Оптимальное решение задачи интервального поиска на булевом кубе в классе сбалансированных древовидных схем*

Т.Д. Блайвас

Показано, что задача поиска слов, в которых известны только некоторые буквы (как в кроссвордах) сводится к задаче интервального поиска на булевом кубе. Получено оптимальное решение задачи интервального поиска на булевом кубе в классе сбалансированных древовидных схем фиксированной высоты. Найден порядок сложности решения в классе всех сбалансированных древовидных схем.

1. Введение

В работе исследуется следующая задача информационного поиска. Имеется некоторое подмножество V n-мерного булева куба B_2^n, называемое библиотекой. На булевом кубе берется произвольный интервал (u, w), где $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ и $u \preceq w$, то есть $u_i \leqslant w_i$ $i = 1, \ldots, n$. Требуется определить все такие элементы $y \in V$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, называемые записями, для которых выполнено $u \preceq y \preceq w$.

Приведем интерпретацию данной задачи. Допустим, мы имеем частично разгаданный кроссворд, в котором все слова имеют одинаковую длину. Отгадываем слово, в котором известны не все буквы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01–01–00748).

Требуется найти в словаре такие слова, которые потенциально могут быть разгадываемым словом.

Задачу можно решать, если на каждом шаге алгоритма проверять условие $u_j \leqslant y_j \leqslant w_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$ для фиксированного набора компонент записи, причем номера компонент одинаковы для всех записей на одном шаге алгоритма.

Классу таких алгоритмов удобно сопоставить сбалансированные информационные деревья.

Получены следующие результаты.

1. В классе сбалансированных деревьев фиксированной высоты найдено оптимальное решение, представляемое при помощи решения линейной системы уравнений.

2. Получен порядок функции сложности решения в классе всех сбалансированных деревьев.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Мы будем использовать терминологию и обозначения из работы [1], но поскольку в этой работе рассматриваются только древовидные схемы, то здесь будет приведена несколько упрощенная версия понятия информационного графа.

Если X — множество символов запросов с заданным на нем вероятностным пространством $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, где σ — алгебра подмножеств множества X; $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на σ; Y — множество символов данных (записей); ρ — бинарное отношение на $X \times Y$, называемое отношением поиска, то пятерка $S = \langle X, Y, \rho, \sigma, \mathbf{P} \rangle$ называется *типом*. Тройка $I = \langle X, V, \rho \rangle$, где V — некоторое конечное подмножество множества Y, называемое библиотекой, называется задачей информационного поиска (ЗИП) типа S. Содержательно ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$ состоит в перечислении для произвольно взятого запроса $x \in X$ всех и точно тех записей $y \in V$, что $x \rho y$. Если $\mathcal{F}$ — суть множества символов одноместных предикатов, определенных на X, $\mathcal{F}$ называется базовым множеством и описывает множество элементарных операций, используемых при решении задачи информационного поиска.

Над базовым множеством $\mathcal{F}$ определяется понятие *информационного дерева* (ИД). В конечной многополюсной древовидной сети выбирается вершина — полюс, называемая корнем. Остальные полюса называются листьями и им приписываются записи из Y. Задается ориентация от корня к листьям. Ребрам ИД приписываются предикаты из множества $\mathcal{F}$. Таким образом нагруженное многополюсное ориентированное дерево называют информационным деревом над базовым множеством $\mathcal{F}$. Затем определяется *функционирование ИД*. Ребро проводит запрос $x \in X$, если предикат ребра истинен на x; ориентированная цепочка ребер проводит x, если каждое ребро цепочки проводит x; запрос x проходит в вершину β ИД, если существует ориентированная цепь, ведущая из корня в вершину β, которая проводит x; запись y, приписанная листу α, попадает в ответ ИД на x, если x проходит в лист α. Ответом ИД U на запрос x называют множество записей, попавших в ответ U на x, и обозначают его $\mathcal{J}_U(x)$. Эту функцию $\mathcal{J}_U(x)$ считают результатом функционирования ИД U. ИД наряду со структурой данных описывает алгоритм соответствующего поиска. Процесс поиска при заданном запросе начинается с корня и распространяется в зависимости от нагрузочных предикатов, возможно, сразу по нескольким направлениям. Если этот процесс на дереве достигает элементов данных, то они включаются в ответ алгоритма.

ИД U *разрешает* ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$, если $\mathcal{J}_U(x) = \{y \in V : x\rho y\}$.

Вводится *сложность ИД*. Предикат $\varphi_\beta(x)$ истинный на x, если x проходит в вершину β, и ложный в противном случае, называется функцией фильтра вершины β. *Сложностью ИД U на запросе $x \in X$* называется число $T(U,x) = \sum_{\beta \in \mathcal{R}} \psi_\beta \cdot \varphi_\beta(x)$, где $\mathcal{R}$ — множество вершин ИД U, ψ_β — количество ребер, исходящих из вершины β. Эта величина равна числу функций, вычисленных алгоритмом поиска, определяемым ИД U, на запросе x.

Если каждая функция из $\mathcal{F}$ — измерима (относительно алгебры σ), то для любого ИД U над $\mathcal{F}$ функция $T(U,x)$ измерима.

Сложностью ИД U называется математическое ожидание величины $T(U,x)$, равное $T(U) = \mathbf{M}_x\, T(U,x)$. Она характеризует среднее время поиска.

Если $f(x)$ — предикат, то обозначим $N_f = \{x : f(x) = 1\}$. Сложностью ребра, исходящего из вершины β, будет число $P(N_{\varphi_\beta})$. Тогда понятно, что для ИД U

$$T(U) = \sum_{\beta \in U} \psi_\beta \cdot P(N_{\varphi_\beta}).$$

Рассмотрим следующую ЗИП. Имеется некоторое k-элементное подмножество n-мерного булева куба $V \in B_2^n$ (библиотека). На булевом кубе задан некоторый интервал (u, w), где $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, и $u \preceq w$, то есть $u_i \leqslant w_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Требуется определить все элементы $y \in V$, удовлетворяющие условию $u \preceq y \preceq w$.

Очевидно, что если $u_i = 1$ для некоторого i, то и $w_i = 1$, а, следовательно, и $y_i = 1$. Аналогично, если $w_i = 0$, то и $y_i = 0$. Таким образом, вышеописанная ЗИП сводится к следующей: есть библиотека $V \in B_2^n$, $|V| = k$, берем запрос $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — трехзначный вектор, компоненты которого могут быть равны либо 1, либо 0, либо 2: если $u_i = 1$, то $x_i = 1$, если $w_i = 0$, то $x_i = 0$, иначе $x_i = 2$. Для данного запроса $x = (x_1, \ldots, x_n)$ хотим найти все $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$, для которых $y_i = x_i$, если $x_i = 1$ или $x_i = 0$, и y_i любое из $\{0, 1\}$, если $x_i = 2$.

Получаем класс задач $S(n) =< B_3^n, B_2^n, \rho >$, где B_3^n и B_2^n трехзначный и двузначный (булев) кубы, соответственно, и $\rho: \quad x\rho y \Leftrightarrow (x_i = y_i) \vee (x_i = 2)$.

Опишем класс ИД, при помощи которых решаются задачи из $S(n)$. *Высотой дерева* назовем длину максимального пути из корня дерева в вершину со степенью полуисхода, равной 0.

Через $\mathcal{D}_{sym}(h)$ обозначим множество всевозможных ИД высоты h, для которых выполняются следующие условия.

1) Из любой вершины на фиксированном ярусе (кроме последнего) выходит одинаковое количество ребер, равное положительной степени двойки.

2) Ребрам ИД приписаны предикаты из следующего множества: $\mathcal{F} = \{f_y\}$, $f_y(x) = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdots x_n^{y_n}$,

$$x_j^{y_j} = \begin{cases} x_j, & \text{если} \quad (y_j = 1) \& (x_j \neq 2) \\ \bar{x}_j, & \text{если} \quad (y_j = 0) \& (x_j \neq 2) \\ 1, & \text{если} \quad (y_j = 2) \vee (x_j = 2) \end{cases},$$

причем $\bar{x}_j$ понимается здесь как отрицание булевой переменной. Эти предикаты приписаны следующим образом. Каждому ярусу i дерева сопоставлено некоторое число m_i, и из каждой вершины i-го яруса выходит 2^{m_i}-е ребер. Ребрам, выходящим из фиксированной (вообще говоря из любой) вершины этого яруса приписываются всевозможные конъюнкции из переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{m_i}}$ и их отрицаний. Для любых двух ребер из одной вершины приписанные им конъюнкции различны. Множества переменных, входящих в конъюнкции на двух различных ярусах, не пересекаются.

Дерево D будем называть симметричным деревом высоты h, если $D \in \mathcal{D}_{sym}(h)$.

Дерево высоты 0 (одну вершину) также будем считать симметричным.

Дерево D назовем *сбалансированным ИД высоты* $h+1$, если оно получено из некоторого ИД $D_s \in \mathcal{D}_{sym}(h)$, добавлением к нему k ребер, где k — любое целое неотрицательно число, причем ребра добавлены следующим образом: если в последнем ярусе симметричного дерева $D_s \in \mathcal{D}_{sym}(h)$ было 2^{l_h} ребер, то из каждой вершины этого яруса в сбалансированном дереве может выходить $k \leqslant 2^{n-l_h}$ ребер. Каждому из этих ребер приписана элементарная конъюнкция длины $n - l_h$ из всех тех переменных (или их отрицаний), которые не входили в конъюнкции предыдущих ярусов. Любые две конъюнкции, приписанные ребрам на новом ярусе, различны. Множество всех таких деревьев для каждого n и $k \leqslant 2^n$ обозначим через $\mathcal{D}_b(n, k, h)$.

Множество задач $I =< B_3^n, V, \rho >$ типа S_n, где $|V| = k$, обозначим через $\mathcal{I}(n, k)$.

Введем понятие сложности ЗИП $I \in \mathcal{I}(n, k)$ в классе сбалансированных деревьев высоты h :

$$T_d(I, h) = \inf_{D \in \mathcal{D}_b(I,n,k,h)} T(D),$$

где $\mathcal{D}_b(I, n, k, h)$ — множество деревьев из $\mathcal{D}_b(n, k, h)$, разрешающих задачу I.

Сложностью задачи $I \in \mathcal{I}(n, k)$ назовем

$$T_d(I) = \min_h T_d(I, h).$$

Обозначим
$$\begin{aligned} &T_l(x) = 2^x + 2^l \left(\tfrac{2}{3}\right)^x, \\ &T_{l,m}(x) = 2^x \left(\tfrac{2}{3}\right)^l + 2^m \left(\tfrac{2}{3}\right)^x, \\ &T_l^k(x) = 2^x \left(\tfrac{2}{3}\right)^l + k \left(\tfrac{2}{3}\right)^x. \end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть* $I \in \mathcal{I}(n,k)$,

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(h) \\ \vdots \\ z_h(h) \end{pmatrix}$$ *— решение системы уравнений* $Az = \hat{b}$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\log_3 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\log_3 1,5 & 1 & -\log_3 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\log_3 1,5 & 1 & -\log_3 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\log_3 1,5 & 1 \end{pmatrix}$$

— трехдиагональная матрица размера $(h \times h)$,

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \log_3(\log_2 1,5) \\ \vdots \\ \log_3(\log_2 1,5) \\ \log_3(\log_2 1,5) + \log_3 k \end{pmatrix}$$ *— столбец высоты* h.

Тогда $T_d(I,h) = 2^{l_1} + 2^{l_2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_1} + \cdot + 2^{l_h} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h-1}} + k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_h}$, *где* $l_1, \dots, l_h$ *выбраны следующим образом:*

$$l_1 = \begin{cases} [z_1], \text{ если } T_{z_2}([z_1]) \leqslant T_{z_2}(]z_1[) \\ ]z_1[\text{ иначе,} \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} [z_i], \text{ если } T_{z_{i-1},z_{i+1}}([z_i]) \leqslant T_{z_{i-1},z_{i+1}}(]z_i[) \\ ]z_i[\text{ иначе,} \end{cases} \quad i = 2, \dots, h-1,$$

$$l_h = \begin{cases} [z_h], \text{ если } T^k_{z_{h-1}}([z_h]) \leqslant T^k_{z_{h-1}}(]z_h[) \\ ]z_h[\text{ иначе.} \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть* $I \in \mathcal{I}(n,k)$. *При* $k \to \infty$

$$T_d(I) = O(k^{2-\log_2 3}).$$

3. Оптимальное решение в классе сбалансированных ИД фиксированной высоты

Пусть мы имеем оптимальное сбалансированное дерево D с параметрами l_i, $i = 1, \ldots, h$, то есть на i-м ярусе симметричного дерева 2^{l_i} ребер, $i = 1, \ldots, h$, а на $(h+1)$-м ярусе соответствующего сбалансированного дерева k ребер, и сложность такого сбалансированного дерева

$$T(D) = t_k(l_1, \ldots, l_h) \stackrel{def}{=} 2^{l_1} + 2^{l_2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_1} + \ldots + k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_h} \tag{2}$$

по определению сложности дерева, так как если β вершина i-го яруса, то $P(N_{\varphi_\beta}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{l_i}$, а $\psi_\beta = 2^{l_{i+1}}$. Далее, для того чтобы зафиксировать структуру дерева D, вместе с записью $T(D)$ будем использовать обозначение $t_k(l_1, \ldots, l_h)$ для сложности дерева.

Докажем теорему 1.

Найдем экстремум функции $T_{l_2}(x)$:

$$T'_{l_2}(x) = 2^x \cdot \ln_2 + 2^{l_2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot (\ln 2 - \ln 3) = 0,$$

$$\ln 2 + 2^{l_2} \cdot (\ln 2 - \ln 3) \cdot \frac{1}{3^x} = 0,$$

$$3^x = \frac{(\ln 3 - \ln 2)}{\ln 2} \cdot 2^{l_2}, \qquad 3^x = 2^{l_2} \cdot \log_2 1,5,$$

$$x = l_2 \cdot \log_3 2 + \log_3(\log_2 1,5) \stackrel{def}{=} \hat{x}.$$

Получаем, что точка $x = \hat{x}$ является стационарной точкой для функции $T_{l_2}(x)$. Проверим, что она является точкой минимума для $T_{l_2}(x)$. Обозначим

$$f = 2^{\hat{x}},$$

$$g = 2^{l_2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\hat{x}},$$

тогда $T_{l_2}(\hat{x}) = f + g$, $\quad T_{l_2}(\hat{x}+1) = 2 \cdot f + \frac{2}{3} \cdot g$, $\quad T_{l_2}(\hat{x}-1) = \frac{1}{2} \cdot f + \frac{3}{2} \cdot g$. Точка $\hat{x}$ была бы точкой минимума при следующих условиях:

$$\begin{cases} f + g < 2 \cdot f + \frac{2}{3} \cdot g \\ f + g < \frac{1}{2} \cdot f + \frac{3}{2} \cdot g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{g}{3} < f \\ \frac{f}{2} < \frac{g}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g < 3 \cdot f \\ f < g \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \frac{g}{f} < 3.$$

Но $\frac{g}{f} = \frac{2^{l_2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\hat{x}}}{2^{\hat{x}}} = \frac{2^{l_2}}{3^{\hat{x}}} = \frac{2^{l_2}}{2^{l_2} \cdot \log_2 1{,}5} = \frac{1}{\log_2 1{,}5} \approx 1,7$, что удовлетворяет условиям минимума.

Найдем экстремум функции $T_{l_{i-1},l_{i+1}}(x)$, $i = 2, \ldots, h-1$.

$$T'_{l_{i-1},l_{i+1}}(x) = 2^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}} \cdot \ln 2 + 2^{l_{i+1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{3} = 0,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}} \cdot \ln 2 + \frac{2^{l_{i+1}}}{3^x} \cdot \ln \frac{2}{3} = 0,$$

$$3^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}} = \frac{(\ln 3 - \ln 2)}{\ln 2} \cdot 2^{l_{i+1}},$$

$$3^x = 2^{l_{i+1}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{l_{i-1}} \cdot \log_2 1,5,$$

$$x = l_{i-1} \cdot \log_3 1,5 + l_{i+1} \cdot \log_3 2 + \log_3(\log_2 1,5) \stackrel{def}{=} \hat{x}$$

— стационарная точка. Для того, чтобы убедиться в том, что $\hat{x}$ точка минимума, необходимо и достаточно проверить справедливость неравенства $1 < \frac{g}{f} < 3$, где $f = 2^{\hat{x}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}}$, $\quad g = 2^{l_{i+1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\hat{x}}$.

$$\frac{g}{f} = \frac{2^{l_{i+1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\hat{x}}}{2^{\hat{x}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}}} = \frac{2^{l_{i+1}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{l_{i-1}}}{3^{\hat{x}}} = \frac{2^{l_{i+1}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{l_{i-1}}}{2^{l_{i+1}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{l_{i-1}} \cdot \log_2 1{,}5} = \frac{1}{\log_2 1{,}5} \approx 1{,}7$$

Рассуждая аналогично для нахождения минимума $T^k_{l_{h-1}}(x)$ получаем, что $\left(T^k_{l_{h-1}}(x)\right)' = 0$, если и только если

$$x = l_{h-1} \cdot \log_3 1,5 + \log_3 k + \log_3(\log_2 1,5) \stackrel{def}{=} \hat{x},$$

и $\hat{x}$ — точка минимума.

Далее рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} l_1 - l_2 \cdot \log_3 2 = \log_3 \log_2 1,5 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ -l_{i-1} \cdot \log_3 1,5 + l_i - l_{i+1} \cdot \log_3 2 = \log_3 \log_2 1,5, \quad i = 2, \ldots, h-1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ -l_{h-1} \cdot \log_3 1,5 + l_h = \log_3 \log_2 1,5 + \log_3 k. \end{cases} \tag{3}$$

Лемма 1. *Если* $z_1(h) \in \mathbb{R}, \ldots, z_h(h) \in \mathbb{R}$ *являются решением системы* (3), *то при*

$$z_h(h) < \log_2 k + \log_2 \log_2 1,5 - \log_2 1,5 \cdot \log_{\frac{4}{3}}(\log_{\frac{3}{2}} 2)$$

выполнено

$$z_1(h) > 1,$$

$$z_{i+1}(h) - z_i(h) \geqslant \log_{\frac{4}{3}}(\log_{\frac{3}{2}} 2) > 1.$$

Доказательство. Индукция по номеру неизвестной.

1. База: $z_h(h) = z_{h-1}(h) \cdot \log_3 1,5 + \log_3 k + \log_3(\log_2 1,5)$.

Далее в лемме $z_i = z_i(h)$, $i = 1, \ldots, h$.

$$(z_h - z_{h-1}) \cdot \log_3 1,5 =$$

$$= -z_h \cdot \log_3 2 + \log_3 k + \log_3(\log_2 1,5) \geqslant$$

$$\geqslant -\log_3 k - \log_3(\log_2 \frac{3}{2}) + \log_3 \frac{3}{2} \cdot \log_{\frac{4}{3}}(\log_{\frac{3}{2}} 2) + \log_3 k + \log_3(\log_2 \frac{3}{2}) \geqslant$$

$$\geqslant \log_3 1,5 \cdot \log_{\frac{4}{3}}(\log_{\frac{3}{2}} 2) = \log_3 1,5 \cdot C.$$

2. Пусть для каждого $s \leqslant i \leqslant h$ выполнено $z_{i+1} - l_i \geqslant C$. Тогда, так как

$$z_s = l_{s-1} \log_3 1,5 + z_{s+1} \cdot \log_3 2 + \log_3(\log_2 1,5),$$

то

$$(z_s - z_{s-1}) \log_3 1,5 = (z_{s+1} - z_s) \log_3 2 + \log_3(\log_2 1,5) \geqslant$$

$$\geqslant C\cdot\log_3 2+\log_3(\log_2 1,5)=$$

$$=\log_3 2\cdot\log_{\frac{4}{3}}(\log_{\frac{3}{2}} 2)+\log_3(\log_2 1,5)=\log_3(2^{\log_{\frac{4}{3}}(\log_{\frac{3}{2}} 2)}\cdot\log_2 1,5)=$$

$$=\log_3\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_2\frac{4}{3}\cdot\log_{\frac{4}{3}}(\log_{\frac{3}{2}} 2)}\cdot\log_2\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\log_3\left((\log_{\frac{3}{2}} 2)^{\log_{\frac{4}{3}} 2}\cdot\log_2\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\log_3\left((\log_{\frac{3}{2}} 2)^{\log_{\frac{4}{3}} 2-1}\right)=\log_3\left((\log_{\frac{3}{2}} 2)^{\log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\log_3\left(\left(\log_2\frac{3}{2}\right)^{-\log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{2}}\right)=-\log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{2}\cdot\log_3(\log_2\frac{3}{2})=$$

$$=-\log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{2}\cdot\frac{\log_{\frac{4}{3}}(\log_2\frac{3}{2})}{\log_{\frac{4}{3}} 3}=\frac{\log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{2}}{\log_{\frac{4}{3}} 3}\cdot\log_{\frac{4}{3}}(\log_2\frac{3}{2})^{-1}=$$

$$=\log_3\frac{3}{2}\cdot\log_{\frac{4}{3}}(\log_{\frac{3}{2}} 2).$$

3. Пусть

$$z_2-z_1\geqslant C>1,$$

$$z_1=z_2\cdot\log_3 2+\log_3(\log_2 1,5),$$

тогда

$$z_1\cdot\log_3\frac{3}{2}=\log_3 2\cdot(z_2-z_1)+\log_3(\log_2\frac{3}{2})\geqslant$$

$$\geqslant C\cdot\log_3 2+\log_3(\log_2\frac{3}{2})\geqslant C\cdot\log_3\frac{3}{2}$$

по ранее доказанному.

Что и требовалось доказать.

Пусть $f_1(x)$, $f_i(x,y)$, $i=2,\dots,h-1$, $f_h(x,y)$ такие функции, что $T_{l_x}(f_1(x))=\min_z T_x(z)$, $T_{l_x,l_y}(f_i(x,y))=\min_z T_{l_x,l_y}(z)$, $T^k_{l_x}(f_h(x,k))=\min_z T^k_{l_x}(z)$.

Лемма 2. *Если* $(\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_h)$ *точка минимума функции* $t_k(l_1, \ldots, l_h)$, *определяемой соотношением* (2), *то справедливо*

$$\hat{l}_1 = f_1(\hat{l}_2), \quad \hat{l}_i = f_i(\hat{l}_{i-1}, \hat{l}_{i+1}), i = 2, \ldots, h-1, \quad \hat{l}_h = f_h(\hat{l}_{h-1}, k).$$

Доказательство. Допустим, существует $j : \hat{l}_j$ j-тая компонента точки минимума функции (2), но $\hat{l}_j \neq f_j(\hat{l}_{j-1}, \hat{l}_{j+1}) = l_j$. Так как $\hat{l}_j$ является компонентой точки минимума функции (2), а функция (2) — это сумма положительных слагаемых (то есть она принимает минимальное значение тогда и только тогда, когда минимальны все ее слагаемые), то $T_{l_{j-1},l_{j+1}}(\hat{l}_j) \leqslant T_{l_{j-1},l_{j+1}}(l_j)$, а так как l_j — минимум по x $T_{l_{j-1},l_{j+1}}(x)$, то $T_{l_{j-1},l_{j+1}}(l_j) \leqslant T_{l_{j-1},l_{j+1}}(\hat{l}_j)$. Получаем противоречие с предположением.

Что и требовалось доказать.

Если в лемме 2 для каждой из функций $T_{l_2}(x)$, $T_{l_{j-1},l_{j+1}}(x)$ $(j = 2, \ldots, h-1)$, $T^k_{l_{h-1}}(x)$ в качестве выражения для точки минимума на множестве целых чисел брать то из ближайших двух целых ($x_{i,min} = [f_i(\hat{l}_{i-1}, \hat{l}_{i+1})]$ или $x_{i,min} =]f_i(\hat{l}_{i-1}, \hat{l}_{i+1})[$), $i = 1, \ldots, h$, для которого будут наименьшими значения функций T_{l_2}, $T_{l_{j-1},l_{j+1}}$ $(j = 2, \ldots, h-1)$, $T^k_{l_{h-1}}$, то получим справедливость утверждения теоремы.

Корректность найденных величин $l_1, \ldots, l_h$ (то есть возможность построить по ним сбалансированное информационное дерево) доказана в лемме 1.

Теорема 1 доказана.

4. Оценки сложности

Лемма 3. *Пусть* $I \in \mathcal{I}(n, k)$. *При* $n \to \infty$, $k \to \infty$ *для высоты* h_0 *оптимального, решающего задачу* I, *сбалансированного дерева выполнено* $h_0 \to \infty$.

Доказательство. Покажем, что $l_{h_0} \to \infty$ при $k \to \infty$. Допустим, построено оптимальное дерево D высоты h_0, у которого на предпоследнем ярусе $2^{l_{h_0}}$ ребер, $l_{h_0} < n$, а на последнем — k, тогда сложность последнего яруса такого дерева равна $k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}}$. Рассмотрим теперь сбалансированное дерево D', решающее данную задачу, у которого до яруса с номером h_0 структура совпадает со структурой дерева D, из каждой вершины ребер h_0-го яруса выходит по два ребра (всего 2^{m+1} ребер), а ярус с номером (h_0+2) является последним, и на нем, согласно определению сбалансированного дерева, k ребер. Сложности первых h_0 ярусов такого дерева совпадают с соответствующими сложностями дерева D, а сложность последних двух ярусов равна $2^{l_{h_0}+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}} + k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}+1}$. Следовательно,

$$T(D) - T(D') = k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}} - 2^{l_{h_0}+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}} - k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}+1} =$$

$$k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}} \cdot \left(1 - \frac{2^{l_{h_0}+1}}{k} - \frac{2}{3}\right).$$

Несложно заметить, что если $\frac{2^{l_{h_0}+1}}{k} < \frac{1}{3}$, то $T(D) > T(D')$, то есть D не может быть оптимальным деревом. Следовательно, должно выполняться

$$\frac{2^{l_{h_0}+1}}{k} > \frac{1}{3} \text{ или } k < 3 \cdot 2^{l_{h_0}+1}.$$

Покажем, что $h_0 \to \infty$ при $l_{h_0} \to \infty$. Пусть на ярусе с номером $(i-1)$ $2^{l_{i-1}}$ ребер, а на ярусе с номером i 2^{l_i} ребер, $i > 1$. Следовательно, сложность ребер i-го яруса $2^{l_i} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}}$. Рассмотрим новое сбалансированное дерево D' высоты (h_0+1), которое получится, если i-й ярус дерева D, состоящий из $2^{l_{i-1}}$ поддеревьев высоты 1, заменить на $2^{l_{i-1}}$ поддеревьев высоты 2, причем первый ярус такого нового поддерева содержит два ребра, с приписанными им переменной x_j, входящей в конъюнкцию i-го яруса дерева D, и ее отрицанием. Из каждого из этих двух ребер, в свою очередь, выходят $2^{l_i - l_{i-1} - 1}$ ребер, которым приписаны всевозможные конъюнкции из всех переменных кроме x_j, входящих в конъюнкции на i-м ярусе D, и их отрицаний. Таким образом, на i-м ярусе нового дерева D' $2^{l_{i-1}+1}$ ребро, на $(i+1)$-м 2^l_i ребер, а все ярусы с номерами большими, чем $(i+1)$ повторяют конструкцию всех ярусов с номерами большими, чем i в дереве D. Сложность двух измененных ярусов в дереве D' равна

$$2^{l_{i-1}+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}} + 2^{l_i} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}+1}.$$

Значит,

$$T(D) - T(D') = 2^{l_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}} - 2^{l_{i-1}+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}} - 2^{l_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}+1} =$$

$$2^{l_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}} \cdot \left(1 - \frac{2}{2^{l_i - l_{i-1}}} - \frac{2}{3}\right).$$

Отсюда видно, что если дерево D оптимально, то

$$\frac{2}{2^{l_i - l_{i-1}}} > \frac{1}{3} \text{ или } l_i - l_{i-1} < 3.$$

Рассуждая аналогично, получим, что и $l_1 < 3$. Так как

$$l_{h_0} = \sum_{i=2}^{h_0} (l_i - l_{i-1}) < h_0 \cdot 3,$$

то $h_0 > \frac{l_{h_0}}{3}$, а значит $h_0 \to \infty$ при $l_{h_0} \to \infty$.

Лемма доказана.

Обозначим $r_1(k,h) = 2^{z_1(h)}$, $r_h(k,h) = 2^{z_h(h)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$, $r_i(k,h) = 2^{z_i(h)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$, $i = 2, \ldots, h-1$, где $z_i(h)$ определяются как решения системы (3).

Пусть $f(k,h) = \sum\limits_{i=1}^{h} r_i(k)$.

Лемма 4. *Если* $h \in \mathbb{N}$, *то* $r_i(k,h) = r_1(k,h) \cdot (\log_{1,5} 2)^{i-1}$, $\quad i = 2, \ldots, h$.

Доказательство. По индукции.

1) Так как

$$z_2(h) = z_1(h) \cdot \log_2 3 - \log_2(\log_2 1,5),$$

то

$$2^{z_2(h)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{z_1(h)} = 2^{z_1(h)} \cdot \frac{1}{\log_2 1,5}.$$

2) Пусть $j = 2, \ldots, h-1$, тогда так как

$$z_{j+1}(h) = z_j(h) \cdot \log_2 3 - z_{j-1}(h) \cdot \log_2 1,5 - \log_2(\log_2 1,5),$$

то

$$2^{z_{j+1}(h)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{z_j(h)} = 2^{z_j(h)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{z_{j-1}(h)} \cdot \frac{1}{\log -21,5}.$$

3) Так как

$$k = 3^{z_h(h)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-z_{h-1}(h)} \cdot \frac{1}{\log_2 1,5},$$

то

$$k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{z_h(h)} = 2^{z_h(h)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{z_{h-1}(h)} \cdot \frac{1}{\log_2 1,5}.$$

Что и требовалось доказать.

Согласно лемме 4, в функции $f(k,h)$ каждое следующее слагаемое в $\frac{1}{\log_2 1,5}$ раз больше предыдущего. Значит, если

$$k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{z_h(h)} = r_h(k,h), \text{то}$$

$$f(k,h) = r_h(k,h) \cdot \Big((\log_2 1,5)^{h-1} + \ldots + (\log_2 1,5)^2 + \log_2 1,5 + 1\Big) =$$

$$r_h(k,h) \cdot \frac{1-(\log_2 1,5)^h}{1-\log_2 1,5} \to r_h(k,h) \cdot \frac{1}{1-\log_2 1,5} \text{ при } h \to \infty.$$

Кроме того, при округлении действительных решений $z_i(h)$ системы (3) (для того, чтобы найти целые номера $l_i : |l_i - z_i(h)| \leqslant 0,5$, необходимые при построении дерева),

$$r_i(k,h) \cdot 2^{-0,5} \left(\frac{2}{3}\right)^{0,5} \leqslant 2^{l_i} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}} \leqslant r_i(k,h) \cdot 2^{0,5} \left(\frac{2}{3}\right)^{-0,5},$$

$$r_i(k,h)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant 2^{l_i}\left(\frac{2}{3}\right)^{l_{i-1}}\leqslant\sqrt{3}\cdot r_i(k,h).$$

Здесь $i=1,\ldots,h$. Следовательно,

$$f(k,h)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant t_k(l_1,\ldots,l_h)\leqslant f(k,h)\cdot\sqrt{3}.$$

Таким образом, достаточно исследовать только последнее слагаемое в функции $f(k,h)$.

Пусть $c=-\log_3 1,5$ $d=-\log_3 2$, $b=\log_3(\log_2 1,5)$. Тогда система (3) представляется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & d & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ c & 1 & d & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c & 1 & d\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(h)\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ z_h(h)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ b\\ b+\log_3 k\end{pmatrix}$$

или $Az=\hat{b}$.

Будем решать эту систему методом прогонки, предварительно разложив матрицу A в произведение двудиагональных матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & d & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ c & 1 & d & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c & 1 & d\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c & 1 \end{pmatrix}=Q\times V, \tag{4}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} q_1(h) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & q_2(h) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & q_{h-1}(h) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & q_h(h) \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1(h) & u_1(h) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & v_2(h) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & v_{h-1}(h) & u_{h-1}(h) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_h(h) \end{pmatrix},$$

где $q_i(h)$, $v_i(h)$, $i = 1, \dots, h$, $u_i(h)$, $i = 1, \dots, h-1$, ищем следующим образом:

$$\begin{aligned} &v_1(h) = c,\ q_1(h) = 1/v_1(h),\ u_1(h) = d/q_1(h); \\ &v_i(h) = c,\ q_i(h) = (1 - u_{i-1}(h))/v_i(h),\ u_i(h) = d/q_i(h),\ i = 2, ..., h-1; \\ &q_h(h) \cdot v_h(h) = 1 - u_{h-1}(h). \text{ Положим } v_h(h) = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение системы $Q(Vl) = \hat{b}$ сводится к решению систем $Qy = \hat{b}$ и $Vz = y$,

$$y = \begin{pmatrix} y_1(h) \\ \vdots \\ y_h(h) \end{pmatrix}.$$

Нас, в основном, интересуют неизвестные $y_h(h)$ и $z_h(h)$ в первой и во второй системах соответственно (в скобках указывается размерность систем). Очевидно, что $z_h(h) = y_h(h)/v_h(h) = y_h(h)$, $y_h(h) = \frac{(b+\log_3 k)-y_{h-1}(h)}{q_h(h)}$.

Лемма 5. *Для $q_h(h)$, определяемого соотношением (5), верно следующее:*

$$q_2(2) = 1 - c \cdot d, \qquad q_h(h) = 1 - \frac{c \cdot d}{q_{h-1}(h-1)}$$

для любого $h \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Индукцией по размерности системы j.

1. $j = 2$. $v_1(2) = c$, $v_2(2) = 1$, $q_1(2) = 1/c$, $u_1(2) = cd$, $q_2(2) = 1 - cd$.

2. Пусть для $j < h$ предположение верно. Тогда имеем следующую систему уравнений, из которой находится $q_{h-1}(h-1)$:

$$\begin{cases} q_1(h-1) = \frac{1}{c}, & u_1(h-1) = \frac{d}{q_1(h-1)} \\ q_i(h-1) = \frac{1-u_{i-1}(h-1)}{c}, & u_i(h-1) = \frac{d}{q_i(h-1)},\ i = 1, ..., h-2 \\ q_{h-1}(h-1) = 1 - u_{h-2}(h-1). & \end{cases}$$

3. Покажем, что предположение индукции верно и для $j = h$. Для нахождения $q_h(h)$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} q_1(h) = \frac{1}{c} & u_1(h) = \frac{d}{q_1(h)}, \\ q_i(h) = \frac{1-u_{i-1}(h)}{c}, & u_i(h) = \frac{d}{q_i(h)}, \quad i = 2, \dots, h-2 \\ q_{h-1}(h) = \frac{1-uh-2(h)}{c}, & u_{h-1}(h) = \frac{d}{q_{h-1}(h)}, \\ q_h(h) = 1 - u_{h-1}(h). & \end{cases}$$

В этой системе все вычисления до $(h-2)$-го шага включительно совпадают с вычислениями, производимыми в системе для матрицы размера $(h-1)\times(h-1) : q_{h-2}(h-1)(c,d) = q_{h-2}(h)(c,d)$, $u_{h-2}(h-1)(c,d) = u_{h-2}(h)(c,d) = u_{h-2}$. Далее $q_{h-1}(h-1) = 1 - u_{h-2}$; $q_{h-1}(h) = \frac{1-u_{h-2}}{c} = \frac{q_{h-1}(h-1)}{c}$, $u_{h-1}(h) = \frac{cd}{q_{h-1}(h-1)}$, и $q_h(h) = 1 - \frac{cd}{q_{h-1}(h-1)}$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Если $q_h(h)$ определены соотношением (5), то $\lim\limits_{h\to\infty} q_h(h) = \log_2 3$.*

Доказательство. По индукции.

1. $q_1(1) = 1$, $q_2(2) = 1 - cd = 1 - \log_3 2 \cdot \log_3 1,5 < 1$.

2. Пусть $q_i(i) < q_{i-1}(i-1)$, тогда

3. $q_{i+1}(i+1) = 1 - \frac{cd}{q_i(i)} < 1 - \frac{cd}{q_{i-1}(i-1)} = q_i(i)$.

Пусть $\lim\limits_{h\to\infty} q_h(h) = q$ — бесконечная дробь, для которой верно соотношение $q = 1 - \frac{cd}{q}$ или $q^2 - q + cd = 0$. Решая квадратное уравнение и подставляя значения c, d в решение, получаем: $q = \frac{1+\sqrt{1-4cd}}{2} = \log_3 2$; $q = \frac{1-\sqrt{1-4cd}}{2} = \log_3 1,5$.

Покажем, что нам подходит только первый из этих корней. Последовательность $\{q_h(h)\}$ убывает от единицы и до положительного числа (одного из наших корней), и $q_{h+1}(h+1) = 1 - \frac{cd}{q_h(h)}$. Значит, $1 - \frac{cd}{q_h(h)} - q_h(h) > 0$ и $q_h^2(h) - q_h(h) + cd < 0$, то есть $q_h(h) > \log_3 2$ или $q_h(h) < \log_3 1,5$. Очевидно, что второй вариант не удовлетворяет условию $q_1(1) = 1$. Значит $\lim\limits_{h\to\infty} q_h(h) = q = \log_3 2$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 7. *Пусть* $q_i(h)$, $i = 1, \ldots, h-1$, *определены соотношением* (5). *Тогда выполнены следующие условия:*

1) $q_1(h) = -\log_{1,5} 3$;

2) $q_i(h) < 0 \quad \forall i = 1, \ldots h-1$;

3) $1 < |q_i(h)| < |q_{i-1}(h)|, \quad i = 2, \ldots, h-1$;

4) $\lim\limits_{\substack{h\to\infty \\ i\to\infty \\ i\neq h}} q_i(h) = -\log_{1,5} 2$.

Доказательство.

$q_1(h) = \frac{1}{c} = -\log_{1,5} 3$. Далее, рассуждая тем же образом, что и в лемме 5, получаем следующее рекуррентное выражение для $q_i(h), \quad i = 2, \ldots, h-1$:

$$q_i(h) = \frac{1 - \frac{cd}{c \cdot q_{i-1}(h)}}{c}.$$

Выражение, стоящее в числителе этой дроби то же, что и $q_i(i)$, следовательно, при росте i оно убывает от единицы до $\log_3 2$. Кроме того, для любого $i = 2, \ldots, h-1$ числитель положителен, а значит для таких i $q_i(h) < q_{i-1}(h)$.

$$\lim_{\substack{h\to\infty \\ i\to\infty \\ i\neq h}} q_i(h) = \frac{\log_3 2}{-\log_3 1,5} = -\log_{1,5} 2 < -1,$$

значит $\forall i = 2, \ldots, h-1 \quad |q_i(h)| > 1$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 8. *При решении уравнения* $Qy = \hat{b}$, *где матрица* Q *определяется соотношением* (4), *получаем следующее ограничение:* $\frac{1}{6} < |y_{h-1}(h)| < \frac{3}{2}$.

Доказательство. Вычислим $y_{h-1}(h)$ индуктивно через предыдущие переменные рассматриваемой системы, учтем, что $y_1(h) = \frac{b}{q_1(h)}$.

$$y_{h-1}(h) = \frac{b - y_{h-2}(h)}{q_{h-1}(h)} = \frac{b - \frac{b - y_{h-3}(h)}{q_{h-2}(h)}}{q_{h-1}(h)} =$$

$$= b \cdot \left(\frac{1}{q_{h-1}(h)} - \frac{1}{q_{h-1}(h) \cdot q_{h-2}(h)} \right) + \frac{y_{h-2}(h)}{q_{h-1}(h) \cdot q_{h-2}(h)} =$$

$$= b \cdot \left(\frac{1}{q_{h-1}(h)} - \frac{1}{q_{h-1}(h) \cdot q_{h-2}(h)} + \ldots + (-1)^h \frac{1}{q_{h-1}(h) \ldots q_1(h)} \right).$$

Учитывая результат леммы 6, получаем, что так как $q_i < 0$ при $i < h-1$, и $b < 0$, то $y_{h-1}(h) > 0$ и

$$y_{h-1}(h) = |b| \left(\frac{1}{|q_{h-1}|} + \ldots + \frac{1}{|q_{h-1}| \cdot |q_{h-2}| \cdots |q_1|} \right).$$

Оценим более точно эту величину. Используем то, что $\log_{1,5} 2 < |q_i(h)| < \log_{1,5} 3$, $i = 1, \ldots, h-1$. Тогда

$y_{h-1}(h) > |b| \left(\log_3 1,5 + (\log_3 1,5)^2 + \ldots + (\log_3 1,5)^{h-1} \right) =$

$|b| \cdot \log_3 1,5 \cdot \left(\frac{1 - (\log_3 1,5)^{h-1}}{1 - \log 31,5} \right) > |b| \cdot \log_3 1,5 > \frac{1}{6}$.

С другой стороны,

$y_{h-1}(h) < |b| \left(\log_2 1,5 + (\log_2 1,5)^2 + \ldots + (\log_2 1,5)^{h-1} \right) =$

$|b| \cdot \left(\frac{\log_2 1,5 - (\log_2 1,5)^h}{1 - \log_2 1,5} \right) < |b| \frac{\log_2 1,5}{1 - \log_2 1,5} < \frac{3}{2}$.

Что и требовалось доказать.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 2.

Далее будем пользоваться результатом леммы 3, учитывая, что при стремлении к бесконечности мощности библиотеки k высота h_0

оптимального дерева также растет. Исследуем порядок по k слагаемого $k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{z_{h_0}}$, где z_{h_0} найден из системы (3) оптимальной размерности h_0. Как было замечено ранее, при построенном нами $Q-V$-разложении (4) $z_{h_0}(h_0) = y_{h_0}(h_0)$, а для $y_{h_0}(h_0)$ справедлива оценка, основанная на результатах лемм 6 и 7:

$$y_{h_0}(h_0) = \frac{\log_3 k}{q_{h_0}(h_0)} + \frac{b + y_{h_0-1}(h_0)}{q_{h_0}(h_0)},$$

$$\log_2 k + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{\log_3 2} < \lim_{h_0\to\infty} y_{h_0}(h_0) < \log_2 k + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\log_3 2},$$

$$\log_2 k - \frac{1}{3}\cdot\log_2 3 < \lim_{h_0\to\infty} y_{h_0}(h_0) < \log_2 k + \log_2 3,$$

$$\log_2 \frac{k}{\sqrt{3}} < \lim_{h_0\to\infty} y_{h_0}(h_0) < \log_2 3k.$$

А значит для исследуемого нами слагаемого функции сложности получаем: при росте k h_0 и $z_{h_0} = y_{h_0}(h_0)$ возрастают, следовательно, степень порядка самого слагаемого убывает и

$$k \cdot \frac{\frac{k}{\sqrt{3}}}{k^{\log_3 2}\cdot 2} < \lim_{h_0\to\infty} k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{z_{h_0}} < k\cdot\frac{3k}{k^{\log_3 2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot k^{2-\log_2 3} < \lim_{h_0\to\infty} k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}} < 3\sqrt{2}\cdot k^{2-\log_3 2}.$$

Так как $f(k,h_0) = \frac{1-(\log_2 1{,}5)^h}{1-\log_2 1{,}5}\cdot k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{z_{h_0}}$, то

$$\frac{1}{2\sqrt{3}\cdot(1-\log_2 1,5)}\cdot k^{2-\log_2 3} < \lim_{h_0\to\infty} f(k,h_0) < \frac{3\sqrt{2}}{1-\log_2 1,5}\cdot k^{2-\log_2 3}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}\cdot(1-\log_2 1,5)}\cdot k^{2-\log_2 3} < \lim_{h_0\to\infty} t_k(l_1,\ldots,l_{h_0}) <$$

$$\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{1-\log_2 1,5}\cdot k^{2-\log_2 3}.$$

Теорема 2 доказана.

Утверждение 1.

$$\log_2 k > h_0 > \left[\frac{\log_2 k - \log_2 3}{3}\right].$$

Доказательство утверждения. В процессе доказательства леммы 3 было показано, что $h_0 > \frac{l_{h_0}}{3}$, и $l_{h_0} > \log_2 k - \log_2 3$, откуда следует нижняя оценка для h_0. Докажем теперь верхнюю оценку.

Рассмотрим оптимальное дерево D, сложность двух последних ярусов его ребер равна $2^{l_{h_0}} \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0-1}} + k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}}$. Теперь построим дерево D', удаляя из дерева D ярус ребер с номером h_0, и подсоединяя k ребер последнего яруса дерева D к ярусу с номером $(h_0 - 1)$. Допустим, $l_{h_0} \geqslant \log_2 k$. Тогда

$$T(D) - T(D') = 2^{l_{h_0}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0-1}} + k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}} - k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0-1}} \geqslant$$

$$k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0-1}} + k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}} - k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0-1}} = k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{l_{h_0}} > 0.$$

Получили противоречие с оптимальностью дерева. А так как

$$l_{h_0} = \sum_{i=2}^{h_0} (l_i - l_{i-1}) + l_1 \geqslant h_0,$$

то $h_0 \leqslant \log_2 k$.

Утверждение доказано.

Замечание. В некоторых ситуациях, при фиксированном h для нахождения наилучших целых номеров l_i, $i = 1, \ldots, h$, достаточно взять ближайшее целое к соответствующему решению системы (3).

Рассмотрим минимальные значения функций $T_{l_2}(f_1(l_2))$, $T_{l_{i-1},l_{i+1}}(f_i(l_{i-1}, l_{i+1}))$, $i = 2, \ldots, h-1$, $T^k_{l_{h-1}}(f_h(l_{h-1}, k))$, определяемые соотношениями (1). Для $T_{l_{i-1},l_{i+1}}(f_i(l_{i-1}, l_{i+1}))$, $i = 2, \ldots, h-1$, положим $\Delta_+ = T_{l_{i-1},l_{i+1}}(f_i(l_{i-1}, l_{i+1}) + 0,5) - T_{l_{i-1},l_{i+1}}(f_i(l_{i-1}, l_{i+1}))$, $i = 2, \ldots, h-1$, $\Delta_- = T_{l_{i-1},l_{i+1}}(f_i(l_{i-1}, l_{i+1}) - 0,5) - T_{l_{i-1},l_{i+1}}(f_i(l_{i-1}, l_{i+1}))$, $i = 2, \ldots, h-1$. Пусть f, g — те же, что и при доказательстве теоремы 1 для $T_{l_{i-1},l_{i+1}}(x)$. Тогда

$$\Delta_+ = \sqrt{2}\cdot f + \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot g - f - g = (\sqrt{2}-1)\cdot f + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - 1\right)\cdot g =$$

$$\left((\sqrt{2}-1) + \log_{1,5} 2\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - 1\right)\right)\cdot f \approx 0,1004\cdot f$$

с точностью до четвертого знака после запятой.

$$\Delta_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot f + \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot g - f - g =$$

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + \log_{1,5} 2\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)\right)\cdot f \approx 0,0912\cdot f.$$

$$\Delta_+ - \Delta_- \approx 0,009\cdot f.$$

Аналогичные результаты получаются и для T_{l_2}, $T^k_{l_{h-1}}$ в окрестностях точек минимумов с радиусом $\frac{1}{2}$. Так как $f = (\log_2 1,5)^{h-i}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{l_h}\cdot k$, — линейно зависит от сложности, то при небольших мощностях библиотек (порядка сотни) в качестве наилучшего целого номера l_i без больших потерь можно брать округление от соответствующего решения системы уравнений (3).

В частности, при больших n и h, когда сложность порядка, лучшего, чем $\sqrt{k}$, при $k \leqslant 10000$ можно в качестве наилучших целых брать ближайшие целые номера.

В заключение автор выражает благодарность Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

[1] Гасанов Э.Э. Информационно-графовая модель хранения и поиска данных // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3. Вып. 3–4. С. 163–192.

[2] Богачев К.Ю. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М., 1998.