \leqslant \ldots \leqslant (T_n\psi)(x) = (T_{n+1}\psi)(x) = \ldots,\ x \in \mathbb{R}_n$;
2. $(T_k\psi)(x) = \sup\{t \mid t \in [0, 1], \operatorname{co}\mathcal{E}_t \ni x\},\ x \in \mathbb{R}_n,\ k = n, n+1, \ldots$

Доказательство. 1. Согласно представлению (10)

$$(T_k\psi)(x) = \sup\{\min(\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)) | x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}_n,\ x \in \operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_k\}\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup\{\min(\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)) | x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}_n,\ x \in \operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_k\},\ x_{k-1} = x_k\} = (T_{k-1}\psi)(x),\ x \in \mathbb{R}_n,\ k = 2, 3, \ldots$$

2. Так как

$$\mathbb{R}_n = \bigcup_{t \in [0,1]} \mathcal{E}_t = \bigcup_{t \in [0,1]} \operatorname{co}\mathcal{E}_t,$$

то выражению (10) при $k = n, n+1, \ldots$ можно придать следующий вид:

$$(T_k\psi)(x) = \sup_{t \in [0,1]} \sup\{\min(\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)) | x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t,\ x \in \operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_k\}\} =$$

$$= \sup_{t \in [0,1]} \sup\{\min(\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)) | x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t, \quad x \in \operatorname{co}\mathcal{E}_t\},\quad x \in \mathbb{R}_n \qquad (14)$$

В представлении (14) использован тот факт, что при любом $k = n$, $n+1, \ldots$ для любых $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t$ включение $x \in \operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_k\} \Rightarrow$

$x \in \operatorname{co}\mathcal{E}_t$ и наоборот, любой элемент $x \in \operatorname{co}\mathcal{E}_t$ может быть представлен в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ элементов $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t$. Следовательно, для тех $t \in [0,1]$, для которых $x \in \operatorname{co}\mathcal{E}_t$

$$\psi_k(x,t) \triangleq \sup\{\min(\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k))|\; x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t,\; x \in \operatorname{co}\mathcal{E}_t\} = t,$$

если же $x \notin \operatorname{co}\mathcal{E}_t$, то $\psi_k(x,t) = 0$ как точная верхняя грань пустого множества $\varnothing \in [0,1]$. Поэтому для любого $k = n, n+1, \ldots$

$$(T_k\psi)(x) = \sup\{\psi_k(x,t)|t \in [0,1]\} = \sup\{t|x \in \operatorname{co}\mathcal{E}_t\} = (T_n\psi)(x),\; x \in \mathbb{R}_n.$$

Теорема 3. *Для любой функции $\psi(\cdot) \in \Psi(\mathbb{R}_n)$, и $k = n, n+1, \ldots$, функция $(T_k\psi)(\cdot) \in \Phi(\mathbb{R}_n)$.*

Доказательство. Выберем произвольно $z_0, z_1 \in \mathbb{R}_n$ и $x \in \operatorname{co}\{z_0, z_1\}$, так что при некоторых μ_0, $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_0 + \mu_1 = 1$ $x = \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1$. Согласно формуле (10) для любых $k = 1, 2, \ldots$ и $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}_n$, таких, что при некоторых $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_0 + \ldots + \lambda_k = 1$

$$x = \mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 = \lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_k x_k,$$

получим соотношения:

$$(T_k\psi)(x) = (T_k\psi)(\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1) \geqslant \min(\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)). \tag{15}$$

Положим в (15)

$$\begin{gathered}\mu_0 z_0 = \lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_s x_s, \quad \mu_0 = \lambda_0 + \ldots + \lambda_s,\\ \mu_1 z_1 = \lambda_{s+1} x_{s+1} + \ldots + \lambda_k x_k, \quad \mu_1 = \lambda_{s+1} + \ldots + \lambda_k, \quad 1 \leqslant s < k,\end{gathered}$$

так что

$$z_0 \in \operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_s\}, \quad z_1 \in \operatorname{co}\{x_{s+1}, \ldots, x_k\}.$$

Из (15) следует, что при любом $s \in [1,\, k)$

$$\begin{gathered}(T_k\psi)(\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1) \geqslant \min[\sup\{\min(\psi(x_0), \ldots, \psi(x_s))|x_0, \ldots, x_s \in \mathbb{R}_n,\\ z_0 \in \operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_s\}\},\; \sup\{\min(\psi(x_{s+1}), \ldots, \psi(x_k))|x_{s+1}, \ldots, x_k \in \mathbb{R}_n,\\ z_1 \in \operatorname{co}\{x_{s+1}, \ldots, x_k\}\}] = \min[(T_s\psi)(z_0), (T_{k-s-1}\psi)(z_1)], z_0, z_1 \in \mathbb{R}_n.\end{gathered} \tag{16}$$

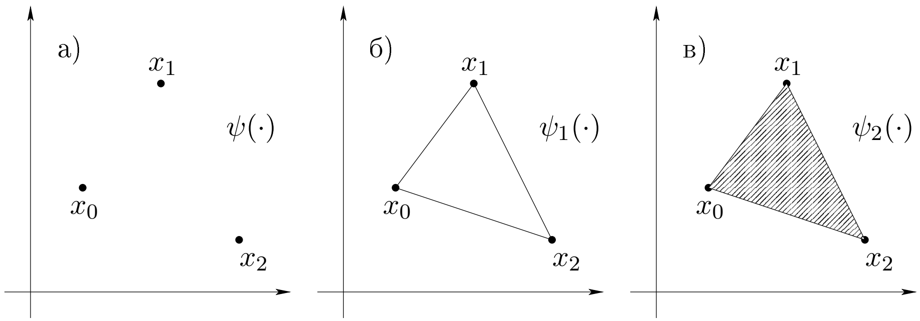

Рис. 11. Множества точек $x \in \mathbb{R}_2$, в которых: а) $\psi(x) = 1$, б) $\psi_1(x) = (T_1\psi)(x) = 1$, в) $\psi_2(x) = (T_2\psi)(x) = 1$.

Выберем в (16) $k \geqslant 2n+1$, $s \geqslant n$, $k-s \geqslant n+1$, тогда $(T_k\psi)(\cdot) = (T_s\psi)(\cdot) = (T_{k-s-1}\psi)(\cdot) = (T_n\psi)(\cdot)$, как это следует из леммы 1. Поэтому для любых $z_0, z_1 \in \mathbb{R}_n$ $(T_n\psi)(z) \geqslant \min((T_n\psi)(z_0), (T_n\psi)(z_1))$, если $z \in \mathrm{co}\{z_0, z_1\}$.

Следующий пример иллюстрирует результат, полученный в теореме 3.

Пример 6. Пусть $\psi(\cdot) : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_1$, $\psi(x) = 1$ при $x = x_0, x_1$ и $x_2 \in \mathbb{R}_2$ и $\psi(x) = 0$ в остальных точках $\mathbb{R}_2$ (см. рис. 11а).

Тогда функция $\psi_1(\cdot) = (T_1\psi)(\cdot)$ равна единице лишь на сторонах треугольника с вершинами x_0, x_1, x_2 (рис. 11б), $\psi_2(\cdot) = (T_2\psi)(\cdot)$ равна единице лишь всюду в этом треугольнике, равно как и все функции $(T_k\psi)(\cdot), k = 2, 3, \ldots$ (см. рис 11в).

Теорема 4. *Пусть функция $\psi(\cdot) \in \Psi(\mathbb{R}_n)$, непрерывна и*

$$(M_k\psi)(x) \triangleq \sup\Big\{\min(\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)) | x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}_n, \\ x = \frac{x_0 + \ldots + x_k}{k+1}\Big\}, \quad x \in \mathbb{R}_n.$$

Тогда $(M_k\psi)(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} (T_n\psi)(x)$, $x \in \mathbb{R}_n$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$
\begin{gathered}
(M_k\psi)(x) = \sup\Big\{\min(\psi(x_0),...,\psi(x_k))|x_0,...,x_k \in \mathbb{R}_n,\ x = \tfrac{x_0+...+x_k}{k+1},\\
x \in \mathrm{co}\{x_0,\dots,x_k\}\Big\} \leqslant \sup\{\min(\psi(x_0),\dots,\psi(x_k))|x_0,\dots,x_k \in \mathbb{R}_n,\\
x \in \mathrm{co}\{x_0,\dots,x_k\}\} = (T_k\psi)(x) \leqslant (T_n\psi)(x),\ x \in \mathbb{R}_n,\ k = 1,2,\dots
\end{gathered} \tag{17}
$$

Далее выберем произвольно $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}_n$ и определим выпуклую комбинацию $\lambda_0^{(\varepsilon)} x_0^{(\varepsilon)} + \ldots + \lambda_n^{(\varepsilon)} x_n^{(\varepsilon)} = x$ так, чтобы

$$
\min(\psi(x_0^{(\varepsilon)}),\dots,\psi(x_n^{(\varepsilon)})) \geqslant (T_n\psi)(x) - \varepsilon. \tag{18}
$$

Для достаточно большого k запишем следующее представление для x

$$
x = \frac{x_0^{(k)} + \ldots + x_k^{(k)}}{k+1} = \frac{k_0(k)}{k+1} y_0^{(k)} + \ldots + \frac{k_n(k)}{k+1} y_n^{(k)},
$$

где среди $x_0^{(k)},\dots,x_k^{(k)}$ $k_0(k)$ равных $y_0^{(k)}$, ..., $k_n(k)$ равных $y_n^{(k)}$. Для этого достаточно выбрать $y_0^{(k)} = \dfrac{x_0^{(\varepsilon)}\lambda_0^{(\varepsilon)}}{k_0(k)/(k+1)}, \dots, y_n^{(k)} = \dfrac{x_n^{(\varepsilon)}\lambda_n^{(\varepsilon)}}{k_n(k)/(k+1)}$. Выбрав $k_0(k),\dots,k_n(k)$ так, чтобы при $k \to \infty$

$$
\frac{k_0(k)}{k+1} \to \lambda_0^{(\varepsilon)},\dots,\frac{k_n(k)}{k+1} \to \lambda_n^{(\varepsilon)},
$$

найдем, что $y_0^{(k)} \to x_0^{(\varepsilon)},\dots,y_n^{(k)} \to x_n^{(\varepsilon)}$ и, учитывая непрерывность $\psi(\cdot)$ и соотношения (17), (18), найдем:

$$
\begin{gathered}
(T_n\psi)(x) \geqslant (M_k\psi)(x) \geqslant \min(\psi(x_0^{(k)}),...,\psi(x_k^{(k)})) =\\
= \min(\psi(y_0^{(k)}),...,\psi(y_n^{(k)})) \xrightarrow[k\to\infty]{} \min(\psi(x_0^{(\varepsilon)}),...,\psi(x_n^{(\varepsilon)})) \geqslant (T_n\psi)(x) - \varepsilon.
\end{gathered}
$$

Отсюда следует, что $(T_n\psi)(x) = \lim\limits_{k\to\infty}(M_k\psi)(x), \quad x \in \mathbb{R}_n$.

4. Асимптотика распределения нечеткого элемента ζ_k (8) при $k \to \infty$

Покажем, что $\Phi(\mathbb{R}_n)$ — класс предельных при $k \to \infty$ распределений нечеткого элемента ζ_k (8).

Определение. Последовательность нечетких элементов $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ назовем сходящейся по распределению к нечеткому элементу ζ, если $\varphi^{\xi_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi^{\zeta}(x), \quad x \in \mathbb{R}_n$.

Следующий результат, который является предельной теоремой для распределений ζ_k (8) при $k \to \infty$, получается как следствие теорем 2, 3.

Теорема 5. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ — последовательность взаимно независимых нечетких элементов, каждый из которых является копией нечеткого элемента ξ, и $\zeta_k = \dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{k}$. Тогда, если*

1. *$\varphi^{\xi}(\cdot) : \mathbb{R}_n \to [0,1]$ — непрерывная функция, то при $k \to \infty$*

$$\varphi^{\zeta_k}(x) \to (T_n \varphi^{\xi})(x) \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

то есть ζ_k при $k \to \infty$ сходится по распределению к нечеткому элементу ζ, распределение которого $\varphi^{\zeta}(\cdot) = (T_n\varphi^{\xi})(\cdot) \in \Phi(\mathbb{R}_n)$.

2. *Если $\varphi^{\xi}(\cdot) \in \Phi(\mathbb{R}_n)$, то $\varphi^{\zeta_k}(x) = \varphi^{\xi}(x), \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad k = 1, 2 \ldots$*

На рис. 12 приведен пример исходного $\varphi^{\xi}(\cdot)$ и предельного $\varphi^{\zeta}(\cdot)$ распределений.

5. О предельных теоремах для последовательностей зависимых наблюдений

Рассмотренные предельные теоремы на самом деле не характерны для последовательностей нечетких элементов, моделирующих физические измерения. Дело в том, что в этих случаях распределения возможностей в значительной степени определяются физическими закономерностями, которые, как правило, приводят к теоретико-возможностной зависимости измерений. Действительно, при физических измерениях, выполняемых по схеме (3), статистическая природа и более того — статистическая независимость ошибок ν_1, ν_2, ..., рассматриваемых как случайные величины, обычно не вызывает сомнений даже тогда, когда распределения вероятностей ν_1, ν_2, ... неизвестны. А это при достаточно естественных предположениях приводит к тому, что ошибки $\nu_1, \nu_2, \ldots$, в условиях недостаточной стохастической информации рассматриваемые как нечеткие величины, оказываются зависимыми в теоретико-возможностном смысле.

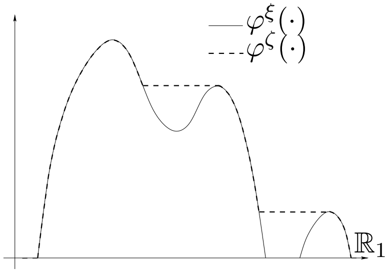

Рис. 12. Пример исходного $\varphi^\xi(\cdot)$ (тонкая сплошная) и предельного $\varphi^\zeta(\cdot)$ (полужирный пунктир) распределений.

Пусть, например, $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — взаимно независимые копии случайной величины ν, плотность распределения вероятностей которой $\rho^\nu(\cdot) : \mathbb{R}_1 \to [0, \infty)$ неизвестна, известно лишь, что $\max\limits_{x \in \mathbb{R}_1} \rho^\nu(x) = \rho^\nu(0) < \infty$ и, естественно, $\rho^\nu(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, ибо $\int\limits_{\mathbb{R}_1} \rho^\nu(x)dx = 1$. Обозначим $\rho^{\nu_1,\ldots,\nu_n}(x_1, \ldots, x_n) = \rho^\nu(x_1) \ldots \rho^\nu(x_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_1$, плотность распределения вероятностей $\nu_1, \ldots, \nu_n$. Самое общее предположение о распределении возможностей $\varphi^{\nu_1,\ldots,\nu_n}(\cdot, \ldots, \cdot)$ ошибок $\nu_1, \ldots, \nu_n$, рассматриваемых как нечеткие величины, состоит в том, что:

- $\varphi^{\nu_1,\ldots,\nu_n}(x_1, \ldots, x_n) = f(\rho)$ $(= \text{const})$ для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_1$, для которых $\rho^{\nu_1,\ldots,\nu_n}(x_1, \ldots, x_n) = \rho$ $(= \text{const})$, и
- $f(\rho_1) \leqslant f(\rho_2)$, если $\rho_1 \leqslant \rho_2$.

Точнее, предположим, что $\varphi^\nu(x) = F(\rho^\nu(x)/\rho^\nu(0))$, $x \in \mathbb{R}_1$, $\varphi^{\nu_1,\ldots,\nu_n}(x_1, \ldots, x_n) = F\left(\dfrac{\rho^\nu(x_1) \ldots \rho^\nu(x_n)}{(\rho^\nu(0))^n}\right)$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_1$, $n = 1, 2, \ldots$, где функция $F(\cdot) : [0, 1] \to [0, 1]$ непрерывна на $(0, 1]$, монотонно не убывает, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

Пусть $\rho^\nu(\cdot)$, $x \in (-\infty, 0]$, монотонно не убывает. Тогда для распределения возможностей нечеткой величины $\zeta^{(n)} = \max(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, рассмотренной в разделе 1, найдем

$$\varphi^{\zeta^{(n)}}(z) = \sup\Big\{F\Big(\frac{\rho^\nu(x_1)\ldots\rho^\nu(x_n)}{(\rho^\nu(0))^n}\Big)\,|\; x_1,\,\ldots,\,x_n \in \mathbb{R}_1,$$
$$\max(x_1,\,\ldots,\,x_n) = z\Big\} =$$
$$= F\left(\frac{\Big(\sup\limits_{x\leqslant z}\rho^\nu(x)\Big)^{n-1}\rho^\nu(z)}{(\rho^\nu(0))^n}\right) = \begin{cases} F(\rho^\nu(z)/\rho^\nu(0)), & z \geqslant 0, \\ F((\rho^\nu(z)/\rho^\nu(0))^n), & z < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Соответственно, если $\rho^\nu(x)$, $x \in [0,\infty)$, монотонно не возрастает, то для распределения $\zeta_{(n)} = \min(\nu_1,\,\ldots,\,\nu_n)$ получим

$$\varphi^{\zeta_{(n)}}(z) = \sup\Big\{F\Big(\frac{\rho^\nu(x_1)\ldots\rho^\nu(x_n)}{(\rho^\nu(0))^n}\Big)\,|\; x_1,\,\ldots,\,x_n \in \mathbb{R}_1,$$
$$\min(x_1,\,\ldots,\,x_n) = z\Big\} =$$
$$= F\left(\frac{\Big(\sup\limits_{x\geqslant z}\rho^\nu(x)\Big)^{n-1}\rho^\nu(z)}{(\rho^\nu(0))^n}\right) = \begin{cases} F((\rho^\nu(z)/\rho^\nu(0))^n), & z > 0, \\ F(\rho^\nu(z)/\rho^\nu(0)), & z \leqslant 0. \end{cases} \tag{20}$$

Формулы (19) и (20) при оговоренных условиях монотонности $\rho^\nu(\cdot)$ позволяют получить асимптотики распределений $\varphi^{\zeta^{(n)}}(\cdot)$ и $\varphi^{\zeta_{(n)}}(\cdot)$ при $n\to\infty$, а именно, если при $z \neq 0$ $\rho^\nu(z)/\rho^\nu(0) < 1$, то

$$\varphi^{\zeta^{(n)}}(z) \to \begin{cases} F(\rho^\nu(z)/\rho^\nu(0)) = \varphi^\nu(z), & z \geqslant 0, \\ F(+0), & z < 0, \end{cases} \tag{21}$$

$$\varphi^{\zeta_{(n)}}(z) \to \begin{cases} F(+0), & z > 0, \\ F(\rho^\nu(z)/\rho^\nu(0)) = \varphi^\nu(z), & z \leqslant 0, \end{cases} \tag{22}$$

где $F(+0) \triangleq \lim\limits_{t\to 0} F(t) \geqslant F(0) = 0$.

Но предельную теорему для распределений $\zeta^{(n)} = \max(\nu_1,\,\ldots,\,\nu_n)$ и $\zeta_{(n)} = \min(\nu_1,\,\ldots,\,\nu_n)$ можно сформулировать, не требуя монотонности $\rho^\nu(\cdot)$ справа и слева от точки максимума.

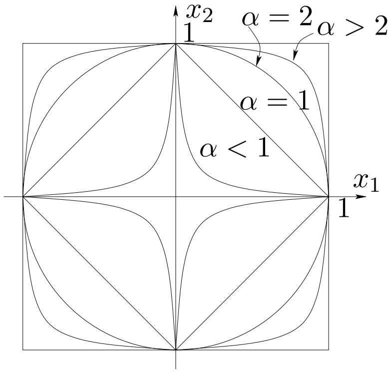

Рис. 13. Линии $|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha = 1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_1$, $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$, постоянных значений плотности $\rho^{\nu_1,\nu_2}(x_1, x_2) \sim e^{-(|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha)}$. Граница квадрата $\max(|x_1|, |x_2|) = 1$ (предельная при $\alpha \to \infty$ кривая $|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha = 1$) является линией постоянного значения распределения $\min(e^{-|x_1|}, e^{-|x_2|}) = e^{\min(-|x_1|, -|x_2|)} = e^{-\max(|x_1|, |x_2|)}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_1$, соответствующего теоретико-возможностной независимости ν_1 и ν_2.

Теорема 6. *Пусть*

$$\varphi^{\nu_1, \dots, \nu_n}(x_1, \dots, x_n) = F\left(\frac{\rho^\nu(x_1) \cdots \rho^\nu(x_n)}{(\rho^\nu(0))^n}\right), \qquad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_1$$

— распределение нечетких величин $\nu_1, \dots, \nu_n$, $n = 1, 2, \dots$ Тогда

- *если для $z < 0$ $\sup\limits_{x \leqslant z} \rho^\nu(x) < \rho^\nu(0)$, то при $n \to \infty$ для распределения $\varphi^{\zeta^{(n)}}(\cdot)$ имеет место сходимость (21);*
- *если для $z > 0$ $\sup\limits_{x \geqslant z} \rho^\nu(x) < \rho^\nu(0)$, то при $n \to \infty$ для распределения $\varphi^{\zeta_{(n)}}(\cdot)$ имеет место сходимость (22).*

Доказательство следует из первых равенств в (19) и (20), которые верны без предположений о монотонности $\rho^\nu(\cdot)$ на $(-\infty, 0]$ и на $[0, \infty)$.

Если, в частности, $\rho^\nu(x) \sim e^{-|x|^\alpha}$, $\alpha > 0$, и соответственно

$$\rho^{\nu_1,\dots,\nu_n}(x_1, \dots, x_n) \sim e^{-(|x_1|^\alpha + \dots + |x_n|^\alpha)}, \; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_1, \; \alpha > 0, \quad (23)$$

то, согласно (19), (20)

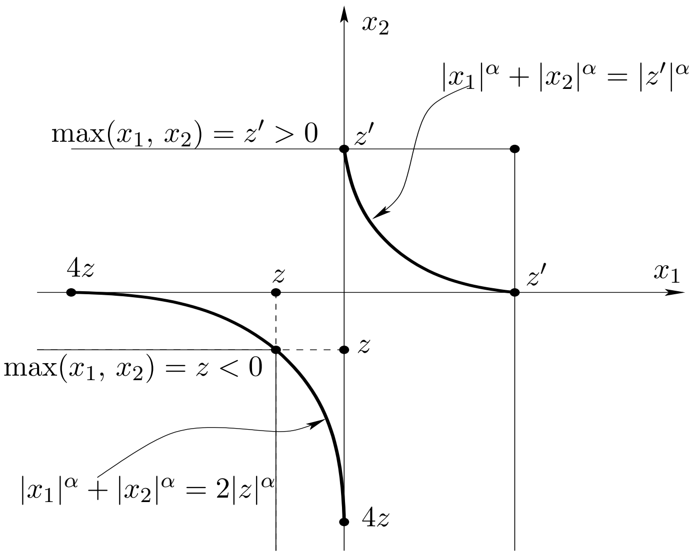

Рис. 14. Решение (24) для $\varphi^{\zeta^{(2)}}(z)$, $z \in \mathbb{R}_1$, при $\alpha = 1/2$, см. рис. 13. Жирно выделены фрагменты линий постоянных значений плотности $\rho^{\nu_1,\nu_2}(\cdot, \cdot)$, на которых достигается sup в (19) при $z < 0$ и $z' > 0$; $2|z|^{1/2}$ и $|z'|^{1/2}$ суть наименьшие значения const, при которых множество $|x_1|^{1/2}+|x_2|^{1/2} = \text{const}$ пересекается с множествами $\max(x_1, x_2) = z < 0$ и $\max(x_1, x_2) = z' > 0$ соответственно.

$$\varphi^{\zeta^{(2)}}(z) = \begin{cases} F(e^{-|z|^\alpha}), & z \geqslant 0 \\ F(e^{-2|z|^\alpha}), & z < 0 \end{cases} \text{ и } \varphi^{\zeta_{(2)}}(z) = \begin{cases} F(e^{-2|z|^\alpha}), & z > 0 \\ F(e^{-|z|^\alpha}), & z \leqslant 0 \end{cases}. \tag{24}$$

На рис. 13–15 приведены построения, поясняющие равенства (24) и общий вывод, сформулированный в теореме 6.

В рассматриваемом случае плотностей (23) легко получить распределение и для нечеткого элемента $\zeta_k = \dfrac{\nu_1 + \ldots + \nu_k}{k}$ (8), а именно (см. рис. 16 а, б)

$$\varphi^{\zeta_k}(z) = \begin{cases} F(e^{-|kz|^\alpha}), & \alpha \leqslant 1 \\ F(e^{-k|z|^\alpha}), & \alpha > 1 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}_1, \tag{25}$$

и при этом имеет место следующая предельная теорема.

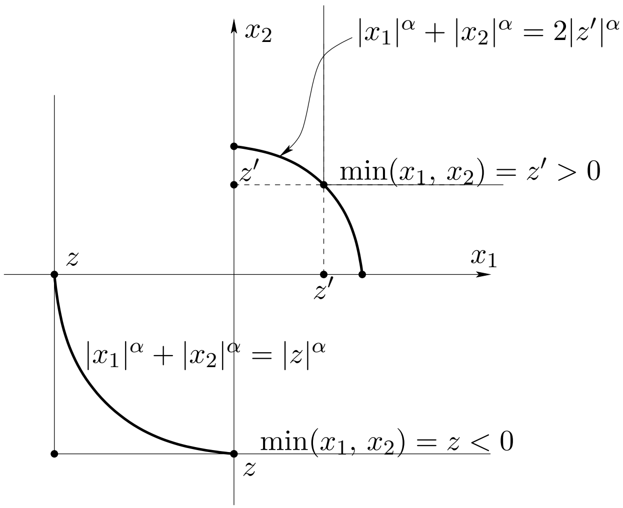

Рис. 15. Решение (24) для $\varphi^{\zeta(2)}(z)$, $z \in \mathbb{R}_1$, $\alpha = 2$. Жирно выделены фрагменты линий постоянных значений $\rho^{\nu_1, \nu_2}(\cdot, \cdot)$, на которых достигается sup в (20) при $z < 0$ и $z' > 0$; z^2 и $2(z')^2$ суть наименьшие значения const, при которых множество $x_1^2 + x_2^2 = \mathrm{const}$ пересекается с множествами $\min(x_1, x_2) = z$ и $\min(x_1, x_2) = z'$ соответственно.

Теорема 7. *Пусть распределение* $\varphi^{\nu_1,\ldots,\nu_n}(x_1, \ldots, x_n) = F(e^{-(|x_1|^\alpha + \ldots + |x_n|^\alpha)})$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_1$, $\alpha > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $\zeta_n = \dfrac{\nu_1 + \ldots + \nu_n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Тогда при* $n \to \infty$

$$\varphi^{\zeta_n}(z) \to \begin{cases} 1, & \text{если } z = 0 \\ 0, & \text{если } z \neq 0 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}_1.$$

Доказательство следует из выражений (25).

Автор выражает признательность Г. Животникову, О. Жучко за содержательные дискуссии и помощь при оформлении рукописи, а также РФФИ, при финансовой поддержке которого выполнена эта работа (грант 02–01–00424).

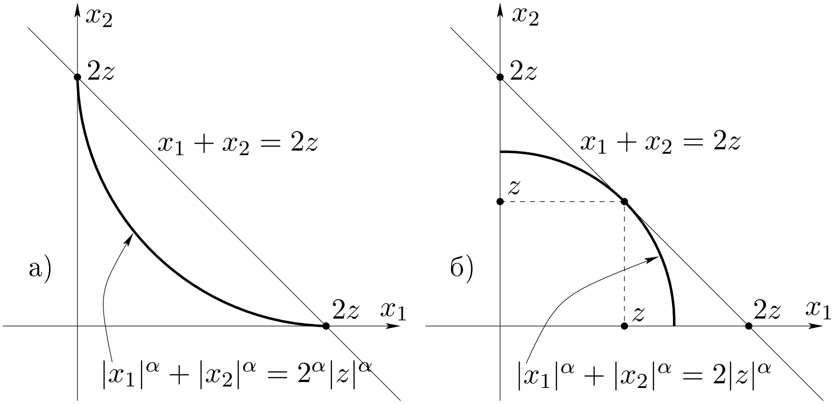

Рис. 16. Решение (25) задачи вычисления $\varphi^{\zeta_k}(z) = \sup\{F(e^{-(|x_1|^\alpha + \ldots + |x_k|^\alpha)})|\ x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}_1,\ x_1 + \ldots + x_k = kz\}$, $z \in \mathbb{R}_1$, при $k = 2$, а) для $\alpha \leqslant 1$, б) для $\alpha > 1$. Жирно выделены линии постоянных значений плотности $\rho^{\nu_1, \nu_2}(\cdot, \cdot)$, на которых достигается sup в этом выражении для $\varphi^{\zeta_2}(z)$. При $0 < \alpha \leqslant 1$ $2^\alpha |z|^\alpha$ — наименьшее значение const, при котором множество $|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha = \text{const}$ пересекается с множеством $x_1 + x_2 = 2z$. Поэтому максимальное значение $\varphi^{\nu_1, \nu_2}(x_1, x_2) = F(e^{-|x_1|^\alpha - |x_2|^\alpha})$ на множестве $x_1 + x_2 = 2z$ равно $F(e^{-2^\alpha |z|^\alpha})$. При $\alpha > 1$ $2|z|^\alpha$ — наименьшее значение const, при котором множество $|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha = \text{const}$ пересекается с множеством $x_1 + x_2 = 2z$. Поэтому максимальное значение $F(e^{-|x_1|^\alpha - |x_2|^\alpha})$ на множестве $x_1 + x_2 = 2z$ равно $F(e^{-2|z|^\alpha})$.

Обозначения

E	символ математического ожидания;
Pr, pr	вероятность;
P, p	возможность;
$\mathbb{R}_n$	n-мерное евклидово пространство;
$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_n$	выпуклое множество в $\mathbb{R}_n$;
$\Phi(\mathcal{D})$	класс функций $\varphi(\cdot) : \mathcal{D} \to [0, 1]$, удовлетворяющих условию (9);
$\Psi(\mathcal{D})$	класс всех функций $\psi(\cdot) : \mathcal{D} \to [0, 1]$;
T_k	оператор, действующий из $\Psi(\mathcal{D})$ в $\Psi(\mathcal{D})$ согласно (10), $k = 1, 2, \ldots$

Список литературы

[1] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Наука, 1984.

[2] Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[3] Пытьев Ю.П. О стохастических моделях возможности // Интеллектуальные системы. 2002. Т. 6. Вып. 1–4. С. 25–62.

[4] Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991.

[5] Гумбель Э. Статистики экстремальных значений. М.: Мир, 1965.

[6] Дейвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979.

[7] Пытьев Ю.П. Математическое моделирование измерительно-вычислительных систем. М.: Наука, 2002.