Экстремальные задачи на бесконечных путях графа*

А. Сафиуллин

В работе рассматриваются бесконечные пути конечного ориентированного графа и предлагается спектр экстремальных задач на множестве таких путей. Для предложенных задач доказывается существование алгоритмов нахождения конструктивных решений.

1. Введение

Известны различные экстремальные задачи, формулируемые для конечных графов, например, нахождение минимального по длине или — в случае наличия стоимостной функции на ребрах графа — минимального по стоимости пути между вершинами графа. Объект исследования в таких задачах — конечные пути. В данной работе мы распространяем приемы, используемые при решении упомянутых задач, на экстремальные задачи на множестве бесконечных путей конечного графа.

Необходимость этого возникла в связи с оценкой оптимальности поведения автомата в пространстве его входных сверхслов. Рассмотрение бесконечных путей на графе индуцируется пробеганием состояниями автомата соответствующих путей на его диаграмме Мура под воздействием подаваемых на вход сверхслов.

В предлагаемом исследовании рассматривается даже более общая ситуация.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 02–01–00162а.

2. Определения и обозначения

Рассмотрим конечный ориентированный граф $\mathcal{S} = (V, E)$, где V — множество вершин графа, а E — множество его ребер. Считаем, что на ребрах графа определена функция стоимости $c : E \to \mathbb{R}$, которую распространяем на конечные пути графа, полагая:

$$c(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} c(e_i), \text{ где } \alpha = e_1 \dots e_n \text{ — путь в графе } \mathcal{S}, e_i \in E.$$

Через $||\alpha||$ для конечного пути α будем обозначать его длину, то есть число ребер в нем.

Ограничимся далее рассмотрением лишь графов, не имеющих кратных ребер. Как мы увидим далее в связи со спецификой определения стоимости конечного пути, введенное органичение не повлияет на общность рассуждений. Для таких графов множество ребер E можно интерпретировать как подмножество декартового квардрата $V \times V$ множества вершин.

Далее будем обозначать конечные пути графа как конечную последовательность вершин графа:

$$\alpha = a_0 \dots a_n, \quad a_i \in V, \quad (a_i, a_{i+1}) \in E, \quad ||\alpha|| = n.$$

Фиксируем нумерацию множества V, то есть биективное отображение

$$\mu : V \to \{1, \dots, |V|\}.$$

Обозначим через $\mathcal{V}_{pq}^n$ множество минимальных по стоимости путей длины n между вершинами $\mu^{-1}(p)$ и $\mu^{-1}(q)$. Определим семейство матриц M_i размера $|V| \times |V|$: элемент, стоящий на пересечении p-ой строки и q-ого столбца матрицы M_i, положим:

$$c_{pq}^i = \begin{cases} c(\alpha), \alpha \in \mathcal{V}_{pq}^i, & \text{если } \mathcal{V}_{pq}^i \neq \varnothing \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Считая нумерацию μ фиксированной, в дальнейшем будем опускать данный символ и писать, например, $c_{v_1 v_2}^i$, $v_1, v_2 \in V$, подразумевая под этим $c_{\mu(v_1)\mu(v_2)}^i$.

Формализуем понятие бесконечного пути. Назовем *бесконечным путем* на орграфе $\mathcal{S} = (V, E)$, где V — это множество вершин графа, а E — множество его ребер, функцию

$$f : \mathbb{Z}_+ \to V,$$

такую, что для $(f(k), f(k+1)) \in E$ для любого k.

Выделим во множестве всех бесконечных путей подмножество, элементы которого могут быть заданы конечным словом из алфавита V. Иными словами, назовем бесконечный путь f *рациональным*, если существуют числа m и n такие, что для любого k из $\mathbb{Z}_+$ выполнено:

$$f(m+k) = f(m+k+n). \tag{1}$$

Иначе говоря, рациональный путь состоит из некоторого пути длины m и бесконечно повторяющегося цикла длины n. Назовем минимальное n, для которого существует такое $m(n)$, что выполняется соотношение (1), длиной периодической части рационального пути, или *периодом*, а минимальное из $m = m(n)$ — длиной непериодической части рационального пути. Начало длины m, соответственно, будем называть *непериодической частью* рационального пути, а цикл $f(m)\ldots f(m+n)$ назовем *периодической частью* рационального пути. Обозначим для рационального пути f через $f_{\rightsquigarrow}$ его непериодическую часть, через $f_{\circlearrowright}$ его периодическую часть, а через $||f||_{\mathbb{Q}}$ сумму $m + n = ||f_{\rightsquigarrow}|| + ||f_{\circlearrowright}||$ и назовем эту сумму *рациональной длиной* пути.

Любой рациональный путь f может быть задан парой конечных путей $\langle f_{\rightsquigarrow}, f_{\circlearrowright}\rangle$, удовлетворяющей свойству $f_{\rightsquigarrow}(||f_{\rightsquigarrow}||) = f_{\circlearrowright}(0) = f_{\circlearrowright}(||f_{\circlearrowright}||)$, следующим образом:

$$f(k) = \begin{cases} f_{\rightsquigarrow}(k), & \text{если } k < ||f_{\rightsquigarrow}||, \\ f_{\circlearrowright}(k - ||f_{\rightsquigarrow}||), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Бесконечные пути, не являющиеся рациональными, назовем *иррациональными*.

Введем еще несколько обозначений. Для конечного пути $\alpha = a_0 \ldots a_n$ через $\alpha(i)$ будем обозначать вершину $a_{i \bmod n}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $n = ||\alpha|| \geqslant 0$ (при $n = 0$ имеем так называемый *вырожденный* *путь*, характеризующийся лишь начальной, она же конечная, вершиной $\alpha(0)$ и имеющий нулевые стоимость и длину), а через $l\alpha$, $l \in \mathbb{N}$, путь, состоящий из повторенного l раз цикла α, причем $(l\alpha)(i) = \alpha(i)$. Назовем конкатенацией $\alpha\beta$ двух конечных путей α и β, удовлетворяющих условию $\alpha(||\alpha||) = \beta(0)$, путь γ, определенный следующим образом:

$$\gamma(i) = \begin{cases} \alpha(i), & \text{если } i \leqslant ||\alpha|| \\ \beta(i - ||\alpha||), & \text{иначе,} \end{cases} \qquad i = \{0, \dots ||\alpha|| + ||\beta||\}.$$

Скажем, что путь γ *содержит* путь α, если существуют (возможно вырожденные) пути β_1 и β_2 такие, что $\gamma = \beta_1\alpha\beta_2$.

Рассмотрим некий конечный путь α. Если $\alpha(0) \neq \alpha(||\alpha||)$, то определим *нециклическую часть* пути α, как минимальный по длине путь из вершины $\alpha(0)$ в $\alpha(||\alpha||)$, являющийся подпоследовательностью последовательности ребер $\varphi_\alpha = \{(\alpha(i), \alpha(i+1))\}_{i=0}^{||\alpha||-1}$. Из свойства минимальности следует, что нециклическая часть пути не содержит циклов, то есть является простым путем. Множество циклов, полученное из последовательности φ_α вычеркиванием членов, составивших нециклическую часть пути α, назовем *циклической частью* пути. Стоимостью (длиной) циклической части назовем сумму стоимостей (длин) входящих в нее циклов. Очевидно, что сумма стоимостей (длин) циклической и нециклической частей пути совпадает со стоимостью (с длиной) всего пути α. В случае же, когда $\alpha(0) = \alpha(||\alpha||)$, скажем, что путь α имеет вырожденную нециклическую часть, стоимость и длину которой положим равными нулю, и что его циклическая часть совпадает с ним самим.

Обозначим через M и m, соответственно, максимум и минимум функции стоимости, определенной на ребрах данного графа, а через $\mu(\alpha)$ — функцию средней стоимости ребра пути, определенную на множестве всех конечных путей графа:

$$\mu(\alpha) = \frac{c(\alpha)}{||\alpha||}.$$

Тогда в данных обозначениях очевидно, что для любого конечного пути α выполнено $m \leqslant \mu(\alpha) \leqslant M$.

3. Постановка экстремальных задач на множестве бесконечных путей

Рассмотрим семейство экстремальных задач на множестве бесконечных путей графа. Под экстремальной задачей будем понимать задачу на нахождение бесконечного пути, экстремального с точки зрения стоимостной метрики, индуцированной на конечных путях посредством задания стоимости ребер.

Как будет показано ниже, для любой из рассмотренных экстремальных задач существование решения влечет существование рационального решения, а поэтому будем искать лишь рациональные решения, как более удобные с точки зрения их представления (представляются конечным словом из алфавита V).

Перейдем теперь к формулировке задач на экстремум, который положим минимумом, что, однако, не сказывается на общности рассуждений.

3.1. Оптимальность в слабом смысле

Назовем бесконечный путь *оптимальным в слабом смысле*, если любая его конечная часть α принадлежит множеству $\mathcal{V}^{||\alpha||}_{\alpha(0)\alpha(||\alpha||)}$. И первой экстремальной задачей обозначим задачу нахождения оптимального в слабом смысле рационального пути, выходящего из данной вершины. Или, в формальной постановке, учитывая то, что любой путь, содержащийся в минимальном пути также минимален, имеем:

Найти на рассматриваемом графе $\mathcal{S} = (V, E)$ выходящий из данной вершины a рациональный путь f такой, что

$$c(f(0) \dots f(k)) = c^k_{f(0)f(k)} \text{ для любого } k \in \mathbb{N}.$$

Иными словами, оптимальный в слабом смысле путь означает, что нам не важно «куда» мы идем, важно лишь, что куда бы мы не шли по графу, мы идем туда по минимальному пути. Однако, бывает, что пути, ведущие в разные вершины, могут существенно отличаться по стоимости, хотя оба будут являться частями оптимальных в слабом смысле бесконечных путей. И в следующей задаче на экстремум мы затронем данный аспект.

3.2. Оптимальность в сильном смысле

Назовем бесконечый путь *оптимальным в сильном смысле* или *абсолютно оптимальным*, если стоимость любого его начала не превосходит стоимости начала такой же длины любого другого пути, выходящего из данной вершины.

Зададимся целью отыскать пути являющиеся абсолютно оптимальными по стоимости среди всех путей, выходящих из некоторой начальной вершины:

Найти на рассматриваемом графе $\mathcal{S} = (V, E)$ выходящий из данной вершины a рациональный путь f такой, что

$$c(f(0)\ldots f(k)) \leqslant c(\tilde{f}(0)\ldots \tilde{f}(k)) \quad \text{для любого } k \text{ и любого пути } \tilde{f} \text{ такого, что } \tilde{f}(0) = a.$$

Очевидно, что абсолютно оптимальный путь существует не всегда. Возможно даже, что для любой вершины некоторого графа не существует абсолютно оптимального бесконечного пути, выходящего из нее.

3.3. Асимптотическая оптимальность

Как было показано в предыдущем пункте, бывают случаи, когда для некоторой вершины графа не существует абсолютно оптимальных по стоимости путей, выходящих из нее, а также когда такого пути не существует для любой вершины некоторого графа. В связи с этим в данном пункте перейдем к рассмотрению бесконечных путей, не являющихся абсолютно оптимальными, однако обладающих специальным свойством, приближающим их к таковым.

Назовем бесконечный путь *асимптотически оптимальным*, если для любого другого пути любое его начало длины больше некоторой заданной, меньше по стоимости начала такой же длины любого другого пути, выходящего из данной вершины.

Фиксируем некоторую вершину и зададимся целью найти рациональный путь, выходящий из данной вершины и являющийся асимптотически оптимальным, или в формальной постановке имеем:

Найти на рассматриваемом графе $\mathcal{S} = (V, E)$ выходящий из данной вершины a рациональный путь f и число k_0 такие, что

$$c(f(0)\dots f(k)) \leqslant c(\tilde{f}(0)\dots \tilde{f}(k)) \text{ для любого } k > k_0 \text{ и любого пути } \tilde{f}, \text{ выходящего из вершины } a.$$

И теперь, сформулировав задачи на экстремум на множестве бесконечных путей графа, перейдем к описанию полученных результатов по их решению.

4. Минимальные циклы

Посвятим данный пункт описанию циклов графа, названных минимальными (в различных смыслах) и обладающих небезынтересными в плане решения поставленных задач свойствами.

4.1. Минимальность в слабом смысле

Пусть для некоторой вершины a рассматриваемого графа определенная выше величина $c_{aa}^n < \infty$. Назовем любой цикл из множества $\mathcal{V}_{aa}^n$ *минимальным в слабом смысле*, если для всех натуральных l верно равенство

$$c_{aa}^{ln} = l c_{aa}^n. \tag{2}$$

Обозначим через $a_{\circlearrowleft}^n$ один из минимальных в слабом смысле циклов длины n, проходящих через вершину a. Докажем следующее

Утверждение 1. *Пусть цикл $a_{\circlearrowleft}^n$ проходит через вершины $a, a_1, \dots, a_{n-1}, a$, тогда для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ имеем*

$$c_{aa}^{ln} = c_{a_i a_i}^{ln} \text{ для всех } l \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть это не так. Предположим вначале, что $\exists i$ такое, что для некоторого l $c_{aa}^{ln} > c_{a_i a_i}^{ln}$. Возьмем произвольный цикл

α из $\mathcal{V}^{ln}_{a_i a_i}$. Из сделанного предположения вытекает, что он отличается от цикла $la^n_{\circlearrowright}$ (ввиду различной стоимости: $lc^n_{aa} = c^{ln}_{aa} \neq c^{ln}_{a_i a_i}$). Пусть путь β начинается в вершине a и совпадает с циклом $a^n_{\circlearrowright}$ до вершины a_i включительно. Далее пусть путь β совпадает с циклом α и завершается путем между a_i и a, совпадающим на этом отрезке с циклом $a^n_{\circlearrowright}$. Таким образом построенный путь β имеет длину $(l+1)n$. Однако

$$c(\beta) = c^n_{aa} + c(\alpha) = c^n_{aa} + c^{nl}_{a_i a_i} < c^n_{aa} + c^{nl}_{aa} = (l+1)c^n_{aa} = c^{(l+1)n}_{aa},$$

что противоречит минимальности величины $c^{(l+1)n}_{aa}$.

Теперь допустим, что для некоторых i и l выполнено $c^{ln}_{aa} < c^{ln}_{a_i a_i}$. Очевидно (поскольку $c^n_{aa} = c(a^n_{\circlearrowright})$ и $a_i \in a^n_{\circlearrowright}$), что $c^n_{a_i a_i} \leqslant c^n_{aa}$, а поэтому имеем:

$$c^{ln}_{aa} < c^{ln}_{a_i a_i} \leqslant lc^n_{a_i a_i} \leqslant lc^n_{aa} = c^{ln}_{aa},$$

то есть получаем противоречие, которое в паре с полученным ранее доказывает утверждение.

Следствие 1. *Понятие минимальности в слабом смысле для цикла не зависит от вершины, относительно которой проверяется условие его минимальности* (2).

Доказательство. В самом деле, пусть цикл $a^n_{\circlearrowright}$ проходит через вершины $aa_1 \ldots a_{n-1}a$, вследствие доказанного утверждения и по определению цикла $a^n_{\circlearrowright}$ для некоторого i и произвольного l верно $c^{ln}_{a_i a_i} = c^{ln}_{aa} = lc^n_{aa} = lc^n_{a_i a_i}$ (последнее равенство есть применение доказанного утверждения для $l = 1$).

Назовем циклы α и β *циклично-связанными*, если существует цикл γ, их содержащий.

Утверждение 2. *Цикл α — минимальный в слабом смысле цикл, тогда и только тогда, когда для любого цикла β, циклично-связанного с α, верно $\mu(\alpha) \leqslant \mu(\beta)$.*

Доказательство необходимости. Предположим противное, то есть существование цикла β, циклично-связанного с α, такого, что $\mu(\beta) < \mu(\alpha)$.

Рассмотрим цикл γ, содержащий циклы α и β. Без ограничения общности цикл γ можно представить как следующую конкатенацию: $\gamma = \alpha\delta_1\beta\delta_2$, причем путь $\delta = \delta_1\delta_2$ является циклом. Обозначим $n_1 := ||\alpha||$, $n_2 := ||\beta||$ и $n_3 := ||\delta||$ и решим диофантово уравнение

$$n_1 k_1 - n_2 k_2 = n_3 C, \tag{3}$$

где $C = (n_1, n_2)$, то есть наибольший общий делитель чисел n_1 и n_2. Его решение имеет вид $k_i(k) = C_i^1 k + C_i^2$, $k \in \mathbb{Z}$, $C_i^1 > 0$.[1]

Обозначим вершину $\alpha(0)$ через a. Рассмотрим проходящий через вершину a цикл $\varepsilon_k = (C\delta)(k_2(k)\beta)$, $k \in \mathbb{N}$. Длина данного цикла $||\varepsilon_k|| = C||\delta|| + k_2(k)||\beta|| = Cn_3 + k_2(k)n_2 = n_1 k_1(k)$, в силу соответствующей зависимости k_1 и k_2 от k, делающих их корнями уравнения (3). Оценим стоимость цикла ε_k:

$$\begin{aligned} c(\varepsilon_k) &= Cc(\delta) + k_2(k)c(\beta) = Cc(\delta) + k_2(k)n_2\mu(\beta) = \\ &= Cc(\delta) + (n_1 k_1(k) - Cn_3)\mu(\beta) = n_1\mu(\beta)k_1(k) + C(c(\delta) - n_3\mu(\beta)). \end{aligned}$$

Исходя из предположения, что $\mu(\beta) < \mu(\alpha)$, и ввиду линейной зависимости $c(\varepsilon_k)$ от k, получаем, что начиная с некоторого k_0 выполнено $c(\varepsilon_k) < n_1\mu(\alpha)k_1(k)$, $\forall k > k_0$.

Таким образом, для некоторого $\hat{k}$ имеем, что $c(\varepsilon_{\hat{k}}) < n_1\mu(\alpha)k_1(\hat{k})$. Теперь, пользуясь условием минимальности цикла α и следствием из утверждения 1, получаем, что

$$k_1(\hat{k})c_{aa}^{||\alpha||} = c_{aa}^{k_1(\hat{k})||\alpha||}.$$

И, продолжая неравенство для $c(\varepsilon_{\hat{k}})$, получаем:

$$c(\varepsilon_{\hat{k}}) < n_1\mu(\alpha)k_1(\hat{k}) = k_1(\hat{k})c_{aa}^{||\alpha||} = c_{aa}^{k_1(\hat{k})||\alpha||}.$$

Вспоминая, что длина цикла $\varepsilon_{\hat{k}}$ есть $||\varepsilon_{\hat{k}}|| = n_1 k_1(\hat{k}) = k_1(\hat{k})||\alpha||$, приходим к противоречию с минимальностью величины $c_{aa}^{k_1(\hat{k})||\alpha||}$, которое и завершает данное доказательство от противного.

Доказательство достаточности. Пусть $||\alpha|| = n$, и цикл проходит через некоторую вершину a. Докажем, что

[1] Точнее, $C_1^1 = \frac{n_2}{(n_1,n_2)}$; $\quad C_2^1 = \frac{n_1}{(n_1,n_2)}$, и $C_i^2 = (-1)^{i-1}c_i n_3(n_1,n_2)$, $\quad i = 1, 2$, где константы c_i удовлетворяют соотношению $c_1\frac{n_1}{(n_1,n_2)} + c_2\frac{n_2}{(n_1,n_2)} = 1$ и существуют ввиду известного утверждения о существовании целых чисел u и v, удовлетворяющих соотношению $au + bv = 1$, при условии того, что $(a, b) = 1$.

1) $\alpha \in \mathcal{V}_{aa}^n$.
   Из условия утверждения стоимость цикла α не превосходит стоимости любого цикла, циклично-связанного с α и имеющего такую же длину, то есть n, а значит не превосходит она стоимости любого цикла длины n, проходящего через вершину a. Исходя из этого и из того, что $c(\alpha)$ не может быть меньше c_{aa}^n, мы заключаем, что $c(\alpha) = c_{aa}^n$, то есть $\alpha \in \mathcal{V}_{aa}^n$.
2) $c_{aa}^{ln} = lc_{aa}^n$ для любого натурального l.
   Предположим противное, пусть для некоторого l верно, что $c_{aa}^{ln} < lc_{aa}^n$. Пусть величина c_{aa}^{ln} достигается на некотором цикле $\beta \in \mathcal{V}_{aa}^{ln}$. Имеем,
   $$\mu(\beta) = \frac{c(\beta)}{||\beta||} = \frac{c_{aa}^{ln}}{ln} < \frac{lc_{aa}^n}{ln} = \frac{c(\alpha)}{n} = \mu(\alpha),$$
   то есть приходим к противоречию, так как циклы α и β циклично-связаны, ибо проходят через одну вершину.

Следствие 2. *β — минимальный в слабом смысле цикл, не являющийся простым. Тогда для любого цикла α, содержащегося в β, можно утверждать, что α является минимальным в слабом смысле.*

Доказательство. Считаем, что цикл α не совпадает со всем β. Докажем, что $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$. Так как цикл α циклично-связан с β и цикл β минимален в слабом смысле, то $\mu(\beta) \leqslant \mu(\alpha)$.

Предположим теперь, что $\mu(\alpha) > \mu(\beta)$. Цикл β содержит цикл α, а поэтому представляется в виде $\beta = \alpha\gamma$. Используя предположение, имеем:
$$\frac{c(\beta)}{||\beta||} = \frac{c(\alpha) + c(\gamma)}{||\alpha|| + ||\gamma||} < \frac{c(\alpha)}{||\alpha||}.$$
Домножим обе части на $||\beta||$:
$$c(\alpha) + c(\gamma) < c(\alpha) + c(\alpha)\frac{||\gamma||}{||\alpha||} \;\Rightarrow\; c(\gamma) < c(\alpha)\frac{||\gamma||}{||\alpha||} \;\Rightarrow\; \frac{||\alpha||}{||\gamma||}c(\gamma) < c(\alpha).$$
Прибавим к обеим частям $c(\gamma)$:
$$c(\gamma)\frac{||\beta||}{||\gamma||} < c(\alpha) + c(\gamma) = c(\beta) \quad\Rightarrow\quad \mu(\gamma) < \mu(\beta),$$

что противоречит минимальности в слабом смысле цикла β. Таким образом, заключаем, что $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$, что дает доказательство данного следствия, ибо цикл α циклично-связан с теми и только с теми циклами, с которыми циклично-связан цикл β.

4.2. Минимальность в сильном смысле

Назовем цикл α *минимальным* (в сильном смысле), если для любого цикла β выполнено неравенство $\mu(\alpha) \leqslant \mu(\beta)$. В силу утверждения 2 минимальный в сильном смысле цикл является минимальным в слабом смысле. А посему и в силу следствия из утверждения 2, в любом графе существует минимальный цикл, и для его нахождения достаточно сравнить значения функции $\mu(\alpha)$ на всех простых циклах графа, которых в конечном графе конечное число.

А значит, в любом графе, в котором существуют циклы, существует и минимальный в слабом смысле цикл, ибо таковым является существующий в этом графе минимальный цикл.

Сузим понятие минимальности в сильном смысле относительно некоторой заданной вершины. Пусть $a \in V$ — вершина графа. Назовем цикл α a-минимальным, если α достижим из вершины a, и $\mu(\alpha) \leqslant \mu(\beta)$ для любого достижимого из a цикла β.

Очевидно, что если для некоторой вершины a существует бесконечный путь, выходящий из нее, то существует и a-минимальный цикл.

Пусть f — бесконечный путь (необязательно рациональный), выходящий из вершины a. Скажем, что путь f *завершается a-минимальным циклом*, если существует натуральная последовательность $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$ такая, что $f(k_i) = f(k_j)$ и

$$\frac{c\big(f(k_i)\ldots f(k_{i+1})\big)}{k_{i+1} - k_i} = \mu(\alpha), \text{ для всех } i, j \in \mathbb{N},$$

где α — a-минимальный цикл.

Утверждение 3. *Пусть путь f завершается a-минимальным циклом. Тогда для любой последовательности $l_1, l_2 \ldots, l_i, \ldots$ такой, что для всех ее членов выполнено равенство $f(l_i) = f(l_j)$, существует такое i_0, что справедливо*

$$\frac{c\big(f(l_i)\dots f(l_{i+1})\big)}{l_{i+1}-l_i}=\mu(\alpha),\ \ \textit{для всех } i\geqslant i_0,$$

где α — *a-минимальный цикл.*

Доказательство. Раз путь f завершается a-минимальным циклом, то по определению существует последовательность $k_1,k_2,\dots,k_i\dots$ с соответствующими свойствами. Если последовательность $l_1,l_2,\dots,$ $l_i\dots$ совпадает с $k_1,k_2,\dots,k_i\dots$ начиная с какого-то члена с номером i_0, то все доказано. В противном случае пусть i_0 равняется первому i, для которого выполнено $k_1\leqslant l_i$. Тогда для любого j существуют такие j_1 и j_2, что $k_{j_1}\leqslant l_j$ и $l_{j+1}\leqslant k_{j_2}$. Значит, цикл $f(l_j)\dots f(l_{j+1})$ содержится в цикле $f(k_{j_1})\dots f(k_{j_2})$, который является минимальным в слабом смысле, а значит по следствию 1, цикл $f(l_j)\dots f(l_{j+1})$ также минимальный в слабом смысле, то есть

$$\mu(\alpha)=\mu\big(f(l_j)\dots f(l_{j+1})\big)=\frac{c\big(f(l_j)\dots f(l_{j+1})\big)}{l_{j+1}-l_j}.$$

5. Оптимальность в слабом смысле

Перейдем к решению задачи о нахождении оптимальных в слабом смысле путей, выходящих из данной вершины a. Или, вспоминая формальную постановку задачи, перефразируем в следующем виде:

Найти на рассматриваемом графе $\mathcal{S}=(V,E)$ *выходящий из данной вершины a бесконечный путь* f *такой, что*

$$c(f(0)\dots f(k))=c^k_{f(0)f(k)},\ \ \textit{для всех } k\in\mathbb{N}.$$

Проведем с рассматриваемым графом следующие операции:

- удалим из графа каждое ребро, по которому не проходит хотя бы один цикл;
- удалим каждую вершину, с которой не инциндентно хотя бы одно из оставшихся ребер.

Получим новый граф $\mathcal{S}_{\circlearrowright} = (V_{\circlearrowright}, E_{\circlearrowright})$, по построению состоящий из непересекающихся компонент связанности $\mathcal{S}_i$:

$$\mathcal{S}_i = (V_i, E_i), \quad V_{\circlearrowright} = \bigsqcup_{i=1}^{q} V_i, \quad E_{\circlearrowright} = \bigsqcup_{i=1}^{q} E_i.$$

Очевидно, что любой из циклов исходного графа $\mathcal{S}$ сохранился в графе $\mathcal{S}_{\circlearrowright}$ и целиком лежит в одной из компонент связанности последнего. Пусть α — некоторый цикл графа $\mathcal{S}$. Факт того, что он содержится в компоненте $\mathcal{S}_i$, будем обозначать как $\alpha \in \mathcal{S}_i$. Продолжим функцию средней стоимости $\mu(\cdot)$ на компоненты связанности $\mathcal{S}_i$. Пусть $\mathcal{A}$ — одна из компонент $\mathcal{S}_i$, тогда положим

$$\mu(\mathcal{A}) := \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \mu(\alpha).$$

Ввиду того, что все циклы любой из рассматриваемых компонент связанности циклично-связаны, и вследствии утверждения 2 пункта 4 и следствия из него, данный минимум существует и достигается в частности на простых циклах данной компоненты связанности. Таким образом, в каждой компоненте связанности $\mathcal{S}_i$ существует некоторый минимальный в слабом смысле цикл $\beta \in \mathcal{S}_i$, и $\mu(\beta) = \mu(\mathcal{S}_i)$. А средняя стоимость минимального цикла γ графа $\mathcal{S}$, есть очевидно

$$\mu(\gamma) = \min_{i=1,\ldots,q} \mu(\mathcal{S}_i).$$

Но вернемся к поставленной задаче. Введем частичный порядок на множестве компонент связанности графа $\mathcal{S}_{\circlearrowright}$. Скажем, что компоненты $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ состоят в отношении $<_a$, если $\mu(\mathcal{A}) < \mu(\mathcal{B})$, и существует путь из вершины a, оканчивающийся в компоненте $\mathcal{B}$, проходящий через компоненту $\mathcal{A}$.

Утверждение 4. *Рациональный путь $f = \langle \gamma_0, \alpha \rangle$ является решением рассматриваемой задачи, когда α — минимальный в слабом смысле цикл, содержащийся в достижимой из вершины a компоненте связанности $\mathcal{A}$ графа $\mathcal{S}_{\circlearrowright}$, для которой не существует другой компоненты $\mathcal{B}$ такой, что $\mathcal{B} <_a \mathcal{A}$. а γ_0 — точка достижения минимума выражения $c(\gamma) - ||\gamma||\mu(\alpha)$ по всем простым путям γ, выходящим из вершины a и оканчивающимся в одной из вершин цикла α.*

Доказательство достаточности. Пусть $l := ||\gamma_0||$, а $n := ||\alpha||$. Рассмотрим путь β — начало длины $l + pn$ ($p \in \mathbb{Z}_+$) бесконечного пути f и произвольный конечный путь $\tilde{\beta}$ такой же длины, соединяющий вершины $f(0) = a$ и $f(l + pn)$. Докажем, что $c(\beta) - c(\tilde{\beta}) \leqslant 0$ для любого p.

Оценим слагаемые по отдельности:

$$c(\beta) = c(\gamma_0) + pn\mu(\alpha).$$

Для оценки $c(\tilde{\beta})$ выделим в нем нециклическую часть $\tilde{\beta}_{\rightsquigarrow}$, которую обозначим за γ, и циклическую часть $\tilde{\beta}_{\circlearrowright}$. Условие, наложенное на содержащую цикл α компоненту связанности $\mathcal{A}$ влечет, что средняя стоимость циклической части любого пути, приходящего в $\mathcal{A}$, не может быть меньше $\mu(\alpha)$, поэтому для $\tilde{\beta}_{\circlearrowright}$ получаем:

$$c(\tilde{\beta}_{\circlearrowright}) \geqslant \mu(\alpha)||\tilde{\beta}_{\circlearrowright}||.$$

А значит для $c(\tilde{\beta})$ имеем:

$$c(\tilde{\beta}) \geqslant \mu(\alpha)||\tilde{\beta}_{\circlearrowright}|| + c(\gamma).$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} c(\beta) - c(\tilde{\beta}) \leqslant c(\gamma_0) + pn\mu(\alpha) - \mu(\alpha)||\tilde{\beta}_{\circlearrowright}|| - c(\gamma) = \\ = c(\gamma_0) - c(\gamma) + \mu(\alpha)(pn - ||\tilde{\beta}_{\circlearrowright}||). \end{aligned}$$

Из условия равенства длин циклов β и $\tilde{\beta}$ имеем соотношение: $l + np = ||\tilde{\beta}_{\circlearrowright}|| + ||\tilde{\beta}_{\rightsquigarrow}|| = ||\tilde{\beta}_{\circlearrowright}|| + ||\gamma||$, выражая из которого величину $pn - ||\tilde{\beta}_{\circlearrowright}||$ как $-(||\gamma_0|| - ||\gamma||)$ и подставляя полученное в исследуемое неравенство, имеем:

$$\begin{aligned} c(\beta) - c(\tilde{\beta}) \leqslant c(\gamma_0) - c(\gamma) - \mu(\alpha)(||\gamma_0|| - ||\gamma||) = \\ = c(\gamma_0) - \mu(\alpha)||\gamma_0|| - (c(\gamma) - \mu(\alpha)||\gamma||) \leqslant 0 \end{aligned}$$

в силу выбора пути γ_0.

Полученное соотношение вкупе с произвольностью выбора пути $\tilde{\beta}$ дает нам то, что

$$c(\beta) = c(f(0) \dots f(l + pn)) = c^{l+pn}_{f(0)f(l+pn)}$$ для любого неотрицательного целого p.

Ввиду того, что любая часть минимального пути также является минимальным путем, получаем требуемое, то есть

$$c(f(0)\dots f(k)) = c^k_{f(0)f(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следствие 3. *Рациональное решение рассматриваемой задачи всегда существует и может быть найдено за конечное число шагов.*

Доказательство. Цикл α, удовлетворяющий условиям утверждения, всегда существует и может быть найден за конечное число шагов в силу своей простоты. Для найденного цикла α за конечное число шагов все простые пути γ, ведущие в него, оцениваются на предмет достижения на них минимума выражения $c(\gamma) - \mu(\alpha)||\gamma||$.

6. Абсолютная оптимальность

Приступим к нахождению решения задачи на абсолютную оптимальность, состоящей *в нахождении рационального пути f такого, что*

$$c(f(0)\dots f(k)) \leqslant c(\tilde{f}(0)\dots \tilde{f}(k)) \qquad \text{для всех } k \in \mathbb{N} \text{ и любого пути } \tilde{f}, \text{ что } \tilde{f}(0) = f(0).$$

Как было показано в пункте 3, решение данной задачи существует не всегда, а поэтому будем искать алгоритм, который по заданному графу и фиксированной начальной вершине a будет выдавать абсолютно оптимальные пути, из нее выходящие, или сообщать об их отсутствии. Существование подобного алгоритма не очевидно, поскольку он должен за конечное число шагов выяснять, является ли некоторый бесконечный путь абсолютно оптимальным. Однако ниже будет сформулирована и доказана теорема, гарантирующая, что проверить, является ли рациональный путь абсолютно оптимальным, можно за число шагов, ограниченное константой, зависящей от рассматриваемого графа.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 5. *Пусть рациональный путь f является абсолютно оптимальным, тогда $f_{\circlearrowleft}$ — $f(0)$-минимальный цикл.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда существует цикл β, достижимый из вершины a, такой, что $\mu(\beta) < \mu(\alpha)$. Вследствие достижимости существует путь γ, соединяющий вершину a с циклом β. Рассмотрим рациональный путь $\tilde{f} = \langle \gamma, \beta \rangle$. Пусть $l := \max\{||f_{\rightsquigarrow}||, ||\gamma||\}$, а $q := ||\alpha||||\beta||$. Тогда для произвольного натурального k

$$c\big(f(0)\dots f(l+qk)\big) - c\big(\tilde{f}(0)\dots \tilde{f}(l+qk)\big) = \\ = \underbrace{\Big(c(f(0)\dots f(l)) - c(\tilde{f}(0)\dots \tilde{f}(l))\Big)}_{C} + \\ + \sum_{j=1}^{k} \Big(c\big(f(l+q(j-1))\dots f(l+qj)\big) - c\big(\tilde{f}(l+q(j-1))\dots \tilde{f}(l+qj)\big)\Big) = \\ = C + \sum_{j=1}^{k} q\big(\mu(\alpha) - \mu(\beta)\big) = C + kq\big(\mu(\alpha) - \mu(\beta)\big) > 0 \quad (4)$$

начиная с некоторого k. А это противоречит абсолютной оптимальности пути f.

Утверждение 6. *Если рациональный путь $f = \langle \gamma, \alpha \rangle$ абсолютно оптимальный и путь γ не является простым, то есть представляется в виде $\gamma = \delta_1 \beta \delta_2$, где β — некоторый цикл, то путь $\tilde{f} = \langle \delta_1, \beta \rangle$ является абсолютно оптимальным.*

Доказательство. Обозначим через e_{pl} ребро $f(||\delta_1|| + l + p||\beta||)f(||\delta_1|| + l + 1 + p||\beta||)$, $0 \leqslant l < ||\beta||$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Докажем по индукции, что $c(e_{0l}) = c(e_{pl})$ для любого $0 \leqslant l < ||\beta||$ и любого $p \in \mathbb{Z}_+$. Пусть утверждение доказано для всех l, при $0 \leqslant p < p_0$ и для $l < n$ при $p = p_0$. Докажем его для $l = n$, $p = p_0$. Пусть иначе, то есть предположим, например, что $c(e_{p_0 n}) > c(e_{p_0-1,n}) = c(e_{0n})$. Проверим условие абсолютной оптимальности пути f, сравнив стоимость его начала длины $k = p_0||\beta|| + n + 1$ со стоимостью начала такой же длины пути $\varphi = \langle \delta_1(2\beta)\delta_2, \alpha \rangle$.

$$c\big(f(0)\dots f(k)\big) - c\big(\varphi(0)\dots \varphi(k)\big) =$$

$$= \overbrace{c\big(f(0)\dots f(||\delta_1||)\big) - c\big(\varphi(0)\dots\varphi(||\delta_1||)\big)}^{c(\delta_1)-c(\delta_1)} +$$
$$+ \sum_{p=0}^{p_0-1}\sum_{l=0}^{||\beta||-1} c(e_{pl}) + \sum_{l=0}^{n} c(e_{p_0 l}) -$$
$$- 2\sum_{l=0}^{||\beta||-1} c(e_{0l}) - \sum_{p=1}^{p_0-2}\sum_{l=0}^{||\beta||-1} c(e_{pl}) - \sum_{l=0}^{n} c(e_{p_0-1,l}) \quad (5)$$

Пользуясь предположением индукции, получим

$$c\big(f(0)\dots f(k)\big) - c\big(\varphi(0)\dots\varphi(k)\big) = c(e_{p_0 n}) - c(e_{p_0-1,n}) > 0,$$

в силу предположения, то есть приходим к противоречию с абсолютной оптимальностью пути f. А значит, наше предположение неверно, и $c(e_{p_0 n}) \leqslant c(e_{p_0-1,n})$. Однако предположив, что $c(e_{p_0 n}) < c(e_{p_0-1,n})$, и рассмотрев разность стоимостей начал длины $k = (p_0-1)||\beta|| + n + 1$ пути f и пути $\langle\delta_1\delta_2,\alpha\rangle$, аналогично придем к противоречию, означающему вкупе с полученным неравенством, что $c(e_{p_0 n}) = c(e_{p_0-1,n})$.

Таким образом, мы доказали, что $c(e_{0l}) = c(e_{pl})$ для любого $p \in \mathbb{Z}_+$ и любого $0 \leqslant l < ||\beta||$. А ввиду доказанного и в силу структуры путей f и $\tilde{f}$, имеем, что для любого k получаем, что

$$c\big(f(0)\dots f(k)\big) = c\big(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k)\big),$$

а значит путь $\tilde{f}$ является абсолютно оптимальным.

Замечание 1. Тем самым, мы показали, что рациональные пути вида $\langle\gamma,\alpha\rangle$, где путь γ не является простым, можно не рассматривать на предмет абсолютной оптимальности, так как если путь такого вида является абсолютно оптимальным, то обязательно найдется рациональный путь с простой непериодической частью, также являющийся абсолютно оптимальным.

Замечание 2. Требование простоты, накладываемое на цикл α в теореме 1, объясняется следующими соображениями. В случае непростоты цикла α из абсолютной оптимальности пути f проводя рассуждения, сходные с рассуждениями из доказательства утверждения 6 (отличие практически лишь в вырожденности пути δ_2), легко вывести, что абсолютно оптимальным будет любой путь $\langle\gamma\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}\rangle$, где $\tilde{\alpha}$ — простой цикл, содержащийся в α, а $\tilde{\gamma}$ — простой путь, содержащийся в α и соединяющий вершины $\gamma(||\gamma||)$ и $\tilde{\alpha}(0)$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1 докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для любого натурального $n \leqslant |V|$ найдется число k, зависящее от n, что любой путь γ длины не меньшей k содержит n простых циклов одинаковой длины и стоимости таких, что при удалении ребер этих циклов из последовательности ребер $\big\{\big(\gamma(i)\gamma(i+1)\big)\big\}$ оставшаяся часть последовательности также будет путем из $\gamma(0)$ в $\gamma(||\gamma||)$.*

Доказательство 1 (оценка через число простых циклов графа). Возьмем
$$k = |V| + C_s|V|n,$$
где C_s — число простых циклов данного графа, и докажем для данного k утверждение леммы.

Пусть γ — некоторый путь в графе и $||\gamma|| \geqslant k$. Так как $k > |V|$, то путь γ не является простым, то есть содержит циклическую часть, длина которой вследствие того, что длина нециклической части ограничена сверху величиной $|V|$, будет больше, чем $k - |V|$, то есть
$$||\gamma_{\circlearrowright}|| > C_s|V|n. \tag{6}$$
Количество простых циклов, из которых состоит путь $\gamma_{\circlearrowright}$, не превосходит числа простых циклов во всем графе, то есть C_s. Длина каждого простого цикла не больше чем $|V|$, а так как $||\gamma_{\circlearrowright}|| > C_s|V|n$, то цикл γ для каждого простого цикла α в нем содержащегося, содержит его по крайней мере n раз пройденным, то есть содержит цикл $n\alpha$. А из факта строгости неравенства (6) следует то, что существует простой цикл β, пройденный $n+1$ раз. Таким образом, β и есть искомый цикл.

Докажем критерий того, когда рациональный путь является абсолютно оптимальным.

Лемма 2. *Рациональный путь $f = \langle\gamma, \alpha\rangle$ является абсолютно оптимальным точно тогда, когда*

1) *бесконечный путь f оптимален в слабом смысле,*
2) *цикл α $f(0)$-минимален,*
3) *величина $c^l_{f(0)f(l)}$ является минимальной в строке с номером $f(0)$ для любой матрицы M_l, $l \leqslant k_0$, где $k_0 = \max\{||\gamma||+|V|^2, k\}$, а k — величина из леммы 1.*

Доказательство. Необходимость. Пункты 1, 3 очевидны, пункт 2 следует из утверждения 5.

Докажем достаточность. Для любого $l \leqslant k_0$ и произвольного пути $\tilde{f}$, выходящего из вершины $f(0)$, вследствие пункта 3 выполнено

$$c(f(0)\dots f(l)) = c^l_{f(0)f(l)} \leqslant c^l_{f(0)\tilde{f}(l)} \leqslant c(\tilde{f}(0)\dots \tilde{f}(l)), \tag{7}$$

что дает нам базу индукции при доказательстве этого факта для любого l.

Шаг индукции. Пусть неравенство (7) выполнено для любого $l \leqslant l_0$, докажем его выполнение для $l = l_0 + 1$. Пусть γ — выходящий из вершины $f(0)$ путь длины l, $n := ||\alpha||$. Вследствие леммы 1, так как $||\gamma|| = l > k_0 \geqslant k$ в пути γ существует n простых циклов одинаковой стоимости и длины. Обозначим эту стоимость за $\tilde{c}$, а длину за $\tilde{n}$, а путь, полученный удалением этих циклов из пути γ, как $\tilde{\gamma}$. Тогда для $c(\gamma) - c(\tilde{\gamma})$ имеем:

$$c(\gamma) - c(\tilde{\gamma}) = n\tilde{c} \geqslant n\tilde{n}\mu(\alpha),$$

так как α по условию — минимальный относительно функции $\mu(\cdot)$ цикл, достижимый из $f(0)$.

Величина $n\tilde{n} \leqslant |V|^2$, значит путь $f(l-n\tilde{n})\dots f(l)$ есть $\tilde{n}$ раз повторенный цикл α, а значит его стоимость равна $\tilde{n}n\mu(\alpha)$. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} c\big(f(0)\dots f(l)\big)-c(\gamma) \leqslant c\big(f(0)\dots f(l-n\tilde{n})\big)+\tilde{n}n\mu(\alpha)-c(\tilde{\gamma})-n\tilde{n}\mu(\alpha) = \\ = c\big(f(0)\dots f(l-n\tilde{n})\big) - c(\tilde{\gamma}) \leqslant 0 \end{aligned}$$

вследствие предположения индукции, так как $l - n\tilde{n} \leqslant l_0$. Таким образом, мы доказали условие абсолютной оптимальности пути f и для $l > k_0$, что и завершает доказательство данной леммы.

Легко заметить, что условие оптимальности в слабом пути f в доказательстве леммы 2 использовалось лишь как справедливость равенства $c\big(f(0)\dots f(l)\big) = c^l_{f(0)f(l)}$ для всех $l \leqslant k_0$, а значит, доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *Лемма 2 останется верна, если условие 1 можно заменить на более слабое условие того, что* $c\big(f(0)\dots f(l)\big) = c^l_{f(0)f(l)}$ *для всех* $l \leqslant k_0$.

Имея данный результат, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Если* $f = \langle\gamma, \alpha\rangle$ *— рациональный путь, выходящий из вершины* a *и цикл* α a*-минимальный, тогда существует число* k*, зависящее от длины цикла* α,[2] *такое, что по набору матриц* $\{M_1, \dots M_k\}$ *за конечное число шагов возможно определить, является ли путь* f *абсолютно оптимальным.*

Доказательство. Чтобы проверить, является ли путь $f = \langle\gamma, \alpha\rangle$ абсолютно оптимальным, нужно проверить выполнение условий 1–3 леммы 2. Условия 2, 3 проверяются за конечное число шагов, а условие 1 можно, в соответствии с леммой 3, заменить на условие $c\big(f(0)\dots f(l)\big) = c^l_{f(0)f(l)}$, которое также проверяется за конечное число шагов.

Теорема 2. *Если для данной вершины* a *существует абсолютно оптимальный бесконечный путь, выходящий из нее, то существует также являющийся абсолютно оптимальным, выходящий из вершины* a *путь вида* $\langle\gamma, \alpha\rangle$*, где путь* γ *и цикл* α *являются простыми.*

Данная теорема будет доказана в следующем пункте.

Следствие 4. *Существует алгоритм, находящий абсолютно оптимальный путь, выходящий из данной вершины, либо определяющий, что такого пути не существует.*

---

[2] Помимо этого, имеется зависимость от структуры рассматриваемого графа, а точнее от величин, ею характеризующихся, например, количества вершин графа или мощности множества простых циклов.

Доказательство. Ввиду теоремы 2 и замечаний 1 и 2 можно проверять лишь существование абсолютно оптимального пути вида $\langle\gamma,\alpha\rangle$, где путь γ и цикл α являются простыми. Очевидно, что за конечное число шагов возможно найти все пути такого вида и отбросить (исходя из утверждения 1) из их множества те, у которых периодическая часть α не является минимальным, достижимым из вершины a циклом. А вследствии теоремы 1, для каждого оставшегося пути, за конечное число шагов можно проверить, является ли он абсолютно оптимальным.

7. Асимптотическая оптимальность

Перейдем к задаче об отыскании асимптотически оптимальных бесконечных путей, выходящих из заданной начальной вершины. Что в формальной постановке звучит, как *задача о нахождении на рассматриваемом графе $\mathcal{S}=(V,E)$ выходящего из данной вершины a рационального пути f и числа k_0 таких, что*

$$c(f(0)\dots f(k))\leqslant c(\tilde f(0)\dots\tilde f(k)),\ \textit{для любого } k>k_0 \textit{ и любого пути } \tilde f,\ \textit{выходящего из вершины } a.$$

Докажем основную лемму данного пункта.

Лемма 4. *Пусть периодическая часть $f_{\circlearrowleft}$ некоторого, выходящего из вершины a, рационального пути f является a-минимальным циклом, тогда для любого другого пути $\tilde f$, выходящего из вершины a и не окончивающегося a-минимальным циклом, существует такое число $\hat k=\hat k(\tilde f)$, что существует последовательность $k_1,k_2,\dots,k_i\dots$, зависящая от пути $\tilde f$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

1) $k_i>\hat k$ для всех i,

2) $k_i-k_j\equiv 0 \mod n$ для всех i,j,

3) $c(f(0)\dots f(k_i))\leqslant c(\tilde f(0)\dots\tilde f(k_i))$,

4) при $C>0$ существует $\hat\imath$ такое, что для всех $i\geqslant\hat\imath$ выполняется

$$c(\tilde f(0)\dots\tilde f(k_i))-c(f(0)\dots f(k_i))>C.$$

Доказательство. Обозначим за m длину непериодической части пути f, то есть $m := ||f_{\rightsquigarrow}||$, и рассмотрим произвольный, удовлетворяющий нашему условию путь $\tilde{f}$. В последовательности $\{\tilde{f}(m+kn)\}_{k=0}^{\infty}$ существует элемент, повторящийся бесконечное число раз. Обозначим его за v. Из последовательности $\{m+kn\}_{k=0}^{\infty}$ выберем подпоследовательность $l_1, l_2, \ldots, l_i \ldots$ такую, что $\tilde{f}(l_i) = v$. Обозначим за c_i следующую дробь:

$$c_i = \frac{nc(\tilde{f}(l_i) \ldots \tilde{f}(l_{i+1}))}{l_{i+1} - l_i}.$$

Рассмотрим разность:

$$c(\tilde{f}(0) \ldots \tilde{f}(l_i)) - c(f(0) \ldots f(l_i)) = \overbrace{c(\tilde{f}(0) \ldots \tilde{f}(l_1)) - c(f(0) \ldots f(l_1))}^{C_0} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \Big(c(\tilde{f}(l_j) \ldots \tilde{f}(l_{j+1})) - c(f(l_j) \ldots f(l_{j+1})) \Big) =$$
$$= C_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \left(c(\tilde{f}(l_j) \ldots \tilde{f}(l_{j+1})) - c(f_{\circlearrowright}) \frac{l_{j+1} - l_j}{n} \right) =$$
$$= C_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{l_{j+1} - l_j}{n} (c_j - c(f_{\circlearrowright})) \right). \quad (8)$$

Вследствие a-минимальности цикла $f_{\circlearrowright}$ имеем, что $c_j - c(f_{\circlearrowright}) \geqslant 0$ для любого j. Условие того, что путь $\tilde{f}$ не заканчивается a-минимальным циклом вкупе с утверждением 3 пункта 4 и a-минимальностью цикла $f_{\circlearrowright}$ означает, что среди членов последовательности $\{c_i\}$ найдется бесконечно много элементов превосходящих величину $c(f_{\circlearrowright})$. Из данного факта вытекает, что существует некоторое натуральное i_0 такое, что величина

$$C_0 + \sum_{j=1}^{i_0} \left(\frac{l_{j+1} - l_j}{n} (c_j - c(f_{\circlearrowright})) \right) \geqslant 0.$$

Исходя из этого, положим $\hat{k} := l_{i_0} - 1$, $k_i = l_{i-i_0+1}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Докажем выполнение свойств 1–4 для полученного числа $\hat{k}$ и последовательности $k_1, k_2, \ldots, k_i \ldots$:

1) по построению $k_1, k_2, \ldots, k_i \ldots$
2) последовательность $k_1, k_2, \ldots, k_i \ldots$ есть подпоследовательность последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_i \ldots$, которая в свою очередь является подпоследовательностью последовательности $\{m + nk\}_{k=0}^{\infty}$, что и доказывает выполнение данного свойства.
3) следует из цепочки равенств (8) и выбора величины $\hat{k}$.
4) приемом, посредством которого было найдено число i_0, мы можем доказать, что для всех j, начиная с некоторого j_0, можно для некоторой наперед заданной константы C достичь выполнения неравенства

$$c(\tilde{f}(0) \ldots \tilde{f}(l_j)) - c(f(0) \ldots f(l_j)) > C,$$

которое приводит к доказательству выполнения данного свойства, если положить искомое $\hat{i}$ равным $j_0 - i_0$.

Докажем не доказанную в предыдущем пункте теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть f — абсолютно оптимальный путь, выходящий из вершины a. Тогда в силу только что доказанной леммы, он должен завершаться a-минимальным циклом, а значит существует сколь угодно большое l, что цикл $\alpha = f(l) \ldots f(l + ||\alpha||)$ является a-минимальным. Возьмем l, большее чем k из леммы 2, тогда для пути $\tilde{f} = \langle f(0) \ldots f(l), \alpha \rangle$ будут, очевидно, выполнены условия 1 (из леммы 3) и 2–3 из леммы 2, а значит в силу критерия абсолютной оптимальности рационального пути — леммы 2 и 2′ — путь $\tilde{f}$ будет абсолютно оптимальным.

Утверждение 7. *Пусть периодическая часть рационального пути f — минимальный цикл, тогда существует константа $\hat{C}$, зависящая от f, что для любого пути $\tilde{f}$, выходящего из вершины $f(0)$ и для любого натурального k, верно неравенство*

$$c(f(0) \ldots f(k)) - c(\tilde{f}(0) \ldots \tilde{f}(k)) < \hat{C}.$$

Доказательство. Фиксируем некоторое натуральное k. Обозначим за l длину непериодической части пути f, то есть $l := ||f_{\leadsto}||$, за n —

длину его периодической части: $n := ||\alpha||$, а за μ — величину $\mu(f_{\circlearrowright})$. Оценим сверху величину $c(f(0)\dots f(k))$. Если $l \leqslant k$, имеем:

$$c(f(0)\dots f(k)) = c(f(0)\dots f(l)) + c(f(l)\dots f(l+n\left[\frac{k-l}{n}\right]))+$$
$$+c(f(l+n\left[\frac{k-l}{n}\right])\dots f(k)) \leqslant Ml + n\mu\left[\frac{k-l}{n}\right] + M((k-l) \mod n). \tag{9}$$

Обозначим через $k_{\rightsquigarrow}$ длину нециклической части пути $\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k)$, а за $k_{\circlearrowright}$ длину его циклической части и оценим снизу величину $c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k))$:

$$c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k)) \geqslant mk_{\rightsquigarrow} + \mu k_{\circlearrowright} = mk_{\rightsquigarrow} + \mu(k - k_{\rightsquigarrow}).$$

Вычтем два полученных неравенства друг из друга:

$$c(f(0)\dots f(k)) - c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k)) \leqslant$$
$$\leqslant Ml + n\mu\left[\frac{k-l}{n}\right] + M((k-l) \mod n) - mk_{\rightsquigarrow} - \mu(k - k_{\rightsquigarrow}) =$$
$$= M(l + ((k-l) \mod n)) + \mu(n\left[\frac{k-l}{n}\right] - k) + k_{\rightsquigarrow}(\mu - m) \leqslant \tag{10}$$

Зная, что $\mu - m \geqslant 0$ и что $k_{\rightsquigarrow} < |V|$, продолжим неравенство:

$$\leqslant (M-\mu)l + Mn + (\mu - m)|V|,$$

то есть в конце концов получили, что

$$c(f(0)\dots f(k)) - c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k)) \leqslant (M-\mu)||f_{\rightsquigarrow}|| + M||f_{\circlearrowright}|| + (\mu-m)|V|,$$

таким образом, обозначив за $\hat{C}(f) = (M-\mu)||f_{\rightsquigarrow}|| + M||f_{\circlearrowright}|| + (\mu - m)|V|$, получим требуемое.

В случае же, когда $k < l$, имеем оценку

$$c(f(0)\dots f(k)) \leqslant Ml,$$

и аналогично получаем, что

$$c(f(0)\dots f(k)) - c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k)) \leqslant (M-\mu)||f_{\rightsquigarrow}|| + (\mu-m)|V| \leqslant \hat{C}(f).$$

Утверждение 8. *Если периодическая часть* $f_{\circlearrowleft}$ *некоторого выходящего из вершины a рационального пути f является минимальным циклом, тогда для любого другого пути* $\tilde{f}$, *выходящего из вершины a и не оканчивающегося минимальным циклом, существует такое число* $k_0 = k_0(\tilde{f})$, *что* $c(f(0)\dots f(k)) \leqslant c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k))$ *для всех* $k > k_0$.

Доказательство. Путь $\tilde{f}$ удовлетворяет условиям доказанной выше леммы, поэтому для него существует число $\hat{k}$ и последовательность $k_1, k_2, \dots, k_i \dots$ с соответствующими свойствами. Определим k_0, как первое из k_i, на котором выполнено

$$c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k_i)) - c(f(0)\dots f(k_i)) > \hat{C}, \tag{11}$$

где $\hat{C}$ — константа из утверждения 7. Тогда для произвольного k, превосходящего k_0 имеем:

$$\begin{aligned} c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k)) - c(f(0)\dots f(k)) &= \\ = (c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k_0)) &- c(f(0)\dots f(k_0)))+ \\ &+ (c(\tilde{f}(k_0)\dots\tilde{f}(k)) - c(f(k_0)\dots f(k))). \end{aligned} \tag{12}$$

Путь $f(k_0)\dots f(k)$ удовлетворяет условию утверждения 7, а посему для него имеем:

$$c(f(k_0)\dots f(k)) - c(\tilde{f}(k_0)\dots\tilde{f}(k)) < \hat{C}, \tag{13}$$

что вкупе с соотношением (11) позволяет нам продолжить неравенство (12):

$$c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k)) - c(f(0)\dots f(k)) \geqslant \hat{C} - \hat{C} = 0,$$

что и доказывает данное утверждение.

Можно заметить, что доказанное утверждение гарантирует существование числа k_0, зависящего от пути $\tilde{f}$. Возможна ситуация, что для данного пути f может существовать путь $\tilde{f}$, что соответствующее ему k_0 может быть сколь угодно большим.

Однако, если рассматривать пути $\tilde{f}$, рациональная длина которых ограничена наперед заданной константой, то подобной ситуации можно избежать. Иными словами, верно следующее утверждение.

Утверждение 9. *Если периодическая часть рационального пути f — минимальный цикл, то для произвольного натурального k существует $k_0 = k_0(f, k)$ такое, что для всех рациональных путей $\tilde{f}$, периодическая часть которых не является минимальным циклом, и удовлетворяющих условиям:*

1) $\tilde{f}(0) = f(0)$,

2) $||\tilde{f}||_{\mathbb{Q}} \leqslant k$

выполнено

$$c(f(0) \dots f(\kappa)) \leqslant c(\tilde{f}(0) \dots \tilde{f}(\kappa))$$

для всех $\kappa > k_0$.

Доказательство. Фиксируем произвольный путь $\tilde{f}$, удовлетворяющий условиям утверждения. Найдем выражение для величины $k_0(\tilde{f})$, а далее возьмем максимум по всем $\tilde{f}$, существование которого, как будет показано ниже, обусловлено затребованным в утверждении специальным видом путей $\tilde{f}$.

Обозначим через α цикл $f_{\circlearrowright}$, а через β — периодическую часть пути $\tilde{f}$. Пусть $n := \max\{||f_{\rightsquigarrow}||, ||\tilde{f}_{\rightsquigarrow}||\}$, $p := HOK(||\alpha||, ||\beta||)$, а $\mu := \mu(\alpha|$.

Величина $r := p\left(\frac{c(\beta)}{||\beta||} - \frac{c(\alpha)}{||\alpha||}\right)$, выражающая разницу в стоимости между циклами одинаковой длины p — циклом $\frac{p}{||\beta||}\beta$ и циклом $\frac{p}{||\alpha||}\alpha$, является положительной вследствие того, что цикл β не минимальный по условию.

Положим $\hat{k} = \hat{k}(\tilde{f}) = n + p\left[\frac{\hat{C}}{r}\right]$, тогда для последовательности $k_1, k_2, \dots, k_i \dots$, члены которой положим равными $k_i = k_i(\tilde{f}) = \hat{k}(\tilde{f}) + pi$, будет выполнено $c(\tilde{f}(0) \dots \tilde{f}(k_i)) - c(f(0) \dots f(k_i)) > (i-1)r$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} c(\tilde{f}(0) \dots \tilde{f}(k_i)) - c(f(0) \dots f(k_i)) = \\ &= (c(\tilde{f}(0) \dots \tilde{f}(k_1)) - c(f(0) \dots f(k_1))) + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} (c(\tilde{f}(k_j) \dots \tilde{f}(k_{j+1})) - c(f(k_j) \dots f(k_{j+1}))). \quad (14) \end{aligned}$$

Вспоминая определение величины r, заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{i-1}(c(\tilde{f}(k_j)\dots\tilde{f}(k_{j+1}))-c(f(k_j)\dots f(k_{j+1})))=\sum_{j=1}^{i-1}r=(i-1)r,$$

а посему осталось доказать, что $(c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k_1))-c(f(0)\dots f(k_1)))$ >0.

Используя то, что $k_1=n+p\left\lceil\frac{\hat{C}}{r}\right\rceil$, получим:

$$\begin{gathered}(c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k_1))-c(f(0)\dots f(k_1)))=\\ =(c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(n))-c(f(0)\dots f(n)))+\\ +\sum_{j=0}^{\left[\frac{\hat{C}}{r}\right]}(c(\tilde{f}(n+pj)\dots\tilde{f}(n+p(j+1)))-c(f(n+pj)\dots f(n+p(j+1))))\geqslant\end{gathered}\tag{15}$$

Теперь, используя определение величины r и воспользовавшись тем, что путь f удовлетворяет условию утверждения 7, а значит для него выполняется $c(f(0)\dots f(n))-c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(n))\leqslant\hat{C}$, продолжим неравенство (15):

$$\begin{gathered}\geqslant-\hat{C}+\sum_{j=0}^{\left[\frac{\hat{C}}{r}\right]}r=-\hat{C}+r\left\lceil\frac{\hat{C}}{r}\right\rceil=\\ =-\hat{C}+r\left(\frac{\hat{C}}{r}-\left\{\frac{\hat{C}}{r}\right\}+1\right)=r\left(1-\left\{\frac{\hat{C}}{r}\right\}\right)>0.\end{gathered}$$

Таким образом, имеем, что для последовательности $k_1,k_2,\dots,$ $k_i\dots$, верно

$$c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(k_i))-c(f(0)\dots f(k_i))>(i-1)r.\tag{16}$$

Положим теперь $k_0=k_0(\tilde{f})=k_{\left\lceil\frac{\hat{C}}{r}\right\rceil+1}$ и докажем выполнения неравенства

$$c(\tilde{f}(0)\dots\tilde{f}(\kappa))-c(f(0)\dots f(\kappa))\geqslant0 \text{ для всех } \kappa>k_0.$$

Имеем,

$$c(\tilde f(0)\dots\tilde f(\kappa)) - c(f(0)\dots f(\kappa)) =$$
$$= (c(\tilde f(0)\dots\tilde f(k_0)) - c(f(0)\dots f(k_0)))+$$
$$+ (c(\tilde f(k_0)\dots\tilde f(\kappa)) - c(f(k_0)\dots f(\kappa))) \leqslant$$

Оценим первое слагаемое, пользуясь определением величины k_0 и соотношением (16), а второе слагаемое — пользуясь утверждением 7:

$$\leqslant r\left\lceil\frac{\hat C}{r}\right\rceil - \hat C = r\left(1 - \left\{\frac{\hat C}{r}\right\}\right) > 0.$$

Итак, мы нашли величину $k_0(\tilde f) = n + p\left[\frac{\hat C}{r}\right] + p(\left\lceil\frac{\hat C}{r}\right\rceil + 1)$. Для удобства нахождения максимума данного выражения по всем $\tilde f$ оценим его сверху:

$$k_0(\tilde f) \leqslant n + p\frac{\hat C}{pr_0} + 2p + p\frac{\hat C}{pr_0} = n + 2\frac{\hat C}{r_0} + 2p,$$

где $r_0 = r_0(\tilde f) = (\frac{c(\beta)}{||\beta||} - \frac{c(\alpha)}{||\alpha||})$.

Оценим искомый максимум

$$\max_{||\tilde f||_{\mathbb{Q}}\leqslant k}(n + 2\frac{\hat C}{r_0} + 2p) \leqslant \max\{k, ||f_{\rightsquigarrow}||\} + 2\hat C\frac{1}{\hat r_0} + 2k||f_{\circlearrowright}||,$$

где

$$\hat r_0 = \min_{\beta\text{ не минимальный}}(\frac{c(\beta)}{||\beta||} - \mu).$$

И теперь остается только обозначить за $k_0(f,k)$ полученную величину:

$$k_0(f,k) = \max\{k, ||f_{\rightsquigarrow}||\} + 2\hat C\frac{1}{\hat r_0} + 2k||f_{\circlearrowright}||.$$

Утверждение 9 представляет некоторый частный, но очень важный результат, полученный при решении задачи поиска асимптотически оптимальных путей.

В заключение автор выражает благодарность проф. Кудрявцеву В.Б. за постановку задачи и научное руководство.