

# Алгоритм полноты систем автоматных функций с полной булевой частью

Д.Н. Бабин

Рассматриваются автоматные базисы с полной булевой частью. Построен алгоритм для проверки полноты таких базисов и получены верхние оценки его сложности.

## Введение

Известно, что решение задачи о полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности. Так в работе [1] установлена континуальность всякой критериальной системы для этой задачи, а позднее в работе [2] установлена ее алгоритмическая неразрешимость для конечных систем автоматных функций. Вместе с тем, для специальных систем автоматов, выдающих номер своего состояния (автоматов Медведева) и содержащих все булевы функции, указанная задача алгоритмически разрешима [3]. Ранее, в работе [4] автором было показано, что при наличии булевых функций алгоритмически разрешима проблема полноты и для произвольных систем автоматов, и даже не все булевы функции для этого нужны [5, 6, 7]. Возникший при этом аппарат сохраняемых предикатов на экспериментах с автоматами, позволил упростить доказательство работы [4]. Новый вариант доказательства приводится в настоящей работе.

# 1. Основные понятия и результаты

Пусть  $E_2 = \{0, 1\}$ ,  $E_2^\infty$  — множество всех сверхслов  $a(1)a(2)\dots$ , где  $a(j) \in E_2, j = 1, 2, \dots$ . Пусть

$$f : (E_2^\infty)^n \rightarrow (E_2^\infty)^m$$

— автоматная функция (а.-функция), то есть она задается рекуррентно соотношениями, где  $q \in Q = \{q_1, \dots, q_r\}$ .

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \\ b_j(t) = \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1)$$

Параметр  $q$  называется состоянием а.-функции  $f$ ,  $q_1$  — ее начальным состоянием, вектор — буквы  $a = (a_1, \dots, a_n)$  и  $b = (b_1, \dots, b_m)$  называются входной и выходной буквами, а сверхслова  $a(1)a(2)\dots$  и  $b(1)b(2)\dots$  — входным и выходным сверхсловами, соответственно. Класс всех а.-функций обозначим через  $P_a$ . Если  $|Q| = 1$ , то автоматную функцию (1) можно отождествить с булевой вектор-функцией  $\psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t))$  и считать булевы функции частным случаем автоматных. Известно, что все булевы функции порождаются одной функцией  $\bar{x} \vee \bar{y}$ .

В классе автоматных функций введем операции суперпозиции и обратной связи. Для суперпозиции будем использовать операции:

$$\begin{cases} (\eta f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), \\ (\epsilon f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n), \\ (\Omega f)(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\ (\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}), \\ (f * g)(x_1, x_2, \dots, x_{l+n-1}) = f(g(x_1, \dots, x_l), x_{l+1}, \dots, x_{l+n-1}). \end{cases}$$

Операция обратной связи (о.с.), примененная к  $i$ -ой входной и  $j$ -ой выходной переменным а.-функции  $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$ , задает а.-функцию

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m),$$

вычисляемую алгоритмически следующим образом. Считаем, что о. с. применима к  $f$  в состоянии  $q$ , если  $\psi_j$  в уравнении (1) фиктивно зависит от  $a_i$  при  $q(t) = q$ , а вычисление  $b_s(t)$  осуществляется по схеме

$$\left\{ \begin{array}{l} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t)), \\ \quad a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), \\ b_s(t) = \psi_s(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t)), \\ \quad a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), \\ s = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m. \end{array} \right.$$

Считаем, что о. с. применима к  $f$ , если она применима в начальном состоянии  $q_1$ , и из ее применимости в состоянии  $q(t)$  следует применимость в состоянии  $q(t+1)$ . Пусть  $M \subseteq P_a$ , обозначим через  $[M]$  множество всех а.-функций, получающихся из  $M$  с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество  $M$  называется полным, если  $[M] = P_a$ . Проблема полноты для  $P_a$  состоит в описании всех полных множеств  $M$ .

Имеет место теорема:

**Теорема 1.** *Для конечной системы  $M \subset P_a$  равенство  $[M \cup \{\bar{x} \vee \bar{y}\}] = P_a$  алгоритмически проверяемо, и число шагов проверки не превосходит  $(2^{2^{|Q|^2+1}})!$ .*

## 2. Основные леммы и доказательство теоремы

Обозначим через  $\bar{X}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, f_{\text{ш}}, f_{\&}, f_{\vee}$  автоматные интерпретации истинностных функций, соответственно,  $\bar{x}, 1, 0, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2$ .

Для натуральных  $D, N$  автоматную функцию с уравнениями (1), где  $m = n = D + N, Q = \{1, \dots, D + N\}$ , и для любого  $a \in E_2^{D+N}$   $\psi(i, a) = 0^{i-1}10^{D+N-i}$ ,

$$\varphi(i, a) = \begin{cases} i + 1 & \text{при } i < D + N, \\ D + 1 & \text{при } i = D + N \end{cases}$$

назовем  $(D, N)$ -счетчиком и обозначим через  $B_{D,N}$ .  $B_{D,N}$  выдает всегда одну и ту же последовательность с периодом  $N$  и предпериодом  $D$ . Если же при тех же условиях  $\psi(i, (a_1, \dots, a_{D+N})) = a_i$ , то назовем ее  $(D, N)$ -селектором и обозначим через  $C_{D,N}$ . Множество всех счетчиков обозначим через  $\mathbf{K}$ .

Без ограничения общности, будем исследовать на полноту системы вида  $\{f_{\text{ш}}, f\}$ , где  $f$  задается уравнениями (1).

Для  $D, 0 \leq D \leq s$  последовательность (2),

$$(a(1), b(1)), (a(2), b(2)), \dots, (a(s), b(s)), \quad (2)$$

где  $a(1), \dots, a(s) \in E_2^n; q(1), \dots, q(s+1) \in Q; b(1), \dots, b(s) \in E_2^m; b(i) = \psi(q(i), a(i)); q(i+1) = \varphi(q(i), a(i)), i = 1, \dots, s;$

$q(1) = q_1, \varphi(q(s), a(s)) = q(D+1)$ , назовем  $(D, s)$  экспериментом с а.-функцией  $f$ .

Пусть  $i, j$  натуральные числа,  $1 \leq i, j \leq s, j \neq i$ . Скажем, что а.-функция  $f$  является  $(j, i)$ -зависимой, если для *каждой* последовательности (2) выполнено соотношение (3), а.-функция  $f$  допускает счетчик  $B_{D,N}$ , если для некоторого  $s = D + kN$  и любых  $i \neq j, 1 \leq i, j \leq s$  а.-функция  $f$  не является  $(j, i)$ -зависимой.

$$\psi(q(j), a(i)) = b(i). \quad (3)$$

Имеют место следующие леммы.

**Лемма 1.** *Имеет место включение  $[\{f, f_{\text{ш}}\}] \supseteq \mathbf{K}$  точно тогда, когда для любого натурального  $N$  найдутся  $D, s = D + kN$  такие, что  $f$  допускает счетчик  $B_{D,N}$ .*

**Лемма 2.** *Отношение включения  $[\{f, f_{\text{ш}}\}] \supseteq \mathbf{K}$  алгоритмически проверяемо.*

Через  $Q_i \subseteq Q$  обозначим множество состояний а.-функции  $f$  достижимых из начального за  $i$  тактов. Скажем, что а.-функция  $f$  с уравнениями (1) имеет память в  $j$ -тый момент, если для некоторого слова  $\alpha \in E_2^n$  длины  $j-1$  и некоторых букв  $a, b, c \in E_2^n$  выполнено  $\psi(\varphi(q_1, \alpha a), c) \neq \psi(\varphi(q_1, \alpha b), c)$ , в противном случае скажем, что

а.-функция  $f$  не имеет памяти в  $j$ -тый момент. Обозначим множество всех а.-функций, не имеющих памяти в  $j$ -тый момент, через  $U(j), j = 0, 1, \dots$

Автоматная функция  $G: E_2^\infty \rightarrow E_2^\infty$  с уравнениями

$$q(1) = 0, \quad q(t+1) = a(t), \quad b(t) = q(t)$$

называется автоматной функцией «задержки» или «задержкой». Известно, что  $[\{G, f_{\text{ш}}\}] = P_a$ . Через  $\lambda$  обозначим пустую букву. Пусть  $p, q, r, s \in Q$ , определим бинарные отношения **2, 0, 1** на множестве  $Q \times Q$ .

$((p, q), (r, s))$  связаны отношением **2, 0, 1**, если

$$\exists a, b ((\varphi(p, a) = r) \& (\varphi(q, b) = s) \& (\psi(p, a) \neq \psi(q, a)));$$

$$\exists a ((\varphi(p, a) = r) \& (\varphi(q, a) = s) \& (\psi(p, a) = \psi(q, a)));$$

$$\exists a, b ((\varphi(p, a) = r) \& (\varphi(q, b) = s) \& (\psi(p, a) = \psi(q, a)) \& (\psi(p, b) = \psi(q, b)));$$

соответственно, пусть **ALL** = **2**  $\cup$  **0**  $\cup$  **1** и функция

$\eta: Q^2 \times Q^2 \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\}$  определена как

$$\eta((p, q), (r, s)) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } ((p, q), (r, s)) \notin \mathbf{ALL}, \\ 2, & \text{если } ((p, q), (r, s)) \in \mathbf{2}, \\ 0, & \text{если } ((p, q), (r, s)) \in \mathbf{0} \setminus \mathbf{2}, \\ 1, & \text{если } ((p, q), (r, s)) \in \mathbf{1} \setminus \{\mathbf{0} \cup \mathbf{2}\}. \end{cases}$$

Пусть  $\overline{\max}$  обозначает максимум относительно порядка  $\lambda \leq 1 \leq 0 \leq 2$ , а  $\max$  — относительно порядка  $0 \leq 1 \leq 2 \leq \lambda$ .

Обозначим через  $I_f$  полный ориентированный граф с помеченными ребрами и множеством вершин  $Q \times Q$ , где  $\eta$  — функция отметок ребер и назовем  $I_f$  локальным информационным графом а.-функции  $f$ . Для  $X_1, X_2 \in 2^{Q \times Q}, X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$  обозначим через  $E(X_1, X_2) \subseteq 2^{Q \times Q \times Q \times Q}$  всякую систему ребер графа  $I_f$  со свойством: всякое  $x_1 \in X_1$  ( $x_2 \in X_2$ ) соединено ребром из  $E(X_1, X_2)$  с  $x_2 \in X_2$  ( $x_1 \in X_1$ ), а множество всех таких систем — через  $\Upsilon(X_1, X_2)$ . Определим функцию

$\Theta: 2^{Q \times Q} \times 2^{Q \times Q} \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\}$  для  $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$  соотношением

$$\Theta(X_1, X_2) = \overline{\max}_{\Upsilon(X_1, X_2)} \left( \max_{E \in \Upsilon(X_1, X_2)} (\eta(E)) \right).$$

Для  $X_1 = \emptyset$  или  $X_2 = \emptyset$  определим  $\Theta(X_1, X_2) = \lambda$ . Полный ориентированный граф  $\widehat{I}_f$  с помеченными ребрами и множеством вершин  $2^{Q \times Q}$ , где  $\Theta$  функция отметок, назовем глобальным информационным графом а.-функции  $f$ . Если  $q \in Q_i$ , то цикл

$$\{(q, q)\} E_1 X_1 E_2 X_2 \dots X_{l-1} E_l \{(q, q)\}$$

в графе  $\widehat{I}_f$  (соответственно  $I_f$ ) назовем  $i$ -тым циклом, здесь через  $E_1, \dots, E_l$  обозначены ребра. Если отметки ребер  $i$ -того цикла таковы, что

$$\Theta(E_1) = 1, \Theta(E_2) = 2, \Theta(E_3) \neq 1, \dots, \Theta(E_l) \neq 1,$$

$$(\eta(E_1) = 1, \eta(E_2) = 2, \eta(E_3) \neq 1, \dots, \eta(E_l) \neq 1),$$

то назовем его  $i$ -тым информационным циклом в графе  $\widehat{I}_f$  (соответственно  $I_f$ ).

Имеет место следующая лемма.

**Лемма 3.** Для системы  $\{f, f_u\}$  такой, что  $[\{f, f_u\}] \supseteq \mathbf{K}$  имеет место  $[(\{f, f_u\}) \ni G$  точно тогда, когда

1)  $f \notin U(i)$  при всех натуральных  $i$ ,

2) найдется натуральное  $N \leq 2^{|Q|^2}$  такое, что для всех  $i > N$  в графе  $\widehat{I}_f$  имеется  $i$ -тый информационный цикл.

Пусть  $Q_p^t \subseteq Q$  множество состояний а.-функции  $f$ , достижимых из состояния  $p$  за  $t$  тактов, а  $R_l$  — множество состояний, из которых достижимо состояние  $l$ . Обозначим через  $Q_{pl}^t = Q_p^t \cap R_l$ , тогда  $Q_{pl}^{t+1} = \{\varphi(p, a) | a \in E_2^n, p \in Q_{pl}^t\} \cap R_l$ . Последовательность  $Q_{pl}^t, t = 1, 2, \dots$  будет детерминированной, а значит, и периодической. Можно выбрать период и предпериод этой последовательности равный, для простоты, одному и тому же числу  $\rho$  при всех  $p, l \in Q$ . Очевидна грубая оценка  $\rho \leq (2^{|Q|})!$ . Итак для любых  $p, l \in Q$   $Q_{pl}^t = Q_{pl}^{t+\rho}$ , при  $t = 1, 2, \dots$ .

**Доказательство теоремы.**

Без ограничения общности случай конечной системы  $M = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  сводится к случаю, когда  $M$  состоит из одного элемента  $M = \{f\}$ . Ввиду периодичности последовательности  $Q_{q_1}^t, t = 1, 2, \dots$  проверка условия  $f \notin U(i)$  сводится к перебору значений

$i < 2\rho$  и всех путей длины не большей  $i + 1$ , проходящих по состояниям а.-функции  $f$ . Число таких путей не превосходит  $(2^n)^{2\rho}$ . Общее число операций при переборе не превосходит  $2\rho 2^{2n\rho}$ , где  $\rho < (2^{|Q|})!$ . Таким образом, общее число операций не превосходит числа  $2(2^{|Q|})!(2^{2n(2^{|Q|})!})$ . В лемме 2 доказана алгоритмическая проверяемость включения  $\{f, f_{\text{ш}}\}_K \supseteq \mathbf{K}$ .

Рассмотрим проверяемость условия 1 леммы 3. Ввиду периодичности последовательности  $Q_{q_1}^t, t = 1, 2, \dots$  проверка условия  $f \notin U(i)$ , как это показано в теореме 1 занимает не более  $2(2^{|Q|})!(2^{2n(2^{|Q|})!})$  операций. Оценим размеры графа  $\widehat{I}_f$ . Он имеет множество вершин мощности  $R = 2^{|Q|^2}$ . Для проверки наличия  $i$ -того информационного цикла необходимо проверить простые пути из вершин, достижимых из вершины  $\{(q_1, q_1)\}$  за  $i + 2$  такта. Число таких путей не превосходит  $R!$ . Вместо проверки счетного числа значений  $i$ , достаточно проверить состояния из множеств  $R_i$  — достижимых за  $i$  тактов вершин графа  $\widehat{I}_f$ . Если  $\rho\rho$  — период и предпериод последовательности  $R_1, R_2, \dots$ , то необходимо проверить вершины из множеств  $R_1, R_2, \dots, R_{2\rho\rho}$ . Очевидно, что  $\rho\rho \leq (2^R)!$ . Таким образом, общее число операций при проверке условия 2) леммы 3 не превосходит числа

$$(2^{2^{|Q|^2+1}})!$$

Теорема доказана.

### 3. Доказательство лемм

#### Доказательство леммы 1. Необходимость.

Пусть  $N \neq \rho$  и через а.-функции  $f_{\text{ш}}, f$  выражена а.-функция  $g$ , равная  $B_{0,N}$ . Это значит, что найдутся  $k, D, s = D + kN$  такие, что а.-функция  $g$  не является  $(j, i)$ -зависимой при  $i \neq j \pmod N$ . Зафиксируем для определенности  $i, j, i < j \pmod N$ .

Пусть а.-функция  $g$  получилась операцией обратной связи из а.-функции  $\tilde{g}$ . Покажем, что  $\tilde{g}$  также не является  $(j, i)$ -зависимой. В самом деле: пусть эксперимент (2), получившийся из эксперимента (4), нарушал  $(j, i)$  зависимость.

$$((a(1), e(1)), (b(1), e(1))), \dots ((a(s), e(s)), (b(s), e(s))). \quad (4)$$

Это означает, что  $b = \psi(q(j), a(i)) \neq b(i)$ . Пусть входная буква  $a(i)$  в диаграмме  $g$  в состоянии  $q(j)$  получилась из входной буквы  $(a(i), e)$  в диаграмме  $\tilde{g}$  в состоянии  $q(j)$ . Тогда имеем

$$\psi_{\tilde{g}}(q(j), (a(i), e)) = (b, e), \psi_{\tilde{g}}(q(j), (a(i), e(i))) = (b', e').$$

По правилу применимости о.с. имеем  $e = e'$  и, если есть сохранение  $(j, i)$ -зависимости для  $\tilde{g}$ , то  $e' = e(i)$ , откуда следует  $b' = b = b(i)$ , а это означает сохранение  $(j, i)$ -зависимости для  $g$ , что противоречит нашему предположению.

Пусть теперь  $g$  получилась суперпозицией а.-функций  $g_1$  и  $g_2$  и эксперимент (2) получился из экспериментов

$$(a(1), c(1)), \dots, (a(s), c(s)), (c(1), b(1)), \dots, (c(s), b(s))$$

а.-функций  $g_1$  и  $g_2$ , соответственно. Если предположить, что  $g_1$  и  $g_2$  сохраняют  $(j, i)$ -зависимость, то получим, что  $g$  также сохраняет  $(j, i)$ -зависимость. Значит, хотя бы одна из а.-функций  $g_1$  или  $g_2$  не сохраняет  $(j, i)$ -зависимость на  $(D, s)$ -экспериментах. Очевидно, что а.-функция  $f_{\text{III}}$  сохраняет  $(j, i)$ -зависимости на  $(D, s)$ -экспериментах.

Повторяя эти рассуждения, мы получим, что сама а.-функция  $f$  не сохраняет  $(j, i)$ -зависимость на  $(D, s)$ -экспериментах при  $i \neq j \pmod{N}$ .

Если для  $(D, s)$ -экспериментов выполнена  $(j, i)$ -зависимость, то будет выполнена  $(j_1, i)$ -зависимость, где  $j_1 = j \pmod{\rho}$ ,  $j_1 \neq i \pmod{N}$ . В самом деле: это следует из того, что для каждого  $p \in Q_D$  и для каждого  $r \in Q_{p,p}^{i-D}$  имеем  $Q_{r,p}^{j-i} = Q_{r,p}^{j_1-i}$ . Так как  $N \neq \rho$  для  $i = j \pmod{N}$  а.-функция  $f$  также не будет  $(j, i)$ -зависимой. Получилось, что счетчик  $B_{D,N}$  допустим системой  $\{f_{\text{III}}, f\}$ . Очевидно, что из допустимости  $B_{0,2\rho}$  следует допустимость  $B_{0,\rho}$ . Необходимость доказана.

### Достаточность.

Для фиксированных  $N, D, k, s = D + kN$  и некоторого  $j$  рассмотрим множество всех  $(D, s)$ -экспериментов  $P$  с а.-функцией  $f$ , допускающее счетчик  $B_{D,N}$ . Пусть  $|P| = t$  и  $g_j$  параллельное соединение  $t$  копий а.-функции  $f$ . Пусть  $g_j$  описывается уравнениями (1) и  $\alpha_l \in P$  —  $l$ -тый эксперимент из  $P$ ,

$$\alpha_l = (a^{(l)}(1), b^{(l)}(1)) (a^{(l)}(2), b^{(l)}(2)), \dots, (a^{(l)}(s), b^{(l)}(s)), \quad l = 1, 2, \dots, t,$$

$$a(i) = (a^{(1)}(i) \dots a^{(t)}(i)), b(i) = (b^{(1)}(i) \dots b^{(t)}(i)), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Можно считать, что среди  $a(1), a(2), \dots, a(s)$  нет равных (в противном случае можно добавить фиктивные входы и выбрать  $a(1), a(2), \dots, a(s)$  попарно не равными). Рассмотрим  $(D, s)$ -эксперимент (2) с а.-функцией  $g_j$ . Для  $a \in E_2^n$  определим булеву вектор-функцию  $h_j : E_2^{m+n} \rightarrow E_2^m$ ,

$$h_j(x, y) = \begin{cases} a(i) & \text{для } x = a(i), y = b(i), i = 1, \dots, s \\ a(j) & \text{для } y = \psi(q(j), x), x \in E_2^n, y \in E_2^m. \end{cases}$$

Это можно сделать ввиду отсутствия  $(j, i)$ -зависимостей. В состоянии  $q(j)$  выходная функция а.-функции  $f_j(x) = h_j(x, g_j(x))$  принимает значение  $a(j)$  для всех входных букв, то есть является константой. Рассмотрим а.-функцию  $F_{N,D,k}(x) = f_s(\dots f_2(f_1(x)) \dots)$  с начальным состоянием  $(q(1), q(1), \dots, q(1))$ , она имеет  $n$  входов и  $n$  выходов. В состоянии  $(q(j), q(j), \dots, q(j))$  реализуется константа  $a(j)$ . После  $n$  применений операции обратной связи от соответствующих выходов к соответствующим входам получится а.-функция, с точностью до булевой перекодировки, равная  $B_{D,N}$ . Достаточность доказана.

### Доказательство леммы 2.

Возьмем такой случай расположения чисел  $D < D + \rho < i < i + \rho < j < s - \rho < s$ . Если для  $(D, s)$ -экспериментов выполнена  $(j, i)$ -зависимость, то для  $(D_1, s_1)$ -экспериментов, будет выполнена  $(j_1, i_1)$ -зависимость, где  $D_1 < D_1 + \rho < i_1 < D + 2\rho < j_1 < s_1 < j_1 + \rho$ , и  $D_1, D; i_1, i; j_1, j; s_1, s$  попарно совпадают по модулю  $\rho$ . Это следует из того, что для каждого  $p \in Q_{q_1,p}^D$  имеем  $Q_{q_1,p}^D = Q_{q_1,p}^{D_1}$ ,  $Q_{p,p}^i = Q_{p,p}^{i_1}$ ; для каждого  $r \in Q_{p,p}^{i-D}$  имеем  $Q_{r,p}^{j-i} = Q_{r,p}^{j_1-i_1}$ ; для каждого  $l \in Q_{r,p}^{j-i}$  имеем  $Q_{l,p}^{s-j} = Q_{l,p}^{s_1-j_1}$ .

В случае другого расположения чисел  $D, i, j$  мы таким же способом сократим интервалы между числами  $1, D, i, j$ . Следовательно, наличие или отсутствие  $(j, i)$ -зависимости на  $(D, s)$ -экспериментах равносильно, соответственно, наличию или отсутствию  $(j_1, i_1)$ -зависимости на  $(D_1, s_1)$ -экспериментах при  $D_1 \leq s_1 \leq 5\rho$ . Последний факт проверяется перебором всех  $(D_1, s_1)$ -экспериментов.

Таким образом, условие выразимости системой  $\{f_{\text{ш}}, f\}$  всех константных а.-функций алгоритмически проверяемо. Лемма 2 доказана.

Пусть  $I_1, I_2$  полные графы с множествами вершин  $P_1, P_2$  и функциями отметок ребер

$$\chi_1: P_1 \times P_1 \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\}, \chi_2: P_2 \times P_2 \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\},$$

соответственно. Полный граф с множеством вершин  $P_1 \times P_2$  и функцией отметок  $\chi: (P_1 \times P_2) \times (P_1 \times P_2) \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\}$ , где

$$\chi(((p_1^1, p_1^2), (p_2^1, p_2^2))) = \overline{\max}(\chi_1((p_1^1, p_2^1)), \chi_2((p_1^2, p_2^2)))$$

назовем прямым произведением графов  $I_1, I_2$  и обозначим через  $I_1 \times I_2$ . Граф  $\underbrace{I \times \dots \times I}_l$  будем называть  $l$ -той степенью графа  $I$  и обозначать через  $I^l$ .

**Утверждение 1.** В графе  $\widehat{I}_f$  существует  $i$ -тый информационный цикл точно тогда, когда для некоторого натурального  $l \leq 2^n |Q|^2 2^{|Q|^2}$   $i$ -тый информационный цикл существует в графе  $(I_f)^l$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  а.-функция, определенная уравнениями (1),  $I_f$  — ее локальный информационный граф,  $\widehat{I}_f$  — ее глобальный информационный граф,  $q \in Q_i, X_0 = \{(q, q)\}$ ,

$$X_0 \xrightarrow{x_0} X_1 \xrightarrow{x_1} \dots X_{s-1} \xrightarrow{x_{s-1}} X_0$$

$i$ -тый информационный цикл в  $\widehat{I}_f$ . Длина  $s$  этого цикла не превосходит числа вершин графа  $\widehat{I}_f$ , которое не превосходит  $2^{|Q|^2}$ . Пусть  $\Upsilon_j = \Upsilon(X_j, X_{j+1}), j = 0, 1, \dots, s-1$  система ребер графа  $I_f$ , по которым выбрана отметка  $x_j = \max_{E \in \Upsilon_j} \chi(E)$  ребра  $X_j, X_{j+1}$  графа  $\widehat{I}_f$ . Пусть  $l$  число разных цепей, идущих по ребрам систем  $\Upsilon_j, j = 0, 1, \dots, s-1$  из  $X_0$  в  $X_0$ , тогда для некоторого  $l$  в  $(I_f)^l$  будет  $i$ -тый информационный цикл, составленный из указанных цепей. Заметим, что  $l \leq |Q|^2 2^{ns} = 2^n |Q|^2 2^{|Q|^2}$ .

Обратно. Пусть в  $(I_f)^l$  имеется  $i$ -тый информационный цикл,  $q \in Q_i$ ,

$$(p_1^0, \dots, p_l^0) \xrightarrow{x_0} \dots \rightarrow (p_1^{s-1}, \dots, p_l^{s-1}) \xrightarrow{x_{s-1}} (p_1^0, \dots, p_l^0),$$

$p_j^r \in Q \times Q, r = 1, \dots, s-1, j = 1, \dots, l, (p_1^0, \dots, p_l^0) = ((q, q), \dots, (q, q))$ . Пусть  $X_i = \{q_j^i | j = 1, 2, \dots, l\}$ , тогда цикл  $(X_0) \xrightarrow{y_0} (X_1) \xrightarrow{y_1} \dots \xrightarrow{y_{s-1}} (X_0)$  будет глобальным информационным циклом в  $\widehat{I}_f$ . В самом деле:  $y_0 = x_0 = 1$ ;  $y_1 = x_1 = 2$  не может измениться, так как она уже максимальна. Если  $x_j = 0$  и возникла ситуация, когда для одной системы ребер отметка равна 0, а для другой — 1, тогда функция  $\overline{\max}$  выберет отметку 0. Отметка  $\lambda$  возникнуть здесь не может. Утверждение 1 доказано.

Пусть  $g(x) = y$  одноместная а.-функция с уравнениями (1),  $I_g$  ее локальный информационный граф. Пусть

$$(p(1), q(1)) \xrightarrow{x_1} (p(2), q(2)) \xrightarrow{x_2} \dots \xrightarrow{x_{l-1}} (p(l), q(l))$$

в графе  $I_g$ , между отметками которого и функциями  $\varphi$  и  $\psi$  выполнено соотношение (5), назовем *приведенным* (см. рис. 1). Здесь  $\psi_p(a) = \psi(p, a)$ .

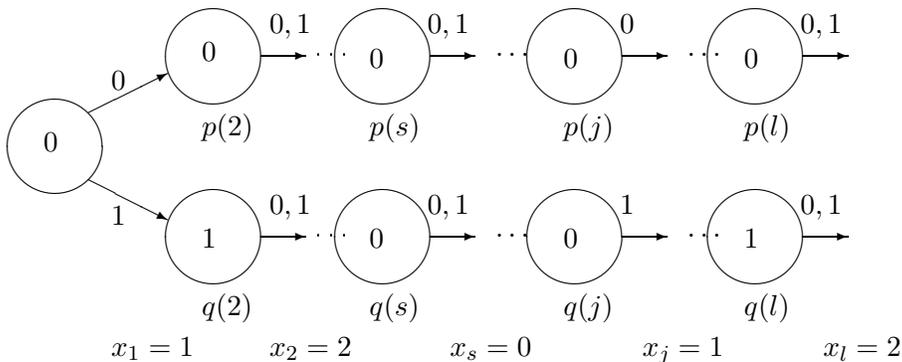


Рис. 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{p(i)} \equiv \psi_{q(i)} \equiv 0, \text{ при } x_i \neq 2; \\ \psi_{p(i)} \equiv 0, \psi_{q(i)} \equiv 1, \text{ при } x_i = 2; \\ \varphi(p(i), 0) = \varphi(p(i), 1) = p(i + 1), \text{ при } x_i \neq 1; \\ \varphi(q(i), 0) = \varphi(q(i), 1) = q(i + 1), \text{ при } x_i \neq 1; \\ \varphi(p(i), 0) = p(i + 1), \varphi(q(i), 1) = q(i + 1) \text{ при } x_i = 1. \end{array} \right. \quad (5)$$

**Утверждение 2.** Пусть в графе  $I_f$  имеется  $i$ -тый цикл длины  $l$  с отметками  $x_1, x_2, \dots, x_l$ , тогда через  $\{f, f_{\text{III}}\} \cup \mathbf{K}$  выразима одно-местная а.-функция  $g$ , в графе  $I_g$  которой имеется  $i$ -тый приведенный цикл с теми же отметками  $x_1, x_2, \dots, x_l$ .

**Доказательство.**

Пусть указанный цикл в графе  $I_f$  имеет вид (рис. 2). Состояния  $p_2, p_3, \dots, p_l$  образуют верхнюю ветвь, а состояния  $q_2, q_3, \dots, q_l$  — нижнюю ветвь цикла,  $p_i, q_i \in Q, a_i, b_i \in E_2^n, c_i, d_i \in E_2^m$ .

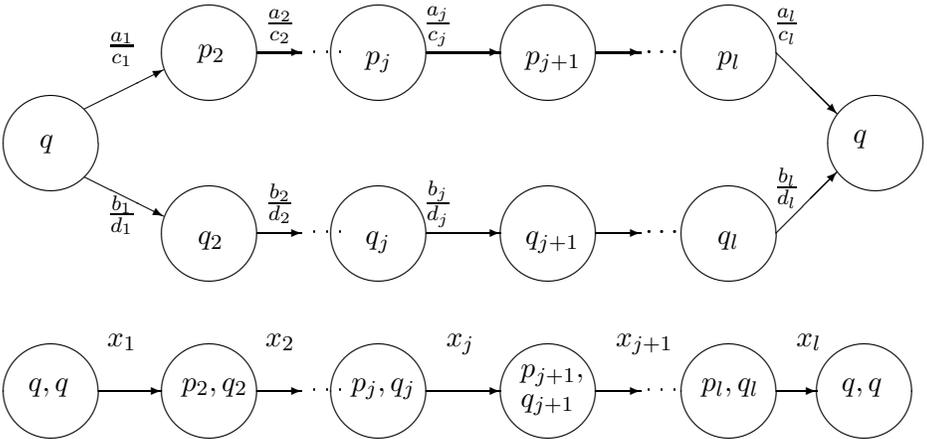


Рис. 2.

Определим функции

$$\gamma_j: E_2 \rightarrow E_2^n, \quad \delta_j: E_2^n \times E_2^m \rightarrow E_2$$

по  $a_j, b_j, c_j, d_j$  (см. рис. 1),  $j = 1, 2, \dots, l$ , следующим образом:

$$\gamma_j(z_1) = \begin{cases} a_j & \text{при } x_j = 0; \\ a_j & \text{при } x_j = 1, z_1 = 0; \\ b_j & \text{при } x_j = 1, z_1 = 1; \\ a_j & \text{при } x_j = 2, a_j = b_j, c_j \neq d_j; \\ a_j & \text{при } x_j = 2, z_1 = 0; \\ b_j & \text{при } x_j = 2, z_1 = 1; \end{cases}$$

$$\delta_j(z_2, y_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_j = 0, x_j = 1; \\ 0 & \text{при } x_j = 2, a_j = b_j, c_j \neq d_j, z_2 = c_j, y_1 = a_j; \\ 1 & \text{при } x_j = 2, a_j = b_j, c_j \neq d_j, z_2 = d_j, y_1 = b_j; \\ 0 & \text{при } x_j = 2, a_j \neq b_j, e_j \neq c_j, z_2 = c_j, y_1 = a_j; \\ 1 & \text{при } x_j = 2, a_j \neq b_j, e_j \neq c_j, z_2 = e_j, y_1 = a_j; \\ 1 & \text{при } x_j = 2, a_j \neq b_j, e_j \neq c_j, y_1 = b_j. \end{cases}$$

Пусть а.-функции  $D_1, D_2 \in [\{\mathbf{K}, f_{\text{ш}}\}]$  и имеют уравнения (6), (7), соответственно,

$$D_1: E_2^* \rightarrow (E_2^n)^*, \quad D_2: (E_2^m \times E_2^n)^* \rightarrow E_2^*.$$

$S_1, S_2$  множества состояний а.-функций  $D_1, D_2$ , соответственно, и  $S_1 = S_2 = \{1, 2, \dots, l\}$ . Здесь  $z_1 \in E_2, y_1 \in E_2^n, z_2 \in E_2^m, y_2 \in E_2, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ .

$$\begin{cases} s_1(1) = 1, \\ s_1(t+1) = s_1(t) + 1 \pmod{l}, \\ y_1(t) = \gamma_{s_1(t)}(z_1) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} s_2(1) = 1, \\ s_2(t+1) = s_2(t) + 1 \pmod{l}, \\ y_2(t) = \delta_{s_2(t)}(z_2, y_1) \end{cases} \quad (7)$$

В графе одноместной а.-функции  $h = D_2(f(D_1(z_1)), D_1(z_1))$  будет «почти приведенный» цикл с такими же отметками  $x_1, \dots, x_l$  с той разницей, что для  $x_i = 2$  могут быть два варианта переходов а) и б) (рис. 3).

Далее мы сведем случай б) к случаю а). Пусть а.-функция  $H_j(u, v, z), H_j: (E_2^3)^* \rightarrow E_2^*$  имеет множество состояний  $S =$

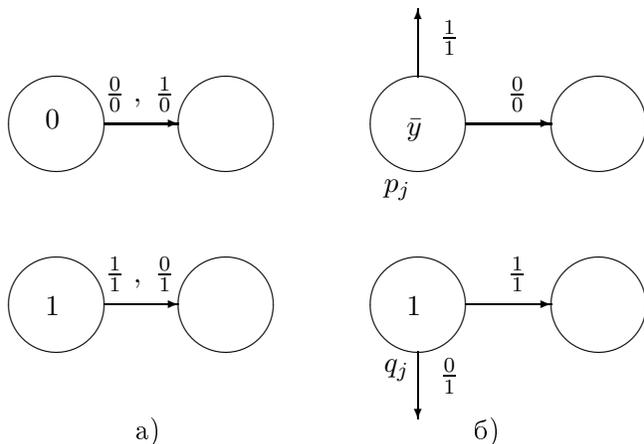


Рис. 3.

$\{1, 2, \dots, l\}$  и уравнения

$$\begin{cases} s(1) = 1, \\ s(t + 1) = s(t) + 1 \pmod{l}, \\ H_j(t) = \begin{cases} u(t) & \text{для } s(t) \neq j, \\ u(t) + v(t) + z(t) & \text{для } s(t) = j. \end{cases} \end{cases}$$

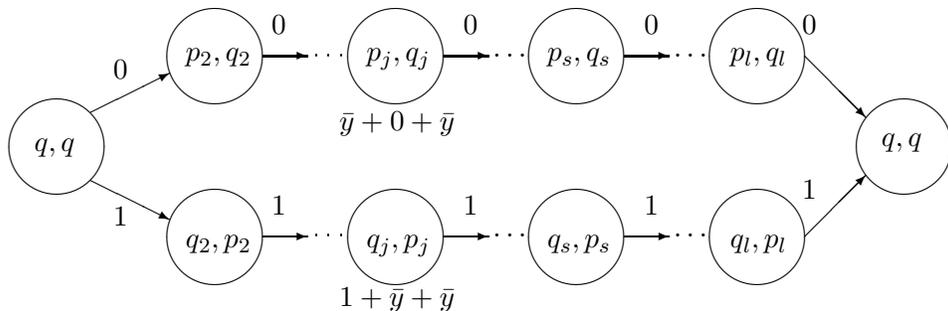


Рис. 4.

Если номер  $j$  соответствует случаю б), тогда а.-функция  $F_j(y) = H_j(h(y), \overline{h(\bar{y})}, \bar{y})$ , имеет фрагмент диаграммы, показанный на рис. 4, и приведенный цикл с теми же отметками  $x_1, x_2, \dots, x_l$ . В самом деле: для  $s(t) \neq j$  выполнено  $F_j \equiv h(y)$ , а также условия (5). Если имеет

место этот случай, то выходная функция в состоянии  $(p_j, q_j)$  (рис. 4) будет такова:  $\bar{y} + 0 + \bar{y} = 0$ , а в состоянии  $(q_j, p_j)$  будет выходная функция  $1 + \bar{y} + \bar{y} = 1$ . Таким образом, для  $F_j(y)$  будут выполнены все условия (5), кроме:  $\varphi(p(j), 1) = p(j + 1)$ ,  $\varphi(q(j), 0) = q(j + 1)$  в случае б). При помощи срабатывающей в  $j$ -тый момент обратной связи указанный недостаток исправляется, и фрагмент диаграммы приводится к виду рис. 1 схемой, изображенной на рисунке 5, где а.-функция  $w_j(x, y)$

$$w_j: (E_2^2)^* \rightarrow E_2$$

имеет множество состояний  $S$  и уравнения

$$\begin{cases} s(1) = 1, \\ s(t + 1) = s(t) + 1 \pmod{l}, \\ w_j(t) = \begin{cases} x(t) & \text{для } s(t) \neq j, \\ y(j) & \text{для } s(t) = j. \end{cases} \end{cases}$$

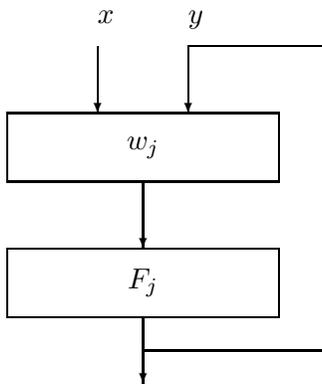


Рис. 5.

Утверждение 2 доказано.

**Утверждение 3.** Пусть а.-функция  $f$  равна «задержке»  $G$ , тогда найдется натуральное  $N \leq |Q|^2$  такое, что для любого  $i > N$ , в графе  $I_f$  имеется  $i$ -тый информационный цикл.

**Доказательство.** Пусть  $f$  одноместная а.-функция с уравнениями (1), и  $f$  эквивалентна  $G$ . Последовательность  $\{q_1\}, Q_1, Q_2, \dots$  имеет

предпериод  $\rho$  и период  $\rho$ . Пусть  $i > \rho$  и  $q \in Q_i$  — такое состояние, что для любого слова  $\beta \in E_2^*$  найдется слово  $\gamma \in E_2^*$  такое, что  $\varphi(q, \beta\gamma) = q$  ( $q$  — состояние из сильносвязной компоненты). Пусть слова  $\alpha, \bar{\alpha} \in E_2^*$  таковы, что  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_\rho$ ,  $\bar{\alpha} = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_\rho$ . Рассмотрим путь (рис. 6) в графе  $I_f$ . В состоянии  $p_j$  из  $q$  ведет путь  $a_1 a_2 \dots a_{j-1}$ , в состоянии  $q_j$  — путь  $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_{j-1}$ .

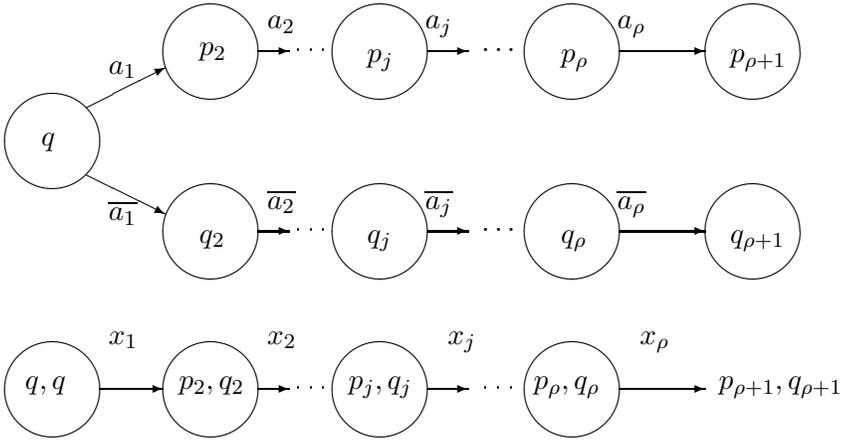


Рис. 6.

Так как в а.-функции  $f = G$ , в состоянии  $p_j$  реализуется константа  $a_{j-1}$ , а в состоянии  $q_j$  — константа  $\bar{a}_{j-1}$ , получаем, что  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = x_3 = \dots = x_\rho = 2$ . Из того, что  $Q_i = Q_{i+\rho}$ , имеем  $p_{\rho+1}, q_{\rho+1} \in Q_i$ . Для натурального  $s$  рассмотрим множество  $H_s = \{\alpha^{s-l}(\bar{\alpha})^l \mid l = 1, 2, \dots, s\} \subset E_2^*$  слов длины  $s\rho$ , составленных из слов  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$ . Пусть  $\gamma, \beta \in H_s$  таковы, что  $\gamma = \alpha^l(\bar{\alpha})^{s-l}$ ,  $\beta = \alpha^j(\bar{\alpha})^{s-j}$ , где  $l < j$ , состояния  $r_\beta, r_\gamma, p \in Q$ , такие что  $r_\beta = \varphi(q, \beta)$ ,  $r_\gamma = \varphi(q, \gamma)$ ,  $p = \varphi(q, \alpha^l)$ . В графе  $I_f$  из пары  $(q, q)$  в пару  $(r_\beta, r_\gamma)$  ведет путь (рис. 7), определяемый парой слов  $(\beta, \gamma)$  с отметками  $y_1 = \dots = y_{l\rho} = 0, y_{l\rho+1} = 1, y_{l\rho+2} = \dots = y_{j\rho+1} = 2, y_{j\rho+2} = \dots = y_{s\rho} = 0$ .

Если предположить, что для любого  $s$  и любых  $\gamma, \beta \in H, \gamma \neq \beta$  выполнено, что  $r_\beta \neq r_\gamma$ , то получим противоречие с конечностью множества состояний а.-функции  $f$ . Следовательно, найдется такое  $s$  и такие слова  $\gamma, \beta \in H, \gamma \neq \beta$  длины  $s\rho$ , что выполнено  $r_\beta = r_\gamma$ . Заметим, что  $r_\beta, r_\gamma, p, q \in Q_i$ . Пусть  $\delta$  такое слово, что  $\varphi(r_\beta, \delta) = q$ , то-

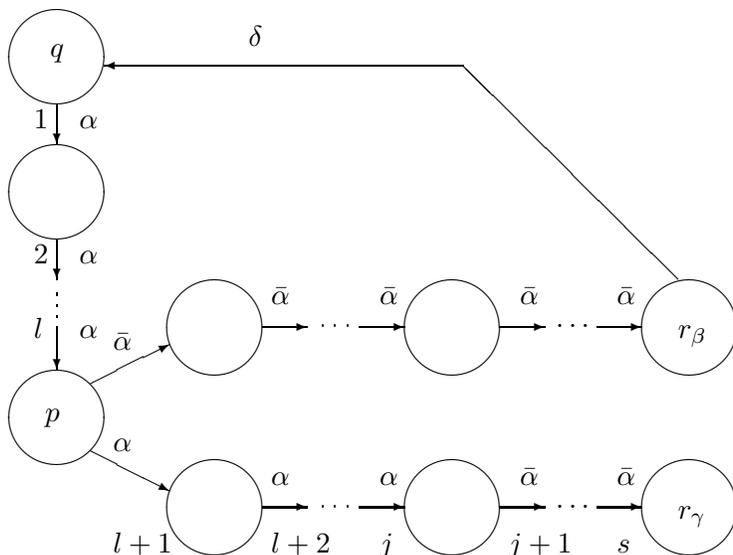


Рис. 7.

гда из пары  $(p, p)$  начинается искомый  $i$ -тый информационный цикл (рис. 7). Очевидно, что всякое состояние достижимо словом длины не большей  $|Q|^2$ . Утверждение 3 доказано.

**Утверждение 4.** Пусть  $a$ -функция  $h$  получается суперпозицией  $a$ -функций  $h_1, h_2$ , при этом в графах  $I_h, I_{h_1}, I_{h_2}$ , соответственно, есть ребра с отметками  $((p_1, p_2), (q_1, q_2)) \xrightarrow{x} ((r_1, r_2), (s_1, s_2))$ ,

$$(p_1, q_1) \xrightarrow{y} (r_1, s_1), (p_2, q_2) \xrightarrow{z} (r_2, s_2),$$

тогда отметки  $x, y, z$  связаны соотношениями:

$$(x = 2) \rightarrow ((y = 2) \vee (z = 2)),$$

$$(x = 0) \rightarrow ((y = 2) \vee (y = z = 0)).$$

**Доказательство.** Рассмотрим фрагмент диаграммы  $a$ -функции  $h$  (рис. 8), где показаны выходы  $a$ -функций  $h_1, h_2$ . Пусть  $x = 2$  и  $c \neq e$ , тогда, если  $c'' \neq c'$ , то  $y = 2$ , если  $c'' = c'$ , то  $z = 2$ . Пусть  $x = 0, a =$

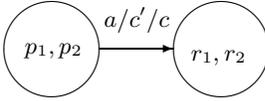


Рис. 8.

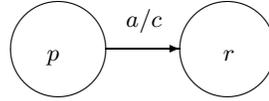
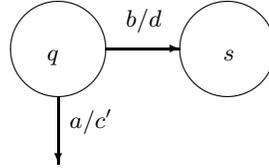
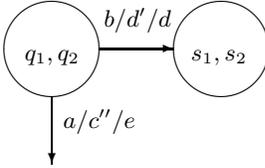


Рис. 9.



$b, c = d$ , тогда при  $c' \neq d'$  имеем  $y = 2$ , а при  $c' = d'$  имеем  $y = z = 0$ . Утверждение 4 доказано.

**Утверждение 5.** Пусть  $a$ -функция  $h$  получена из  $a$ -функции  $g$  при помощи операции обратной связи, и в графе  $I_h$  есть ребро  $(p, q) \xrightarrow{x} (r, s)$ , тогда в графе  $I_g$  есть ребро  $(p, q) \xrightarrow{y} (r, s)$ , и при этом отметки ребер связаны соотношениями:

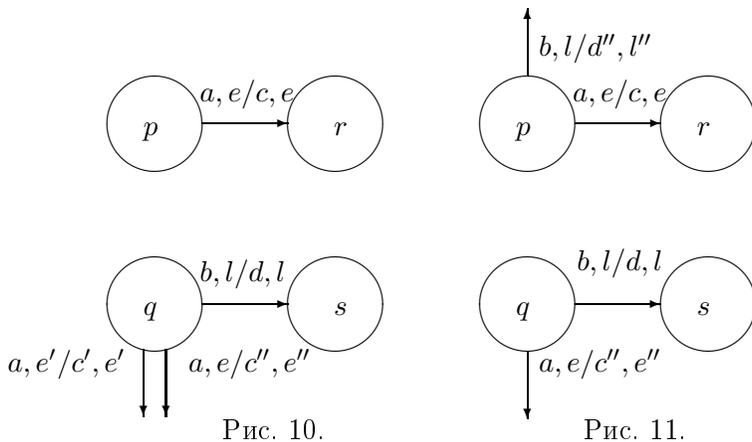
$$(x = 2) \rightarrow (y = 2); (x = 0) \rightarrow (y \neq 1).$$

**Доказательство.** Пусть  $a$ -функция  $h$  получена из  $a$ -функции  $g$  с уравнениями (1) операцией обратной связи, примененной от последнего выхода к последнему входу. На рисунке 9 изображен фрагмент диаграммы  $a$ -функции  $h$ , на рисунке 10 — соответствующий ему фрагмент диаграммы  $a$ -функции  $g$ , где  $e, l, e', e'' \in E_2, a, b \in E_2^{n-1}, c, d, c', c'' \in E_2^{m-1}$ .

Пусть  $x = 2, c' \neq c$ , и предположим противное  $y = 2$ , то есть выполнено  $(c'', e'') = (c, e)$ . Так как последний выход  $a$ -функции  $g$  не зависит от ее последнего входа, а первая компонента у букв  $(a, e')$  и  $(a, e)$  одна и та же, значит (см. рис. 10 состояние  $q$ ) выполнено  $e'' = e' = e$ . Но тогда  $(a, e') = (a, e)$  это один и тот же входной сигнал и  $(c', e') = (c'', e'') = (c, e)$ . Получилось противоречие с тем, что  $c' \neq c$ , значит  $y = 2$ .

Пусть теперь  $x = 0, a = b, c = d$  (см. рис. 11), предположим противное, что  $y = 1$ , и  $(a, e) \neq (b, e)$ , тогда выполнено

$$e'' = e, c'' = c, d'' = d, l'' = l.$$



Так как (по определению обратной связи) последний выход не зависит от последнего входа, имеем соотношение:  $e'' = l, l'' = e$ , значит  $e = l$ , откуда получаем противоречивое равенство  $(a, e) = (b, l)$ , значит  $y \neq 1$ . Утверждение 5 доказано.

Пусть  $g(x) = y$  одноместная а.-функция с уравнениями (1), имеющая память в  $j$ -тый момент. Фрагмент диаграммы  $g$  вида (рис. 12) назовем  $j$ -тым приведенным фрагментом.

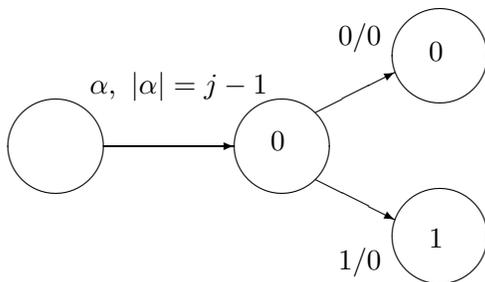


Рис. 12.

Здесь в состояниях помеченных  $0, 1$  реализуются выходные функции  $0, 1$ , соответственно.

**Утверждение 6.** Пусть а.-функция  $h$  получается суперпозицией а.-функций  $h_1, h_2$ , и для некоторого  $i$  выполнено  $h \notin U(i)$ , тогда  $h_1 \notin U(i)$  или  $h_2 \notin U(i)$ .

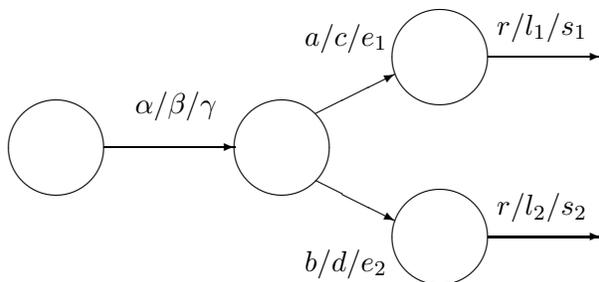


Рис. 13.

**Доказательство.** Рассмотрим фрагмент а.-функции  $h$  (см. рис. 13), на котором нарушается свойство  $h \in U(i)$ . Здесь  $s_1 \neq s_2$ . Если  $l_1 \neq l_2$ , то  $h_1 \notin U(i)$ ; если  $l_1 = l_2$ , то  $h_2 \notin U(i)$ . Утверждение 6 доказано.

**Утверждение 7.** Пусть а.-функция  $h$  получена из а.-функции  $g$  операцией обратной связи, и для некоторого  $i$  выполнено  $h \notin U(i)$ , тогда  $g \notin U(i)$ .

**Доказательство.** Пусть фрагмент а.-функции  $h$  (см. рис. 3) получился при операции обратной связи из фрагмента а.-функции  $g$  (см. рис. 14).

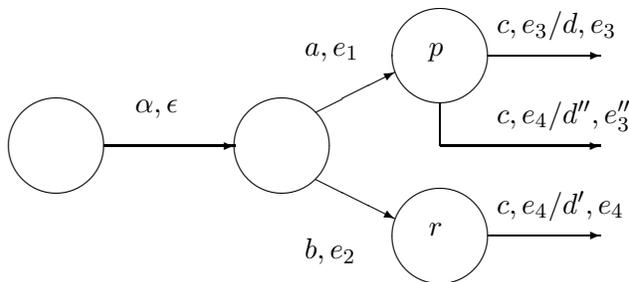


Рис. 14.

Здесь  $d \neq d'$ . Если  $e_3 = e_4$ , то  $g \notin U(i)$ . Предположим, что  $e_3 \neq e_4$ , тогда по определению обратной связи  $e_3 = e_3''$ , и значит, по сигналу  $(c, e_4)$  в состояниях  $p$  и  $r$  будут получаться разные выходные буквы  $(d'', e_3)$  и  $(d', e_4)$ . Значит,  $g \notin U(i)$ . Утверждение 7 доказано.

**Доказательство леммы 3. Достаточность.**

Зафиксируем  $i > N$ . Выберем в графе  $\widehat{I}_f$   $i$ -тый информационный цикл длины  $p$ . По утверждению 1 в графе  $(I_f)^l$  для некоторого  $l$  существует  $i$ -тый информационный цикл длины  $p$ ,  $j$ -тая проекция которого имеет отметки

$$x_{ij}^1, \dots, x_{ij}^p, \quad j = 1, 2, \dots, l$$

$$\max_j x_{ij}^1 = 1, \quad \max_j x_{ij}^2 = 2, \quad \max_j x_{ij}^s \neq 1, \quad s = 3, 4, \dots, p.$$

По утверждению 2 найдется одноместная а.-функция

$$g_{ij} \in [\mathbf{K} \cup \{f, f_{\text{ш}}\}],$$

в информационном графе которой существует приведенный цикл с теми же отметками  $x_{ij}^1, \dots, x_{ij}^p$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$  (см. рис. 1). Пусть  $\{j | x_{ij}^s = 1\} = \epsilon_i(s)$ ,  $1 \leq s \leq p$ . Из определения информационного цикла следует, что при  $s > 2$ ,  $\epsilon_i(s) \neq \emptyset$ , или при  $s = 2$  существует натуральное  $\xi_i(s)$  такое, что  $x_{i, \xi_i(s)}^s = 2$ . Рассмотрим схему (рис. 15), где  $H_1$  и  $H_2$  — булевые вектор-функции

$$H_1(z_1, z_2, s) = (x_1, x_2, \dots, x_l); \quad H_2(y_1, y_2, \dots, y_l, s) = (u, v);$$

$$u = \begin{cases} y_{\xi_i(2)}, & \text{при } s = 2; \\ y_{\xi_i(s)}, & \text{при } \epsilon_i(s) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{при } \epsilon_i(s) = \emptyset; \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} y_{\xi_i(2)} & \text{при } s = 2; \\ 0 & \text{при } s \neq 2; \end{cases}$$

$$x_j = \begin{cases} z_1 & \text{при } j = \xi_i(2), s = 2; \\ z_1 & \text{при } j \in \epsilon_i(s), s > 2, \epsilon_i(s) \neq \emptyset; \\ z_2 & \text{при } j \in \epsilon_i(s), s = 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

А.-функции  $B_{0,p}, g_{ij}, j = 1, 2, \dots, l$ , — муровские, следовательно применима операция обратной связи. Каждая из а.-функций  $g_{ij}$  имеет диаграмму (рис. 16) с той лишь разницей, что для отметки  $x_{ij}^s = 1$  переход не является безусловным. Схема (рис. 15) реализует а.-функцию  $f_{p,i}$  с диаграммой (рис. 16). Без ограничения общности можно выбрать длину цикла  $p$  не зависящую от  $i$ . В самом деле:

к каждой ветви  $i$ -того цикла можно добавить верхнюю ветвь, взяв произвольное число раз, тем самым, выбрать  $p$  кратным длинам всех  $i$ -тых информационных циклов, где  $\rho \leq i \leq 2\rho$ . Для каждого  $i < N$  по условию леммы 3  $f \notin U(i)$ , значит по утверждению 2 найдется а.-функция  $g_i \in \{\{f, f_{\text{ш}}, \mathbf{K}\}\}$ , имеющая  $i$ -тый приведенный фрагмент.

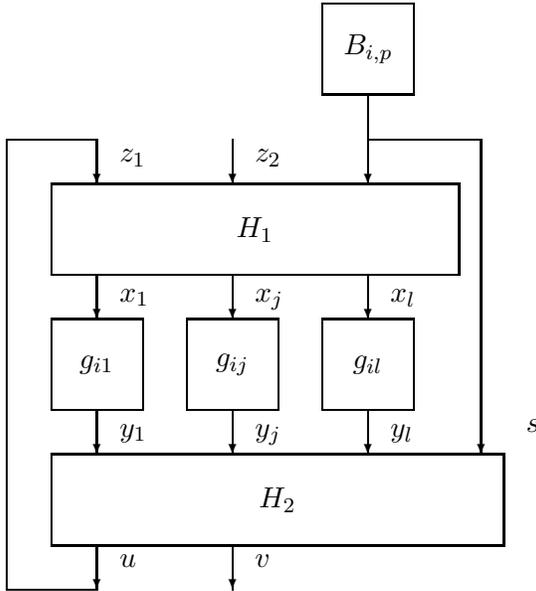


Рис. 15.

Тогда схема (рис. 17) равна «задержке»  $G$ . Здесь а.-функция  $D: (E_2^{N+p})^* \rightarrow E_2^*$ , имеет диаграмму, изображенную на рисунке 18.

Достаточность доказана.

**Необходимость.**

Пусть  $\{\{f, f_{\text{ш}}\}\} \supseteq \mathbf{K}$  и  $\{\{f, f_{\text{ш}}\}\} \ni G$ . Покажем, что  $f \notin U(i)$  для любого натурального  $i$ . В самом деле:  $G \notin U(i)$ , и если  $G$  получена некоторой схемой  $h$ , последняя операция которой суперпозиция двух функций  $h_1, h_2$ , то по утверждению 7  $h_1 \notin U(i)$  или  $h_2 \notin U(i)$ . Если последняя операция указанной схемы — операция обратной связи, то а.-функция  $g$ , из которой получена  $G$ , по утверждению 7 обладает тем же свойством:  $g \notin U(i)$ . Применяя эти рассуждения к одной из подхо-

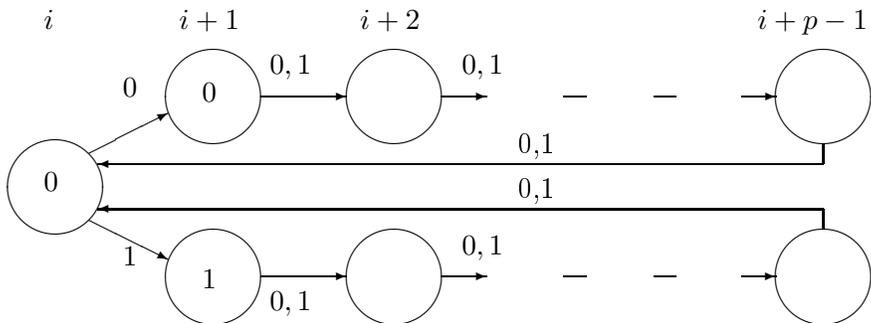


Рис. 16.

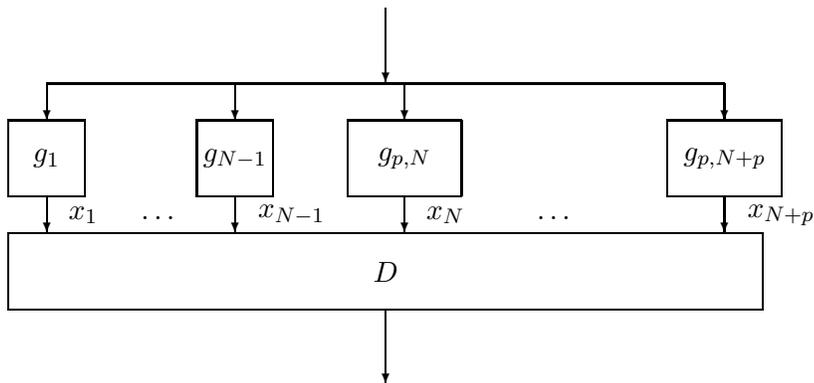


Рис. 17.

дящих а.-функций  $g, h_1, h_2$ , мы через конечное число шагов (равное числу операций в указанной схеме) придем к тому что  $f \notin U(i)$ , потому что  $f_{III} \in U(i)$ , при всех  $i$ .

По утверждению 3 найдется такое  $N$ , что в схеме  $h$ , где  $h = g$ , для любого  $i > N$  в графе  $I_h$  имеется  $i$ -тый информационный цикл. Если  $h$  получилась операцией суперпозиции из а.-функций  $h_1, h_2$ , то, согласно утверждению 4, в графе  $I_{h_1} \times I_{h_2}$  имеется  $i$ -тый информационный цикл. Если  $h$  получилась из  $g$  операцией обратной связи, то согласно утверждению 5, в  $I_g$  имеется  $i$ -тый информационный цикл. Поскольку в графе  $I_{f_{III}}$  нет  $i$ -тых информационных циклов при всех  $i$ , получаем, что  $i$ -тый информационный цикл найдется в графе  $(I_f)^l$  для некоторого  $l$ . По утверждению 1 следует, что в графе  $\hat{I}_f$  так-

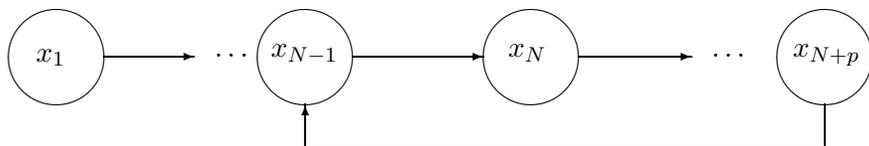


Рис. 18.

же имеется  $i$ -тый информационный цикл. Необходимость доказана. Лемма 3 доказана.

## Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 493–496.
- [2] Кратко М.И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155. № 1. С. 35–37.
- [3] Летичевский А.А. Условия полноты для конечных автоматов // Вычислительная математика и математическая физика. № 4. 1961. С. 702–710.
- [4] Бабин Д.Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. Т. 4. 1992. Вып. 4. С. 41–56.
- [5] Бабин Д.Н. О разрешимости проблемы полноты для специальных систем автоматных функций // Дискретная математика. Т. 8. 1996. Вып. 4. С. 79–91.
- [6] Бабин Д.Н. Алгоритмическая разрешимость свойств полноты и  $A$ -полноты конечных систем автоматных функций с линейной истинностной частью // Интеллектуальные системы. Т. 3. 1998. С. 51–69.
- [7] Бабин Д.Н. Конечность множества автоматных базисов Поста с разрешимой проблемой полноты // Дискретная математика. Т. 10. 1998. Вып. 3. С. 57–64.