# Об одном простом критерии планарности графов*

А.В. Галатенко

В работе приводится простое доказательство критерия планарности графов, предложенного Маклейном [1].

## Введение

Известно решение проблемы планарности конечных графов, принадлежащее Куратовскому и Понтрягину [2], изложение которого до сих пор представляется громоздким. Среди многих попыток упростить этот критерий выделяются условия, найденные Маклейном [1]. В предлагаемой работе дается упрощенное доказательство последнего критерия.

## 1. Основные понятия и результаты

Графом $G$ называется пара $(V, E)$, где $V$ — конечное непустое множество, а $E$ — конечное множество неупорядоченных пар элементов $V$. Элементы $V$ называются вершинами графа, элементы $E$ — ребрами.

Подграфом $G'$ графа $G$ называется пара $(V', E')$, где $V' \subseteq V, E' \subseteq E$, и $G'$ является графом. Пусть $E' \subseteq E$ — подмножество ребер графа $G$. Говорим, что $G'$ — подграф, порожденный $E'$, если $G'$ — минимальный подграф $G$ с множеством ребер $E'$. Если $A$ и $B$ — подграфы $G$, то $A \cap B$ — подграф, порожденный пересечением, $A + B$ — объединением, $G \setminus A$ — разностью соответствующих множеств ребер.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 02–01–00162а.

Пусть $v_1, v_2 \in V$, $e = (v_1, v_2) \in E$. Тогда говорим, что ребро $e$ и вершины $v_1$ и $v_2$ инцидентны. Число ребер, инцидентных некоторой вершине, называется степенью этой вершины.

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — различные вершины $G$, причем $(v_i, v_{i+1}) \in E, i = 1, \ldots, n-1$. Тогда подграф, порожденный $\{(v_i, v_{i+1}) | i = 1, \ldots, n-1\}$, называется цепью. Если все вершины цепи, кроме, может быть, $v_1$ и $v_n$, имеют степень 2 в G, говорим, что цепь является подвешенной. Если $(v_1, v_n) \in E$, подграф

$$(\{v_1, \ldots, v_n\}, \{(v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_1, v_n)\})$$

называется циклом.

Если существует отображение графа $G$ в евклидову плоскость, при котором вершины графа отображаются в точки, ребра — в спрямляемые кривые, соединяющие соответствующие точки, причем кривые могут пересекаться только в концевых точках, $G$ называется планарным графом, а образ $G$ — плоским графом. Области, определяемые плоским графом, назовем его гранями, при этом неограниченная область называется внешней гранью, а остальные — внутренними.

Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — циклы из $G$. Суммой $C_1, \ldots, C_n$ по модулю 2 назовем подграф, порожденный всеми ребрами, входящими в нечетное число $C_1, \ldots, C_n$. Система циклов $C_1, \ldots, C_n$ называется полной, если любой цикл в $G$ является суммой по модулю 2 некоторых циклов из $C_1, \ldots, C_n$.

**Теорема 1.** *Граф $G$ является планарным точно тогда, когда в нем существует полная система циклов, каждое ребро которых не принадлежит более чем двум циклам.*

## 2. Вспомогательные утверждения

Граф $G$ называется сепарабельным, если он обладает двумя подграфами $F_1$ и $F_2$, такими, что $F_1 + F_2 = G$, а $F_1$ и $F_2$ не имеют общих ребер и могут иметь не более одной общей вершины, причем и у $F_1$, и у $F_2$ множество ребер непусто.

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Цикломатическим числом $G$ назовем $N(G) = |E| - |V| + 1$.

**Лемма 1.** *Если $G$ — несепарабельный граф, $N(G) > 1$, $R$ — цикл из $G$, то в $R$ существует цепь $A$, подвешенная в $G$, $G \setminus A$ — несепарабельный граф, и $N(G \setminus A) = N(G) - 1$.*

**Доказательство.** Построим последовательность несепарабельных подграфов $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset G$. Так как $N(G) > 1$, существует ребро $e_1$, не принадлежащее $R$. Положим $H_1$ равным некоторому циклу, содержащему $e_1$ и некоторое ребро из $R$ (в силу несепарабельности $G$ такой цикл имеется). Если $H_{m-1} \neq G$, $H_m$ строим так: берем ребро $e_m$ из $G \setminus H_{m-1}$, не содержащееся в $R$ (если такое имеется). Так как $G$ несепарабелен, существует цикл $D$, содержащий $e_m$ и некоторое ребро из $H_{m-1}$. Пусть $A_m$ — максимальная цепь, лежащая на $D$, содержащая $e_m$ и не содержащая ребер из $H_{m-1}$. Положим $H_m = H_{m-1} + A_m$.

Каждый из $H_m$ — несепарабельный граф. Это легко показать индукцией по $m$. Покажем теперь, что из $R \subset H_m$ следует, что $H_m = G$. По построению, $R \not\subset H_1$. Возьмем наименьшее $m$, для которого $R \subset H_m$. В этом случае $R \not\subset H_{m-1}$, и в $R$ существует ребро $d$, не принадлежащее $H_{m-1}$. Пусть $F$ — максимальная цепь, лежащая на $R$, содержащая $d$ и не содержащая ребер из $H_{m-1}$. По построению $A_m$ и в силу максимальности $A_m$ и $F$, $A_m = F$. Итак, $A_m \subset R$, и тогда, по построению $A_m$, $G \setminus H_{m-1}$ содержится в $R$. Следовательно, $H_m = G$.

По построению, $N(H_m) = m$. Таким образом, процесс заканчивается на $H_n$ при $n = N(G)$. Последняя из добавленных цепей $A$ подвешена в $H_n = G$ и содержится в $R$, следовательно, $N(G \setminus A) = n - 1$. Лемма 1 доказана.

Из приведенной в доказательстве леммы 1 конструкции вытекает

**Следствие 1.** Из любой полной системы циклов графа $G$ можно выделить полную подсистему из $N(G)$ циклов.

Пусть $G$ — несепарабельный граф, $C_1, \ldots, C_n$ — полная система циклов, в которую любое ребро входит не более двух раз. Без ограничения общности, $n = N(G)$. Обозначим через $R$ сумму всех циклов системы по модулю 2:

$$R = C_1 + C_2 + \ldots + C_n \pmod 2.$$

Очевидным образом сумма не равна нулю. Назовем ее ободом.

Далее в этом разделе под полной системой циклов мы будем понимать полную систему из $N(G)$ циклов, в которую каждое ребро входит не более двух раз, а под несепарабельным графом — несепарабельный граф с полной системой циклов.

**Лемма 2.** *Если $G$ — несепарабельный граф, то его обод является циклом.*

**Доказательство.** Предположим противное. Так как всякая вершина $R$ имеет четную степень, $R$ в собственном смысле содержит некоторый цикл $D$. Без ограничения общности

$$D = C_1 + \ldots + C_m \pmod 2.$$

Так как $D \neq R$, $n > m$, поэтому граф $F = C_{m+1} + \ldots + C_n (\mathrm{mod}\ 2)$ непуст. Покажем, что $G$ можно разделить на $D$ и $F$. Если ребро $e$ принадлежит $D \cup F$, то $e$ содержится ровно в одном из первых $m$ циклов и ровно в одном из $n - m$ последних циклов. Следовательно, $e$ содержится в $D$, но не содержится в $R$. Полученное противоречие доказывает, что $D \cup F$ пусто. Так как $G$ — несепарабельный, существует цикл $H$, содержащий как ребра из $D$, так и ребра из $F$. Разложим этот цикл по полной системе. Рассмотрим $H'$ — часть разложения, соответствующую первым $m$ циклам. Она непуста и не равна $H$, так как в $H$ есть ребра и из $D$, и из $F$. Так как $D$ и $F$ не пересекаются, в $H'$ содержит некоторый цикл. Но цикл $H$ не может содержать собственных подциклов. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

**Лемма 3.** *Если $G$ — несепарабельный граф, $N(G) > 1$, то в $G$ существует подвешенная цепь $A$, для которой*

(i) *$G \setminus A$ несепарабелен, $N(G \setminus A) = N(G) - 1$;*

(ii) *$A$ содержится в $R$ и ровно в одном $C_j$, например, в $C_n$;*

(iii) *$C_1, \ldots, C_{n-1}$ образуют полную систему для $G \setminus A$;*

(iv) *концы $p$ и $q$ цепи $A$ принадлежат $R'$, такому что*

$$R' = C_1 + \ldots + C_{n-1} \pmod 2;$$

(v) *R' состоит из двух цепей $R \setminus A$ и $C_n \setminus A$, соединяющих $p$ и $q$.*

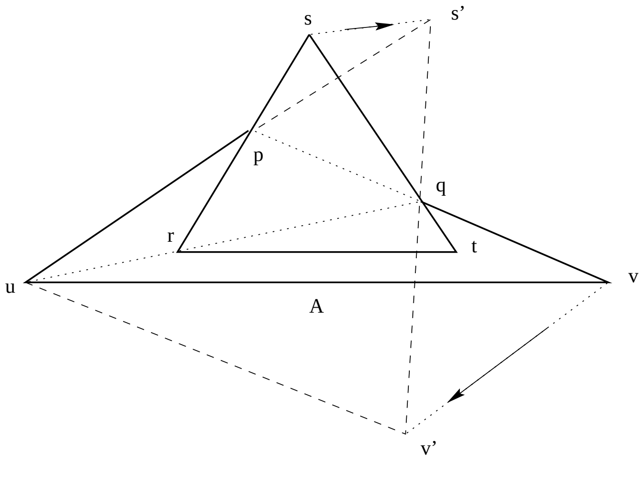
**Доказательство.** (i), (ii) и (iii) следуют из лемм 1 и 2.

Покажем, что $A = C_n \cap R$. Предположим, что существует ребро $e$ из $C_n \cap R$, не лежащее в $A$. Тогда $e$ содержится в $G \setminus A$ и, следовательно, входит в некоторый цикл $D$ из $G \setminus A$. В силу (iii), $D$ можно представить в виде суммы некоторых циклов из $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Но $e$ содержится в $C_n$ и $R$, поэтому представление $D$ в таком виде невозможно. Следовательно, $A = C_n \cap R$. Так как $R' = R + C_n (\mathrm{mod}\ 2)$, $R'$ состоит из ребер, принадлежащих либо $R$, либо $C_n$, но не принадлежащих $C_n \cap R = A$. Значит, $R'$ состоит из ребер $R \setminus A$ и $C_n \setminus A$. Так как $R$ — цикл, $R \setminus A$ и $C_n \setminus A$ — цепи, соединяющие $p$ и $q$. Для доказательства (iv) и (v) остается заметить, что $R \setminus A$ лежит в $R'$, следовательно, концы этой цепи также лежат в $R'$. Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** *Несепарабельный граф с полной системой циклов $C_1, \ldots, C_n$ может вкладываться в плоскость так, что каждый из циклов системы ограничивает конечную область, а обод — бесконечную область.*

**Доказательство.** Доказательство проведем индукцией по $N(G)$. Ребра будем отображать в ломаные, обод — в равносторонний треугольник. При $N(G) = 1$ утверждение очевидно.

Пусть $N(G) = n$. Тогда по лемме 3 в $G$ есть подвешенная цепь $A$, что $G \setminus A$ — несепарабелен, содержит полную систему циклов, и



$N(G \setminus A) < N(G)$. По предположению индукции, $G \setminus A$ можно отобразить на плоскость, при этом обод будет равносторонним треугольником. По лемме 3, подвешенную цепь $A$ можно отобразить в ломаную, лежащую вне треугольной области и пересекающуюся с треугольником по вершинам $p$ и $q$. Рассмотрим случай, когда $p$ и $q$ лежат на разных сторонах треугольника. Процесс преобразования полученного графа в равносторонний треугольник изображен на рис. 1. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

## 3. Доказательство теоремы

*Необходимость.* Рассмотрим плоский граф. В качестве системы циклов возьмем границы внутренних граней. Очевидным образом, система удовлетворяет условиям теоремы.

*Достаточность* следует из независимости циклов для различных несепарабельных компонент и леммы 4.

В заключение автор благодарит академика В.Б. Кудрявцева за внимание к работе.

## Список литературы

[1] Маклейн С. Комбинаторное условие для плоских графов // Кибернетический сборник. Вып. 7. М.: Мир, 1970. С. 133–144.

[2] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.