

Периодические фрагменты изображений

С.Б. Родин

Предметом данной статьи является изучение внутренней структуры изображений, в частности вопрос о нахождении «периодических» структур, являющихся частью изображения.

С одной стороны, это позволяет записывать изображения в более компактном виде.

С другой стороны, наличие таких структур является отличительным признаком определенного типа изображения, и может быть использовано в распознавании.

В статье приведен алгоритм поиска периодических структур.

Пусть задано некоторое изображение J объекта Q . Изображения состоят из некоторых «неделимых» частей, которые, вообще говоря, могут пересекаться. Назовем их элементами. Изображения размещены на плоскости. Таким образом, элемент — это множество точек плоскости, а изображение является объединением элементов.

Каждый элемент изображения J будем относить к одному из типов T_1, T_2, \dots, T_n , то есть существует набор предикатов $P_j(J, q, x, y)$, $j = 1, 2, \dots, n$, такой, что $P_j(J, q, x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда элемент q изображения J расположен на плоскости так, что он накрывает точку с координатами (x, y) и относится к типу T_j .

Тройка (q, x, y) называется «особой» точкой типа T_i изображения J , если $P_i(J, q, x, y) = 1$.

Тип особой точки (q, x, y) обозначим через $T(q, x, y)$.

Определение. Тройки (q, x, y) и (q, x', y') называются эквивалентными в изображении J .

Считаем, что число попарно неэквивалентных особых точек любого изображения J конечно.

Будем считать, что для каждого класса эквивалентности Q существуют точки (x^q_{\min}, y^q_{\min}) и (x^q_{\max}, y^q_{\max}) такие, что x^q_{\min} минимальная координата x среди всех особых точек (q, x, y) из данного класса эквивалентности, то есть $x^q_{\min} = \min_{(q,x,y) \in Q} \{x\}$, y^q_{\min} минимальная координата y среди всех особых точек (q, x, y) из данного класса эквивалентности, то есть $y^q_{\min} = \min_{(q,x,y) \in Q} \{y\}$, соответственно $x^q_{\max} = \max_{(q,x,y) \in Q} \{x\}$, $y^q_{\max} = \max_{(q,x,y) \in Q} \{y\}$.

Определение. Расстояние $\rho_x((q, x, y), (q', x', y'))$ по оси X между двумя особыми точками (q, x, y) и (q', x', y') определим, как $|x^q_{\min} - x'^q_{\min}|$.

Определение. Расстояние $\rho_y((q, x, y), (q', x', y'))$ по оси Y между двумя особыми точками (q, x, y) и (q', x', y') определим, как $|y^q_{\min} - y'^q_{\min}|$.

Пусть R — некоторое подмножество особых точек изображения J .

Определение. Базовым набором B подмножества R назовем подмножество особых точек такое, что существуют числа dx, dy и числа $c_R \in \mathbb{N}$ и $r_R \in \mathbb{N}$ такие, что

1) $\forall l, l \in 0 \dots c_R - 1$ и $\forall j, j \in 0 \dots r_R - 1$, для любой особой точки $(q, x, y) \in B$ особая точка $(q', x + l \cdot dx, y + j \cdot dy)$ принадлежит R и $T(q, x, y) = T(q', x + l \cdot dx, y + j \cdot dy)$.

2) Для любой особой точки (q, x, y) , принадлежащей R , найдутся числа $l, l \in 0 \dots c_R - 1$ и $j, j \in 0 \dots r_R - 1$ такие, что особая точка $(q', x - l \cdot dx, y - j \cdot dy)$ принадлежит B и $T(q, x, y) = T(q', x - l \cdot dx, y - j \cdot dy)$.

Определение. Говорим, что подмножество R особых точек изображения J образует периодическую структуру, если для нее найдется базовый набор B такой, что для него либо $c_R > 1$, либо $r_R > 1$.

Числа r_R и c_R в определении базового набора называются числом строк и столбцов периодической структуры соответственно.

Теперь приведем описание алгоритма для нахождения периодических структур изображений. Если структура найдена, то для нее указывается базовый набор и сдвиги dx, dy базового набора.

Этап 1. Формирование элемента периодичности.

На данном этапе мы построим структуру, которая выдерживает сдвиги по осям координат. Обозначим эту структуру через B .

Шаг 1) Поскольку изображение размещено на плоскости, мы можем говорить о прямоугольнике, его накрывающем. Рассмотрим прямоугольник, накрывающий наше изображение J и центральную точку этого прямоугольника. В качестве первой особой точки структуры B возьмем ближайшую к центру окна особую точку (q_1, x, y) изображения J . Без ограничения общности считаем, что она имеет тип T_1 . Обозначим минимальную точку структуры B , как (x^B_{\min}, y^B_{\min}) .

Шаг 2) Найдем среди особых точек (q, x, y) изображения J типа T_1 таких, что расстояние по Y до структуры B равно 0, и $(x^q_{\min} - x^B_{\min}) > 0$ ближайшую особую точку не эквивалентную ни одной особой точке, входящей в структуру B . Обозначим эту точку через (q^N_x, x, y) . Расстояние между найденной точкой и структурой B обозначим dx . Если такой точки нет, то считаем, что изображение не содержит периодической структуры.

Шаг 3) Найдем среди особых точек (q, x, y) изображения J типа T_1 таких, что расстояние по X до структуры B равно 0, и $(y^q_{\min} - y^B_{\min}) > 0$ ближайшую особую точку не эквивалентную ни одной особой точке, входящей в структуру B . Обозначим эту точку через (q^N_y, x, y) . Расстояние между найденной точкой и структурой B обозначим dy . Если такой точки нет, то считаем, что изображение не содержит периодической структуры.

Шаг 4) Включим в структуру B все попарно неэквивалентные особые точки, накрываемые прямоугольником $x^B_{\min} \leq x \leq x^B_{\min} + dx$, $y^B_{\min} \leq y \leq y^B_{\min} + dy$.

Шаг 5) Если для каждой особой точки (q, x, y) , принадлежащей структуре B , изображению J принадлежит особая точка $(q', x + dx, y)$, такая что $T(q, x, y) = T(q', x + dx, y)$, переходим к следующему шагу. В противном случае включаем особую точку (q^N_x, x, y) в структуру B и переходим к шагу 2).

Шаг 6) Если для каждой особой точки (q, x, y) , принадлежащей структуре B , изображению J принадлежит особая точка $(q', x, y + dy)$, такая что $T(q, x, y) = T(q', x, y + dy)$, переходим к следующему шагу. В противном случае включаем особую точку (q^N_y, x, y) в структуру B и переходим к шагу 2).

Шаг 7) Построенную структуру назовем элементом периодичности.

А числа dx и dy считаем сдвигами структуры B по осям координат. Переходим к этапу 2.

В завершении этапа 1 хотелось отметить, что при каждом добавлении особых точек в структуру B мы проверяем, не превысило ли их количество N_B , где число N_B является параметром алгоритма. Если их число больше N_B , считаем, что изображение не содержит периодической структуры.

Этап 2. Поиск области периодичности.

Шаг 8) Положим i равным нулю.

Шаг 9) Если для каждой особой точки (q, x, y) , принадлежащей структуре B , изображению J принадлежит особая точка $(q', x + i \cdot dx, y)$ такая, что $T(q, x, y) = T(q', x + i \cdot dx, y)$, увеличиваем i на единицу и осуществляем ту же проверку.

Обозначим через c_{\max} максимальное i , при котором выполнена проверка.

Шаг 10) Положим i равным нулю.

Шаг 11) Если для каждой особой точки (q, x, y) , принадлежащей структуре B , изображению J принадлежит особая точка $(q, x - i \cdot dx, y)$ такая, что $T(q, x, y) = T(q', x - i \cdot dx, y)$, увеличиваем i на единицу и осуществляем ту же проверку.

Обозначим через c_{\min} максимальное i , при котором выполнена проверка.

Шаг 12) Если $c_{\max} + c_{\min} < \kappa$, где κ — параметр алгоритма, добавляем в структуру B все попарно не эквивалентные особые точки (q, x, y) изображения J такие, что расстояния по X от них до минимальной точки структуры B не превосходят $c_{\max} \cdot dx$, если $x_{\min}^q - x_{\min}^B > 0$, и не превосходят $c_{\min} \cdot dx$, если $x_{\min}^q - x_{\min}^B < 0$, и переходим к шагу 2).

Шаг 13) Положим j равным нулю.

Шаг 14) Если для каждой особой точки (q, x, y) , принадлежащей структуре B , изображению J принадлежит особая точка $(q', x, y + j \cdot dy)$ такая, что $T(q, x, y) = T(q', x, y + j \cdot dy)$, увеличиваем j на единицу и осуществляем ту же проверку.

Обозначим через r_{\max} максимальное j , при котором выполнена проверка.

Шаг 15) Положим j равным нулю.

Шаг 16) Если для каждой особой точки (q, x, y) , принадлежащей структуре B , изображению J принадлежит особая точка $(q, x, y - j \cdot dy)$ такая, что $T(q, x, y) = T(q', x, y - j \cdot dy)$, увеличиваем j на единицу и осуществляем ту же проверку.

Обозначим через r_{\min} максимальное j , при котором выполнена проверка.

Шаг 17) Если $r_{\max} + r_{\min} < \kappa$, где κ — параметр алгоритма, добавляем в структуру B все попарно не эквивалентные особые точки (q, x, y) изображения J такие, что расстояния по Y от них до минимальной точки структуры B не превосходят $r_{\max} \cdot dy$, если $y^q_{\min} - y^B_{\min} > 0$, и не превосходят $r_{\min} \cdot dy$, если $y^q_{\min} - y^B_{\min} < 0$, и переходим к шагу 2).

Этап 3. Проверка периодичности.

Шаг 18) Если для каждых i и j , таких, что $(-1) \cdot c_{\min} \leq i \leq c_{\max}$ и $(-1) \cdot r_{\min} \leq j \leq r_{\max}$ и для каждой особой точки (q, x, y) , принадлежащей структуре B , изображению J принадлежит особая точка $(q', x + i \cdot dx, y + j \cdot dy)$, такая, что $T(q, x, y) = T(q', x + i \cdot dx, y + j \cdot dy)$, то считаем, что найдена периодическая структура. Базовым набором является структура, построенная на первом этапе, и сдвинутая на $((-1) \cdot c_{\min} \cdot dx, (-1) \cdot r_{\min} \cdot dy)$, где сдвигами по осям X и Y являются числа dx и dy соответственно, число столбцов равно $c_{\min} + c_{\max}$, число строк равно $r_{\min} + r_{\max}$.

Шаг 19) Обозначим через (x^R_{\min}, y^R_{\min}) минимальную точку периодической структуры. Разобьем оставшиеся элементы изображения на 4 изображения следующим образом. Обозначим их через J_1, J_2, J_3, J_4 .

В J_1 включим все попарно неэквивалентные особые точки (q, x, y) изображения, не принадлежащие построенной периодической структуре, и такие что $x^q_{\min} - x^R_{\min} < 0$.

В J_2 включим все попарно неэквивалентные особые точки (q, x, y) изображения, не принадлежащие построенной периодической структуре, и такие что $x^q_{\min} - x^R_{\min} > 0$.

В J_3 включим все попарно неэквивалентные особые точки (q, x, y) изображения, не принадлежащие построенной периодической структуре, и такие что $y^q_{\min} - y^R_{\min} < 0$.

В J_1 включим все попарно неэквивалентные особые точки (q, x, y) изображения, не принадлежащие построенной периодической структуре, и такие что $y_{\min}^q - y_{\min}^R > 0$. И для каждого изображения применим описанный алгоритм нахождения периодических структур.

Список литературы

- [1] Алешин С.В., Переяславский В.И. Распознавание с опорной точкой // Математическая кибернетика и ее приложения к биологии. М.: МГУ, 1987.
- [2] Алешин С.В. Распознавание динамических образов. М.: МГУ, 1996.